

第一章

逼近的可能性

1. 基本概念

线性逼近的问题可作如下描述: 设 Φ 是定义在某个确定空间 A 上函数的集, f 是定义在 A 上的函数. 问能否求得一个接近于函数 f 的线性组合 $P = a_1 \phi_1 + \cdots + a_n \phi_n$ (其中 $\phi_i \in \Phi$)? 这里有两个先决的问题: 其一是选择集 Φ , 其二是确定 P 与 f 之间偏差的度量.

现在从第二个问题开始. 设 A 是紧致 Hausdorff 空间^[1], 又设 $O = C[A]$ 是 A 上连续实函数的全体. 那么集 O 是实数上的线性空间. 即对于实数 a 以及 $f, g \in O$, 其和 $f+g$ 与积 af 也属于 O , 从而它满足线性空间的公理. 对于一切函数 $f \in O$, 上确界

$$\|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)| \quad (1)$$

都能达到. 因此 $\|f\| = \max_{x \in A} |f(x)|$. 这个上确界确定了 $O[A]$ 上的范数, 它有下列性质:

$$\|f\| \geq 0; \|f\| = 0, \text{ 当且仅当 } f = 0; \quad (2)$$

$$\|af\| = |a| \cdot \|f\|; \quad (3)$$

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|. \quad (4)$$

[1] 一般性地, 读者可在这里及本书的后文中用紧致度量空间或者甚至于欧氏空间的紧致子集代替该空间, 而不失其实质.

这样, C 构成一个赋范线性空间. 类似地, 以 (1) 式为范数的 A 上连续复函数全体的空间也用 $C[A]$ 表示. 它是复数域上的赋范线性空间.

除非作特别的声明, 这里所考虑的函数以及数乘积都是实的. 按 C 范数的收敛性 $f_n \rightarrow f$, 即当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\|f_n - f\| \rightarrow 0$, 等价于对于一切 $x \in A$, $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$. 由此可以推知: 空间 C 是完备的, 也即, 若 f_n 是 Cauchy 序列 (即当 $n, m \rightarrow \infty$ 时, $\|f_n - f_m\| \rightarrow 0$), 则 f_n 收敛于 C 中某元素 f :

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0. \quad (5)$$

完备的赋范线性空间称为 Banach 空间. 许多 Banach 空间的类型在逼近论中起着重要的作用. 例如空间 $L^p = L^p[a, b]$ ($p \geq 1$), 其范数为

$$\|f\| = \left\{ \int_a^b |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

然而, 空间 C 中的逼近却是人们最感兴趣且又最重要的特殊情形 (倘若不考虑空间 L^2 中的正交多项式理论). 本书几乎都是围绕着它展开的.

下面定义适用于元素为 f 的 Banach 空间 X 以及一个与它相异的子集 Φ . 我们说 f 可以借助于下述线性组合来逼近:

$$P = a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 + \cdots + a_n \phi_n \quad (\phi_i \in \Phi, a_i \text{ 为实数}), \quad (6)$$

是指对于每个 $\varepsilon > 0$ 存在 P , 使 $\|f - P\| < \varepsilon$. 通常 Φ 是一个序列 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots$, 那么

$$E_n(f) = E_n^\Phi(f) = \inf_{a_1, \dots, a_n} \|f - (a_1 \phi_1 + \cdots + a_n \phi_n)\| \quad (7)$$

是 f 借助于 ϕ_i 的第 n 逼近阶. 若 (7) 中的下确界被某个 P 达到, 则称此 P 为最佳逼近线性组合. 对于上述定义有一个例外情形: 若 P 是给定阶数的代数或三角多项式, 则 (7) 中的 n 将取为多项式的阶数. 而不一定是函数 ϕ_i 的个数.

对于 $[a, b]$ 上连续实函数的空间 $C[a, b]$, 乘幂 $1, x, \dots, x^n, \dots$ 是一最简单的例子. 在此情形中, 前 $n+1$ 个函数的线性组合是 n 阶代数多项式 $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, 这里并不要求 $a_n \neq 0$. 同样的注释对以后的某些定义也适用.

另一个重要的紧致集 K 是实数 $R = (-\infty, +\infty)$ 按模 2π 的加群; $x, x' \in K$ 之间的距离 $|x - x'|$ 是在 R 中表示 x, x' 的数之间的最小距离. 显然, 可称 K 为单位圆周. 在距离 $|x - x'|$ 之下 K 成为度量空间. 按习惯, 用 $f \in C^* = C[K]$ 表示 f 是 R 上的周期为 2π 的连续函数. 对于这样的函数, $\int_K f dx$ 是 f 在 R 上的任意长为 2π 的区间上的积分. 一个函数 $f \in C^*$ 未必具有在 C^* 中的不定积分 F , 因为 $\int_0^x f(t) dt$ 未必是周期性的. 显然, $F \in C^*$ 当且仅当 f 有零平均值, 即 $\frac{1}{2\pi} \int_K f dt = 0$. 这时 $F(x) = \text{const} + \int_0^x f dt$. 在这些 F 中恰有一个具有零平均值. 重复这一讨论可看到, 对于每个 $p = 1, 2, \dots$, 具有零平均值的函数 $f \in C^*$ 有一族 p 阶不定积分, 它们依赖于一个相加的常数. 每个这样的积分称为 f 的 p 阶不定积分.

对于函数 $f \in C^*$ 常取下述三角多项式:

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (8)$$

的集作逼近工具. 此时称多项式 (8) 是 n 阶的. 若表达式中仅出现余弦 $\cos kx$ ($k = 0, \dots, n$) (或正弦), 则说它是偶的 (或奇的). 利用简单的三角公式可以证明两个 n 阶和 m 阶三角多项式的乘积是 $n+m$ 阶三角多项式.

类似于这两种情形, 线性组合(6)也常称为多项式.

本章中将讨论借助多项式逼近函数的可能性. 在第二章中将专门讨论最佳逼近多项式的性质.

2. 线性算子

下述定理(将在第3节中证明)是 Weierstrass [103] 得到的.

定理 1 每个在 $[a, b]$ 上连续的实函数 f 可借助于代数多项式逼近, 即对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在着多项式 $P_n(x) = \sum_0^n a_k x^k$, 适合

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon, \quad a \leq x \leq b. \quad (1)$$

证明这类定理最自然的方法是给出多项式 $P_n(x)$ 的明显公式. 通常, 这种公式关于 f 是线性的.

从 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 中的函数 $g = L(f)$ 称为线性算子. 乃是指对于一切 $f, f' \in X$ 和一切实数 a 满足条件

$$L(f + f') = L(f) + L(f'); \quad L(af) = aL(f). \quad (2)$$

若 Y 是实直线, 则称 L 为线性泛函. 如果有某个正的常数 M , 使

$$\|L(f)\| \leq M\|f\|, \quad f \in X, \quad (3)$$

则称线性算子 L 为有界的. 这时使(3)成立的所有 M 的下确界仍然是容许的 M . 这个最小的 M 称为 L 的范数, 且以 $\|L\|$ 表示之. 由该定义可知,

$$\|L\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|L(f)\|}{\|f\|} = \sup_{f \neq 0} \left\| L\left(\frac{f}{\|f\|}\right) \right\| = \sup_{\|f\|=1} \|L(f)\|. \quad (4)$$

有界的线性算子是连续的. 这是因为

$$\|L(f_n) - L(f)\| \leq \|L\| \cdot \|f_n - f\|.$$

故由 $f_n \rightarrow f$ (依 X 的范数) 可以推出 $L(f_n) \rightarrow L(f)$ (依 Y 的范数).

在 $X = C[A]$ 的情形, 可以识别 C 的正元素: 我们记 $f \geq 0$, 是指 $f \in C$, 并且对于一切 $x \in A$, 有 $f(x) \geq 0$. 把映 C 到其自身中的算子 L 称为正算子, 如果它变换每个正元素 f 为正元素 g . 对于正线性算子, 若 $f \leq g$ (即, 若 $g - f \geq 0$), 则 $L(f) \leq L(g)$; 又有 $|L(f)| \leq L(|f|)$, 其中 $|f|$ 是取值 $|f(x)|$ 的函数. 这种算子总是有界的: 从

$$|L(f)| \leq L(|f|) \leq L(\|f\|e) = \|f\|L(e)$$

(其中 e 是常值函数 $e(x) = 1$) 推出

$$\|L(f)\| \leq \|L(e)\| \cdot \|f\|,$$

于是

$$\|L\| = \|L(e)\|.$$

$L(f)$ 在点 $x \in A$ 处的值记作 $L(f, x)$.

例 1. Bernstein 多项式. 对于定义在 $[0, 1]$ 上的函数 f , 命

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (n=0, 1, \dots). \quad (5)$$

显然, 这是一个映 $C[0, 1]$ 到其自身中的正线性算子. 由二项公式

$$B_n(e, x) = \sum_{k=0}^n p_{nk}(x) = 1, \quad p_{nk}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (6)$$

可看到, $\|B_n\| = 1$, 其中 $n=0, 1, \dots$.

例 2. Fourier 级数. 设 f 是周期为 2π 的可积函数, 其

Fourier 级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (7)$$

的系数由公式

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt \quad (8)$$

给出. 例如, 有限和 (7) 中增加一些零项便得三角多项式 T_n 的 Fourier 级数. 考察级数 (7) 的第 n 部分和 s_n . 由通常的计算易得

$$s_n = s_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(2n+1) \frac{t-x}{2}}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt. \quad (9)$$

为了证明此式, 只要写 $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, 这里

$$u_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} f(t) dt, \quad u_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k(t-x) dt$$

$$(k=1, 2, \dots),$$

然后应用公式

$$\frac{1}{2} + \cos \alpha + \cdots + \cos n\alpha = \frac{\sin(2n+1) \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = D_n(\alpha), \quad (10)$$

上式的正确性可通过两边乘以 $2 \sin \frac{\alpha}{2}$ 得到. 同样, 利用公式

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2}\alpha + \cdots + \sin(2n-1) \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2 \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad (11)$$

可得 s_n 的算术平均表示式

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_n(f, x) = \frac{s_0 + \cdots + s_{n-1}}{n}, \\ &= \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{\sin \frac{n(t-x)}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right)^2 dx.\end{aligned}\quad (12)$$

于是, $\sigma_n(f)$ 是映 C^* 到其自身的正线性算子列. 因为 $\sigma_n(e) = e$ (对函数 $e(x) \equiv 1$, 所有的 $s_n(x) \equiv 1$). 故有 $\|\sigma_n\| = 1$. 算子 $s_n(f)$ 对于 $f \in C^*$ 也是线性的, 但不是正的. 由 s_n 和 σ_n 的定义推知, 对于每个 f 来说, $s_n(f, x)$ 和 $\sigma_n(f, x)$ 分别是 n 阶和 $n-1$ 阶三角多项式. $s_n(f)$ 的范数由下述定理给出^[1].

定理 2 (Fejér) 算子 $s_n(f)$ 的范数 $\|s_n\|$ 等于

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} \right| dt = \frac{4}{\pi^2} \log n + O(1), \quad (13)$$

也即对于每个固定的 x , 作为由 C^* 到 R 的线性泛函来考虑, $s_n(f, x)$ 的范数等于 (13).

证明 因为 $D_n(t)$ 有周期 2π , 故

$$|s_n(f, x)| \leq \|f\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t-x)| dt = A_n \|f\|.$$

此不等式表明, 与算子 s_n 相同, 泛函的范数不超过 A_n . 为了证明这些范数恰好等于 A_n , 只要对给定的 $x \in K$ 和 $\varepsilon > 0$, 找出连续函数 g , 使得 $\|g\| = 1$, 且

[1] 我们利用下述记号: 若 u_n 和 v_n 是 n 的函数, 则我们记 (a) $u_n = O(v_n)$, 倘若对于某常数 M , $|u_n| \leq M v_n$; (b) $u_n = o(v_n)$, 倘若当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n/v_n \rightarrow 0$; (c) $u_n \sim v_n$, 倘若当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n/v_n \rightarrow 1$ 以及 (d) $u_n \approx v_n$, 倘若 u_n/v_n 介于两个常数 m 与 M 之间, 其中 $0 < m < M$.

$$s_n(g, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) D_n(t-x) dt > A_n - \varepsilon. \quad (14)$$

对于函数 $g_0(t) = \text{sign } D_n(t-x)$, 有

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_0(t) D_n(t-x) dt = A_n.$$

但 g_0 不是连续函数, 它在 $[-\pi, \pi]$ 中的有限多个使 $D_n(t-x)$ 变号的点 t_v 处是跳跃间断的. 我们用小区间 $I_v = (t_v - \delta, t_v + \delta)$ 包围每个 t_v , 并且在每个 I_v 上改变 g_0 使之成为处处取值于 -1 和 $+1$ 之间而在诸 I_v 之外与 g_0 重合的连续函数 g . 于是积分 $\int_{-\pi}^{\pi} g D_n dt$ 与 $\int_{-\pi}^{\pi} g_0 D_n dt$ 之差不超过 $2 \int_E |D_n(x-t)| dt$, 其中 E 是这些区间 I_v 的并, 只要 δ 充分小, 便得到 (14).

为了获得 A_n 的渐近公式, 记 $A_n = \pi^{-1} \int_0^{\pi} 2 |D_n(t)| dt$. 因为 $D_n(t)$ 是偶函数, 积分号内的函数等于

$$\left| \cot \frac{t}{2} \sin nt + \cos nt \right| = \left| \frac{2}{t} \sin nt + \left(\cot \frac{t}{2} - \frac{2}{t} \right) \sin nt + \cos nt \right|.$$

由于 $\cot u - u^{-1}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 中是有界的. 故有

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin nt|}{t} dt + O(1).$$

因为 $|\sin nt| \leq nt$. 所以 $t^{-1} |\sin nt|$ 在 $(0, \pi/n)$ 上的积分是有界的. 于是

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} \frac{|\sin nt|}{t} dt + O(1) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{t + n^{-1}k\pi} dt + O(1). \end{aligned}$$

以 $S(t)$ 表示最后的和式. 对于 $0 \leq t \leq \pi/n$, $S(t)$ 介于

$$S(0) = n\pi^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right)$$

与 $S(\pi/n) = S(0) + O(n)$

之间. 再利用

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} = \log n + O(1)$$

以及

$$\int_0^{\pi/n} \sin nt dt = \frac{2}{n},$$

即得

$$A_n = \frac{4}{\pi^2} \log n + O(1). \quad (15)$$

证毕.】

3. 逼近定理

在第6章中我们将会看到, 算子 s_n 用于任意连续函数的一致逼近是不适宜的. 但是, B_n 和 σ_n 都可用于这一目的.

Bohman 和 Korovkin 在 [7] 中发现, 对于正线性算子序列 L_n 来说, 它们的收敛性往往只要通过对函数 f 的具体有限集作检验即可十分简单地确定. 设 A 是紧致 Hausdorff 空间 (至少有两个点), 又设 $f_1, \dots, f_m$ 是有下述性质的 A 上连续的实函数^[1]:

$$\left. \begin{aligned} &\text{存在连续实函数 } a_i(y), y \in A (i=1, \dots, m), \text{ 使得} \\ &P_y(x) = \sum_{i=1}^m a_i(y) f_i(x) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

是正的, 并且当且仅当 $x=y$ 时等于零.

[1] 关于 $a_i(y)$ 是连续的假设可以省去, 但这样假设可简化定理3的证明.

定理 3 设函数 $f_1, \dots, f_m$ 满足(1), 又设 L_n 是映 $O[A]$ 到其自身的正线性算子序列, 它满足

$L_n(f_i, x) \rightarrow f_i(x) \ (i=1, \dots, m)$ 对 $x \in A$ 均匀成立, (2)
那么

$L_n(f, x) \rightarrow f(x)$ 对每个 $f \in O[A]$ 关于 x 均匀成立. (3)

证明 我们从函数 $P(x) = \sum_{i=1}^m a_i f_i(x)$ 的某些性质着手. 由于存在着对于所有 $x \in A$ 适合 $\bar{P}(x) > 0$ 的 $\bar{P}$; 若 $y_1 \neq y_2$ 是 A 的两个点, 则可取 $\bar{P} = P_{y_1} + P_{y_2}$. 由 (2), 对于每个常系数的 P , 有 $L_n(P, x) \rightarrow P(x)$ 关于 x 均匀成立. 故又有

$$L_n(P_{y_i}, y) = \sum_{i=1}^m a_i(y) L_n(f_i, y) \rightarrow \sum_{i=1}^m a_i(y) f_i(y) = 0,$$

并且由于 $a_i(y)$ 是有界的, 所以收敛性关于 y 是一致的. 最后, 存在常数 $M_0 > 0$, 使 $\|L_n(e)\| \leq M_0$. 这可由

$$L_n(e, x) \leq a L_n(\bar{P}, x) \rightarrow a \bar{P}(x)$$

推出, 式中 $a > 0$ 是由 $1 = e(x) \leq a \bar{P}(x) \ (x \in A)$ 决定的.

引理 设 $f_y \in O[A]$, $y \in A$, 是这样的函数族: $f_y(x)$ 是点 $(x, y) \in A \times A$ 的连续函数, 并且对于一切 $y \in A$, $f_y(y) = 0$. 则关于 y , 一致地有

$$L_n(f_y, y) \rightarrow 0. \quad (4)$$

证明 考虑 $A \times A$ 中“对角线”集 $B = \{(y, y)\}$ 和某个 $\varepsilon > 0$. B 的每个点在 $A \times A$ 内部有一个邻域 U , 使得当 $(x, y) \in U$ 时, $|f_y(x)| < \varepsilon$. 这些 U 的并 G 是开集. 它的余集 F 是紧致的. 设

$$m = \min_{(x, y) \in F} P_y(x) > 0, \quad M = \max_{(x, y) \in F} |f_y(x)|.$$

对所有的 x, y , 有

$$|f_v(x)| < \varepsilon + \frac{M}{m} P_v(x). \quad (5)$$

事实上, 当 $(x, y) \in G$ 时, $|f_v(x)|$ 不超过右边第一项; 而当 $(x, y) \in F$ 时, 不超过第二项. 由 (5) 推知, 对于所有大的 n , 有

$$\begin{aligned} |L_n(f_v, y)| &\leq \varepsilon L_n(e, y) + \frac{M}{m} L_n(P_v, y) \\ &\leq M_0 \varepsilon + \frac{M}{m} L_n(P_v, y) \leq (M_0 + 1) \varepsilon. \end{aligned}$$

引理证毕.】

现在不难完成定理的证明. 若 $f \in C[A]$ 给定, 则取

$$f_v(x) = f(x) - \frac{f(y)}{P(y)} \bar{P}(x).$$

由引理:

$$L_n(f, y) - \frac{f(y)}{P(y)} L_n(\bar{P}, y) \rightarrow 0.$$

从而由 $L_n(\bar{P}, y) \rightarrow \bar{P}(y)$ 得到 (3). 定理证毕.】

作为例子, 设 $A = [a, b]$, 则组 $f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2$ 满足条件 (1). 于是可取

$$P_v(x) = (y - x)^2 = y^2 f_1 - 2y f_2 + f_3.$$

定理 3 使我们能通过尽可能少的计算去验证具体算子的收敛性. 下面我们着手证明定理 1. 线性变换 $t = (x - a)/(b - a)$ 把区间 $a \leq x \leq b$ 变为 $0 \leq t \leq 1$. 从而, 定理 1 可从下述定理推出.

定理 4 若函数 f 在 $[0, 1]$ 上是连续的, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f, x) = f(x) \text{ 在 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 上一致成立.} \quad (6)$$

证明 对于 2(6) 的多项式 $p_{nk}(x)$ 存在

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n k p_{nk}(x) &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= nx \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} x^l (1-x)^{n-1-l} = nx,\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n k(k-1) p_{nk}(x) &= n(n-1)x^2 \sum_{l=0}^{n-2} \binom{n-2}{l} x^l (1-x)^{n-2-l} \\ &= n(n-1)x^2,\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{k=0}^n k^2 p_{nk}(x) = n^2 x^2 + nx(1-x). \quad (8)$$

公式 2(6), (7) 以及 (8) 表明, 当 $n \geq 2$ 时, 函数 $f_1=1$, $f_2=x$ 和 $f_3=x^2$ 的 Bernstein 多项式相应地为 1, x 和 $x^2 + n^{-1}x(1-x)$. 条件 (1) 和 (2) 成立, 从而 (6) 可由定理 3 推出.

证毕. $\blacksquare$

与 Bernstein 多项式密切相关的是和

$$T_{nr}(x) = \sum_{k=0}^n (k-nx)^r p_{nk}(x) \quad (r=0, 1, \dots). \quad (9)$$

利用 (7) 和 (8), 我们看到, $T_{n0}=1$, $T_{n1}=0$, $T_{n2}=nx(1-x)$. 为了对 $r \geq 2$ 计算 T_{nr} , 可利用递推公式

$$T_{n,r+1} = x(1-x)(T'_{nr} + nrT_{n,r-1}) \quad (r \geq 1). \quad (10)$$

它可以通过对 (9) 求导推出, 为此只要注意

$$\frac{d}{dx} p_{nk}(x) = \frac{k-nx}{x(1-x)} p_{nk}(x). \quad (11)$$

由 (9) 得到

$$\begin{aligned}T_{n0} &= 1, \quad T_{n1} = 0, \quad T_{n2} = nX, \quad T_{n3} = n(1-2x)X, \\ T_{n4} &= 3n^2 X^2 - 2nX^3 + nX(1-2x)^2, \quad X = x(1-x).\end{aligned}\quad (12)$$

由它们可推出: $T_{n4}(x) \leq Mn^2$, $0 \leq x \leq 1$. 利用这一点, 可对

固定的 $\delta > 0$, 估计使 $\left|x - \frac{k}{n}\right| \geq \delta$ 的那些 k 的项 $p_{nk}(x)$ 的和:

$$\begin{aligned} \sum_{|x - k/n| \geq \delta} p_{nk}(x) &\leq \frac{1}{\delta^4} \sum \left(x - \frac{k}{n}\right)^4 p_{nk} \\ &\leq \frac{M}{n^2 \delta^4} = \frac{M_1}{n^2} \quad (0 \leq x \leq 1). \end{aligned} \quad (13)$$

定理 5 (Weierstrass) 若 $f \in C^*$, 则对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在三角多项式 T , 使得

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon \quad (x \in K). \quad (14)$$

证明 我们证明对于一切 $f \in C^* = C[K]$, 有 $\sigma_n(f) \rightarrow f$. 这也可由定理 3 推出: 取 $f_1 = 1$, $f_2 = \cos x$, $f_3 = \sin x$ 以及

$$P_y(x) = 1 - \cos(y - x).$$

证毕. $\square$

多变量函数也可借助多项式来逼近. 对此我们不打算作详细讨论. 但是可以简单地证明

定理 6 定义在 s -维欧氏空间中的紧致子集 A 上的连续函数 $f(x_1, \dots, x_s)$ 可以借助 $x_1, \dots, x_s$ 的多项式来逼近.

证明 只要对单位立方体 $S: 0 \leq x_i \leq 1 (i=1, \dots, s)$ 证明定理就够了. 这是因为紧致集 A 被包含在某正方体 S' 中, 而根据 Tietze 定理 (见 [28]), 可以保持连续地把 f 从 A 延拓到 S' . 因此只要对 $S' = A$ 证明定理 6 就够了. 然而 S' 又可被线性映照成 S .

对于 $A=S$, 有 $B_n(f) \rightarrow f$, 其中 f 的 n 阶 Bernstein 多项式 B_n 由

$$\begin{aligned} B_n(f; x_1, \dots, x_s) \\ = \sum_{k_1=0}^n \cdots \sum_{k_s=0}^n f\left(\frac{k_1}{n}, \dots, \frac{k_s}{n}\right) p_{nk_1}(x_1) \cdots p_{nk_s}(x_s) \end{aligned} \quad (15)$$

来定义. 事实上, $B_n(f)$ 是正线性算子, 并且对于 $2s+1$ 个函

数 $1, x_i, x_i^2 (i=1, \dots, s)$ 中每一个都有 $B_n(f) \rightarrow f$.

$$\text{取} \quad P_y(x) = \sum_{i=1}^s (y_i - x_i)^2$$

作为(1)中的函数 $P_y(x)$. 我们有 $P_y(x) \geq 0$, 并且当且仅当 $y=x$ 时, $P_y(x)=0$, 其中 $y=(y_1, \dots, y_s)$, $x=(x_1, \dots, x_s)$. **■**

4. Stone 定理

Stone 定理 [91] (本书中并不用到它)是借助抽象函数集的多项式来逼近的. 但它可以由“具体”的定理推出, 更确切地说: 它可以从定理 6 和某些周知的拓扑定理推出. 在本节中, 需要用到若干有关拓扑空间乘积的基本知识 (例如参见 [28]).

设 A 是紧致的 Hausdorff 拓扑空间, 而 $G=\{g\}$ 是 A 上一族连续实函数. 考虑诸函数 g 的任意实系数多项式 P , 也就是说, 多项式 P 是下述形式的 (有限) 和:

$$P(x) = \sum \alpha g_1(x)^{n_1} \cdots g_m(x)^{n_m}, \quad (1)$$

其中 $g_i \in G$, α 是实数, 而 $n_i \geq 0$ 是任意整数. 在 (加于 G 的) 怎样的条件下, A 上连续函数可以借助多项式 P 逼近? 为了回答这个问题, 在此采用下述术语: 我们说 G 能区别 A 的点, 是说对于 A 的每一对点 $x_1 \neq x_2$, 有函数 $g \in G$, 使 $g(x_1) \neq g(x_2)$. 显然, 对于所述的问题, 此性质是必要的条件: 若 G 不能区别 A 的点, 则存在两个点 $x_1 \neq x_2$, 使得所有的 g , 从而所有的 P 在 x_1 与 x_2 处取相同的值. 但是, 存在着使 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 的连续函数 f . 每个这样的 f 不能用 P 来逼近.

定理 7 (M. H. Stone) 若集 G 能区别 A 的点, 则每个连续实函数可以借助 $g \in G$ 的函数多项式来逼近.

证明 因为每个 $g \in G$ 是有界的, 不失一般性, 可以假设

对于每个 g 有 $-1 \leq g(x) \leq 1 (x \in A)$.

对于每个 $g \in G$, 设 $I_g = [-1, 1]$. 假定 $\pi = \prod_{g \in G} I_g$ 是 I_g 的拓扑积, 由 Tychonoff 定理知: π 是紧致 Hausdorff 空间. π 的点 y 是集 $\{y_g\}_{g \in G}$, 其中 $y_g \in I_g$. π 在 I_g 上的射影是由 $p_g(y) = y_g$ 给出的映照 p_g .

在此以 $y = \Phi(x) = \{g(x)\}_{g \in G}$ 定义 A 到 π 中的映照. 由于每个函数 $p_g(\Phi(x)) = g(x)$ 是连续的, 所以这个函数 Φ 是连续的. 因为 G 能区别 A 的点, 所以它是一对一的. 这样, Φ 是从紧致空间到 Hausdorff 空间的一对一映照; 因此, Φ 是 A 到 $B = \Phi(A)$ 的同胚.

设 $f \in O[A]$ 和 $\varepsilon > 0$ 是任意的. 我们要证存在形如 (1) 的多项式 $P(x)$, 使得 $|f(x) - P(x)| < \varepsilon (x \in A)$. 此不等式等价于 $|f(\Phi^{-1}(y)) - P(\Phi^{-1}(y))| < \varepsilon (y \in B)$. 现在对于每个点 $y \in B$, 逆映照 Φ^{-1} 确定了唯一的点 $x \in A$, 使得 $g(x) = y_g (g \in G)$. 从而对于每个 $g \in G$, $g(\Phi^{-1}(y)) = y_g$. 可以看到: 假如能够证明对于每个 B 上连续的实函数 $F(y)$, 存在形如

$$\bar{P}(y) = \sum \alpha y_{g_1}^{n_1} \cdots y_{g_m}^{n_m}$$

的多项式, 使得

$$|F(y) - \bar{P}(y)| < \varepsilon (y \in B). \quad (2)$$

则定理得证. 在此还可以应用 Tietze 延拓定理进一步转化我们的问题. 函数 $F(y)$ 是在紧致 Hausdorff 空间 π 的闭子集 B 上连续的, 因而可以被延拓到整个 π 上. 所以只要关于情形 $B = \pi$, 对于每个函数 $F \in O[\pi]$ 证明 (2) 就够了.

考虑两种情形: (a) G 是有限的, 设 $G = \{g_1, \dots, g_m\}$. 在此情形下, π 是 m -维立方体, 从而 (2) 可由定理 6 推出.

(b) G 是无限的. 这时我们用一个仅依赖于有限多个 y_g

的函数逼近 $F(y)$. 应该注意, π 中的开集基可由下述形式的开集 U 给出: π 的点 z 属于 U 当且仅当它的坐标 z_θ 中有限个被限制在 I_θ 的某开集中, 而其它坐标没有限制.

对于每个 $y \in \pi$, 存在着开的基元素 $U_v, y \in U_v$, 使得对于所有的 $y' \in U_v$, 有 $|F(y') - F(y)| < \frac{1}{4} \varepsilon$. 从而对于 $y', y'' \in U_v$, 有 $|F(y') - F(y'')| < \frac{1}{2} \varepsilon$. 诸集 $U_v (y \in \pi)$ 覆盖着 π . 因此, 存在有限子覆盖: $U_{v_1}, \dots, U_{v_r}$. 设 I_i 是 g 的有限集, 对于它, 点 $z \in U_{v_i}$ 的坐标 z_θ 是被限制的. 设 $I = I_1 \cup \dots \cup I_r$. 那么 I 是有限的, 比如说: 设 $I = \{g_1, \dots, g_m\}$. 对于每个 $y \in \pi$, 设 $\hat{y}$ 是 π 中这样的点: 当 $g \in I$ 时, 其坐标 $\hat{y}_\theta = y_\theta$; 当 $g \notin I$ 时, $\hat{y}_\theta = 0$. 点 y 必须属于某个 U_{v_i} , 于是根据 $\hat{y}$ 的定义也有 $\hat{y} \in U_{v_i}$. 这就推知:

$$|F(y) - F(\hat{y})| < \frac{1}{2} \varepsilon \quad (y \in \pi). \quad (3)$$

所有点 $\hat{y}$ 的集同胚于乘积 $\prod_1^m I_{g_i}$ 中所有点 $\{y_{g_i}\}_{i=1}^m$ 的集, 并且 $F(\hat{y})$ 可看作这个集上的函数. 利用情形(a)的结果可知: 存在某个 y_{v_i} 的多项式 $\bar{P}$, 使 $|F(\hat{y}) - \bar{P}(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 由此结合(3)便可得定理. 证毕. $\square$

Weierstass 定理作为特殊情形含于定理 7 中. 例如, 为了获得定理 5, 只要验证 $\cos x$ 和 $\sin x$ 能区别 K 中的点以及 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的多项式恰好为三角多项式. 应该再次指出, 定理 7 仅对实值函数和实系数多项式成立. 对于复值函数此定理不成立. 例如, 考察圆 $D: |z| \leq 1$ 上的复函数 z^n . 它们能区别 D 的点. 但是, 多项式在 D 上的匀敛极限 $\lim P_n(z) = f(z)$ 并不是任意的连续函数. 事实上, 多项式 $P_n(z)$ 以及极限函

数 f 对于 $|z| < 1$ 是解析的.

5. 附 记

1. 由定理 5 知道, 诸函数 $\Phi: 1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ 的线性组合能逼近 C^* 中的每个函数. 假如在 Φ 中去掉一个函数, 那么该性质便失去了 (这是一切就范正交函数列的共同性质). 序列 $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ 的情形却完全不同, 这里, 可以去掉几乎所有的函数! 一般地, 考虑 $[a, b]$ 上函数系 $1, x^{p_1}, \dots, x^{p_n}, \dots$, 其中 p_n 是仅满足条件 $0 < p_1 < p_2 < \dots, p_n \rightarrow \infty$ 的实数列. Müntz (见 [1, 第 49 页], [10, 第 489 页]) 证明了: 当且仅当

$$\sum p_n^{-1} = +\infty$$

时, 可用这些函数的线性组合逼近一切在 $[a, b]$ 上的连续函数.

2. Banach 空间 X 的元素 $f_1, \dots, f_n, \dots$ 构成一个 Schauder 基, 其含义是每个元素 $f \in X$ 有唯一的展开式 $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ (其收敛性按 X 的范数). Schauder 证明了空间 $C[a, b]$ 有这种基. 由此, Krein, Mil'man 和 Rutman [71] 推出具有下述性质的代数多项式系 $P_n(x)$ 的存在性: 每个连续函数 $f(x)$ 有唯一的一致收敛表示式

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(x).$$

3. 关于借助系数满足一定要求的代数多项式的逼近有许多结果. 例如, 可以假设系数是整数. 在这种情形下, 逼近的可能性与区间 $[a, b]$ 的长度有关. 若 $[a, b]$ 不含有整点, 连续函数的逼近总是可能的; 若该区间是 $[0, 1]$, 则当且仅当 $f(0)$ 和 $f(1)$ 是整数时逼近才有可能. 随着区间长度 $b-a$ 的

增加, f 的值必须适合的条件数目也无限增多. 最后, 若 $b-a \geq 4$, 则借助整系数多项式的非平凡逼近总是不可能的. 对此, 有兴趣的读者可参见 Hewitt 和 Zuckerman [57] 以及 Gelfand [52]. Jurkat 和 Lorentz [59] 讨论了借助正系数多项式的逼近.

4. 设 X 是任意一个 Banach 空间, Φ 是 X 中元素 ϕ_i 的序列. 注意回顾逼近阶 $E_n(f)$ (见 1(7)). 显然, 这些数成递减序列, 并且倘若所有的 $f \in X$ 能被 ϕ_i 所逼近, 则对于 $f \in X$, 有 $E_n(f) \rightarrow 0$. Bernstein 证明了: 这完全刻划着序列 $E_n(f)$ 的特征: 若 X 和 Φ 给定了, 且 $\varepsilon_n \geq 0$ 是任意单调减少趋于零的序列, 则在空间 X 中存在着具有性质 $E_n(f) = \varepsilon_n$ ($n=0, 1, \dots$) 的元素 f (见 [4, 第 332 页], [10, 第 99 页]).

问 题

1. 每个函数 $f \in C[0, \pi]$ 可借助于偶三角多项式一致逼近.

2. 在无穷远处有有限极限^[1] $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ 的连续函数 $f(x)$, $-\infty < x < +\infty$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上能被形如 $(1+x^2)^{-n} P_{2n}(x)$ 的有理函数逼近.

3. 设 Q_n 是 m_n 阶多项式序列, 在 $[a, b]$ 上一致地有 $Q_n(x) \rightarrow f(x)$, 其中 f 不是多项式, 那么 $m_n \rightarrow \infty$.

4. 在与问题 3 相同的假设下, $mE_n \rightarrow 0$, 其中 E_n 是使 $Q_n(x) = f(x)$ 的点 x 的集 (Brudnyi 和 Gopengauz).

5. 若 $f \in C[0, 1]$ 且 $f(0) = f(1) = 0$, 则整系数多项式序列

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \right] x^k (1-x)^{n-k}$$

一致收敛于 $f(x)$.

6. 函数 $f \in C[0, 1]$ 可被整系数多项式逼近, 当且仅当 $f(0)$ 和

[1] 这里的意思是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ——译者注.

$f(1)$ 为整数.

7. 若 A 的所有能被函数 f 区分的点对也能被诸函数 g 区别, 则函数 $f \in C[A]$ 可以借助于 $g \in G$ 的多项式 4(1) 来逼近.

8. 若 $A_1, \dots, A_p$ 是紧致 Hausdorff 空间, 并且 $A = A_1 \times \dots \times A_p$, 则每个在 A 上连续的函数 $f(x_1, \dots, x_p)$ 能被形如 $\sum_{k=1}^n f_{k_1}(x_1) \cdots f_{k_p}(x_p)$ 的和逼近, 其中 $f_{k_i} \in C[A_i]$ ($i=1, \dots, p, k=1, \dots, n$) (Dieudonné).

9. 设 $K_n(x, t)$ 对于 $a \leq x, t \leq b$ 是连续的, 又设 (a) $\int_a^b K_n(x, t) dt = 1$; (b) $\int_a^b |K_n(x, t)| dt \leq A$ ($n=1, 2, \dots$); (c) 对于每个 $\delta > 0$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\int_{|x-t|>\delta} |K_n(x, t)| dt \rightarrow 0$. 那么对于每个 $f \in C[a, b]$ 一致地有 $\int_a^b K_n(x, t) f(t) dt \rightarrow f(x)$.

10. 设 $f \in C[0, 1]$. 利用对于每个 $\delta > 0$, 在 $\delta \leq x \leq 1-\delta$ 上的多项式

$$P_{2n}(f, x) = \lambda_n^{-1} \int_0^1 [1 - (t-x)^2]^n f(t) dt, \quad \lambda_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt,$$

一致收敛于 $f(x)$ 的事实来证明定理 1. (Landau)

11. 若函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是连续的, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时有极限零, 则对于 $0 \leq x < +\infty$, 有 $\lim_{u \rightarrow \infty} S_u(x) = f(x)$ 一致成立, 其中 $S_u(x)$ 由

$$S_u(x) = e^{-ux} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ux)^k}{k!} f\left(\frac{k}{u}\right) \quad (u > 0)$$

所定义.

12. 对于按第 9 页脚注减弱的条件 3(1) 证明定理 3.

第二章

最佳逼近多项式

1. 最佳逼近多项式的存在性

设 X 是实或复标量的 Banach 空间(参见第一章第 1 节). 又设 $x_1, \dots, x_n$ 是 X 中给定的向量. 考察形如 $y = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ 的线性组合(多项式), 其中 a_i 是标量. 对于每个 $x \in X$, x 借助多项式 y 的逼近阶 $E_n(x)$ 为

$$E(x) = E_n(x) = \inf_y \|x - y\|. \quad (1)$$

倘若下确界为某个 $y = y_0$ 所达到, 则称此 y_0 为 x 的最佳逼近线性组合, 或最佳逼近多项式. 本章将讨论最佳逼近多项式的存在性和唯一性, 并且找出它们的特征.

引理 1 一切多项式

$$y = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad \|y\| \leq M, \quad (2)$$

所成的集是紧致的. 这里 X 中的向量 $x_1, \dots, x_n$ 以及数 $M \geq 0$ 是给定的. 换言之, 对于多项式 (2) 的每个序列 y_m ($m = 1, 2, \dots$) 均可取出收敛于同类型的多项式的子序列.

证明 可以假设向量 $x_1, \dots, x_n$ 是线性无关的. 设 a_{mi} 是多项式 y_m 的系数. 为证此命题只需证明系数 a_{mi} 是有界的, 也即存在 M_1 , 使得对于一切 m 和 i , 有 $|a_{mi}| \leq M_1$. 事实上, 这时对于每个 i 在序列 a_{mi} 中可取出收敛的子序列. 逐次选取子序列可得一个子序列 y_{m_j} , 使得对于每个 i 当 $j \rightarrow \infty$

时, $a_{m,i} \rightarrow a_i$. 这样, y_m 便按空间 X 的范数收敛于 $y = \sum_1^n a_i x_i$, 且 $\|y\| \leq M$.

假设 M_1 不存在. 必要的话, 用一个子序列 (仍记作 y_m) 代替 y_m , 可以假设 $\max_i |a_{mi}|$ 异于零, 并且当 $m \rightarrow \infty$ 时, 这个极大值趋于无穷. 又设对于每个 $m=1, 2, \dots$ 此极大值在某个 i , 例如 $i=1$ 处达到. 设 $z_m = y_m/a_{m1}$, 那么 $\|z_m\| \leq M/|a_{m1}| \rightarrow 0$, 并且 z_m 有形式

$$z_m = x_1 + b_{m2}x_2 + \dots + b_{mn}x_n,$$

其中 $|b_{mi}| \leq 1$. 因为 b_{mi} 是有界的, 故可设 (必要时用一个子序列代替 z_m) $b_{mi} \rightarrow b_i$ ($i=2, \dots, n$). 从而

$$x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n = 0.$$

这是不可能的. 因为 x_i 是线性无关的.

证毕.】

现在可以证明

定理 1 对于每组向量 $x_1, \dots, x_n \in X$ 和每个 $x \in X$ 存在着最佳逼近多项式.

证明 存在着多项式序列 y_m 适合 $\|x - y_m\| \rightarrow E(x)$. 因为 $\|y_m\| \leq \|x\| + \|x - y_m\|$ 是有界的. 故由引理 1, 可选取序列 y_m , 使 $\|y_m - y_0\| \rightarrow 0$, 其中 y_0 为某多项式. 从而 $\|x - y_m\| \rightarrow \|x - y_0\|$, 于是 $\|x - y_0\| = E(x)$. 证毕.】

对于某些 Banach 空间 X , 可以断言: 每一组 $x_1, \dots, x_n$ 的最佳逼近多项式都是唯一的. 由下述性质所刻划的严格凸空间就是这种空间:

$$\left. \begin{aligned} x_1 \neq x_2, \quad \|x_1\| = \|x_2\| = 1, \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \text{蕴含着} \quad \|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\| < 1. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

若 y_1, y_2 是适合

$$\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = E(x) > 0$$

的两个多项式, 则利用(3)便导致矛盾:

$$\begin{aligned} E(x) &\leq \|x - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\| = \left\| \frac{1}{2}(x - y_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(x - y_2) \right\| < E(x). \end{aligned}$$

因此, 只能是 $y_1 = y_2$. 易见, 空间 L^p ($1 < p < \infty$) 是严格凸的 (欲明了此理, 只需搞清楚 Minkowski 不等式中等号成立的情形, 见 [23, 第 146 页]). 但是重要的空间 L^1 和 C 却不具备这一性质. 因此这个唯一性命题对它们是不适用的. 例如, 考察空间 $C[0, 1]$, 设 $x(t) = 1$ 及 $x_1(t) = t$ ($0 \leq t \leq 1$). 用多项式 $y = a_1 x_1$ 来逼近 x , 对于每个 y 有 $\|x - y\| \geq x(0) - y(0) = 1$. 另一方面, $\|x - y\|$ 的下界为函数 $y = a_1 x_1$ 所达到, 其中 $0 \leq a_1 \leq 2$, 因此, 所有这样的 y 都是最佳逼近多项式.

2. 最佳逼近多项式的特征

在第 2 节到第 5 节中将论述空间 C 中逼近的基本定理. 设 A 是紧致 Hausdorff 空间, $C[A]$ 是所有在 A 上连续的复或实函数的空间, 其范数 $\|f\| = \max_{x \in A} |f(x)|$. 设 $\phi_1, \dots, \phi_n$ 是给定的 A 上 (复或实) 连续函数. 如第 1 节那样, 称复或实系数线性组合 $P = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i$ 为 ϕ_i 的多项式. 现在同时讨论“复情形”与“实情形”. 尽管在第 2 节到第 5 节中的某些公式对于“实情形”是简单的. 但也有这样的情形, 其证明在本质上不同于复情形. 只是在第 6 节中才出现仅限于“实情形”的定理.

对于实部为 $a = \operatorname{Re} \alpha$ 和虚部为 $b = \operatorname{Im} \alpha$ 的复数 $\alpha = a + bi$, 记为 $\bar{\alpha} = a - bi$, 那么

$$(\overline{\alpha\beta}) = \overline{\alpha}\beta, \quad \alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2, \quad \operatorname{Re}\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \overline{\alpha}).$$

下列的恒等式是有用的:

$$|\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) = |\alpha|^2 + 2\operatorname{Re}\alpha\overline{\beta} + |\beta|^2. \quad (1)$$

下述定理给出了最佳逼近多项式的特征.

定理 2 (Kolmogorov [61]) P 是连续函数 f 的最佳逼近多项式, 当且仅当对于每个多项式 Q , 有

$$\max_{x \in A_0} \operatorname{Re}\{[f(x) - P(x)]\overline{Q}(x)\} \geq 0. \quad (2)$$

其中 A_0 表示使 $|f(x) - P(x)| = \|f - P\|$ 的一切点 $x \in A$ 的集 (它与 f 及 P 有关).

在“实情形”中, (2) 取形式

$$\max_{x \in A_0} \{[f(x) - P(x)]Q(x)\} \geq 0. \quad (3)$$

上述条件表示关系式 $[f(x) - P(x)]Q(x) < 0$ 不能对于一切 $x \in A_0$ 都满足. 换言之, $f(x) - P(x)$ 和 $Q(x)$ 不能在所有的 $x \in A_0$ 取相反的符号. 关系式 (3) 可粗略地理解为 A_0 很大, 使 $f(x) - P(x)$ 在 A_0 上常常变号. 以后, 在定理 5 和 9 中可以看到, 这一不太清楚的命题还可以陈述得更加明确一些.

证明 首先假设 $P(x)$ 是最佳逼近多项式. 设 $\|f - P\| = E$. 假如 (2) 不成立, 那么存在多项式 $Q(x)$, 使得对于某个 $\varepsilon > 0$, 有

$$\max_{x \in A_0} \operatorname{Re}\{[f(x) - P(x)]\overline{Q}(x)\} = -2\varepsilon.$$

由函数的连续性可知, 存在着 A 的开子集 G , $G \supset A_0$, 使得

$$\operatorname{Re}\{[f(x) - P(x)]\overline{Q}(x)\} < -\varepsilon \quad (x \in G).$$

现在来考察一下 f 借助于多项式 $P_1 = P - \lambda Q$ 逼近的情形, 其中 $\lambda > 0$ 是很小的数. 设 M 是 $|Q(x)|$ 在 A 上的最大值. 首先假设 $x \in G$. 由 (1) 得

$$\begin{aligned}
 |f(x) - P_1(x)|^2 &= |[f(x) - P(x)] + \lambda Q(x)|^2 \\
 &= |f(x) - P(x)|^2 + 2\lambda \operatorname{Re}\{[f(x) - P(x)]\overline{Q(x)}\} \\
 &\quad + \lambda^2 |Q(x)|^2 < E^2 - 2\lambda\varepsilon + \lambda^2 M^2.
 \end{aligned}$$

若取 $\lambda < M^{-2}\varepsilon$, 则 $\lambda^2 M^2 < \lambda\varepsilon$, 从而得

$$|f(x) - P_1(x)|^2 < E^2 - \lambda\varepsilon \quad (x \in G). \quad (4)$$

为了对于 $x \notin G$ 估计 $f(x) - P_1(x)$, 在此注意 G 的余集是闭集 $F \subset A$, 并且在 F 上有 $|f(x) - P(x)| < E$. 因此, 存在某个 $\delta > 0$, 使得 $|f(x) - P(x)| < E - \delta$ ($x \in F$). 若取 λ 充分小, 使 $\lambda < (2M)^{-1}\delta$, 则

$$\begin{aligned}
 |f(x) - P_1(x)| &\leq |f(x) - P(x)| + \lambda |Q(x)| \\
 &\leq E - \delta + \frac{1}{2} \delta = E - \frac{1}{2} \delta \quad (x \in F). \quad (5)
 \end{aligned}$$

由(4)和(5), 可以看到, 对于所有充分小的正数 λ , P_1 比 P 更加接近于 f . 因此, 条件(2)是必要的.

下面证明(2)也是充分的. 假设(2)对于每个 Q 成立, 那么对于任意的多项式 P_1 , 可以看到, 对于 $Q = P - P_1$ 存在点 $x_0 \in A_0$, 适合

$$\operatorname{Re}\{[f(x_0) - P(x_0)]\overline{Q(x_0)}\} \geq 0.$$

于是, 由(1)并注意到 $x \in A_0$, 有

$$\begin{aligned}
 |f(x_0) - P_1(x_0)|^2 &= |f(x_0) - P(x_0)|^2 \\
 &\quad + 2\operatorname{Re}\{[f(x_0) - P(x_0)]\overline{Q(x_0)}\} + |Q(x_0)|^2 \\
 &\geq |f(x_0) - P(x_0)|^2 = \|f - P\|^2,
 \end{aligned}$$

因此用 P_1 逼近, 不会有比 $\|f - P\|$ 更小的误差, 从而 P 必定是最佳逼近多项式. 证毕. 1

3. 凸性的应用

凸性的讨论在逼近论中是有用的. 本节中将给出有限维

空间中凸集的性质在这一方面的应用.

实 n -维欧氏空间 R_n 的子集 B 是凸的, 是指: 对于每两个点 $x, y \in B$, 它包含线段 xy , 即包含所有点 $\alpha x + \beta y$, 其中 $\alpha, \beta \geq 0$ 且 $\alpha + \beta = 1$.

下面列举几个熟知的凸集性质(证明见 [22]). 若 B 是凸的, $x^{(i)} \in B, p_i \geq 0 (i=1, \dots, r)$ 并且 $\sum p_i = 1$, 则 $\sum p_i x^{(i)} \in B$. 任意凸集族的交是凸的; 凸集的闭包是凸的. 对于每个集 $B \subset R_n$, 存在着包含 B 的最小凸集 B_0 . 此集 B_0 称为 B 的凸包.

R_n 中的超平面是满足 $\sum_{k=1}^n a_k x_k = a_0$ 的点 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 的集, 其中 $a_k (k=1, \dots, n)$ 是实的且不全为零. 在同样的假设下, 使 $\sum_{k=1}^n a_k x_k \leq a_0$ 的点的集 H 称为闭半空间. 紧致凸集 B 是所有包含 B 的闭半空间 H 的交:

$$B = \bigcap_{H \supset B} H. \quad (1)$$

下述简单的引理是经常用到的.

引理 2 集 $B \subset R_n$ 的凸包由所有形如

$$x = \sum_{i=1}^r p_i x^{(i)}, \quad x^{(i)} \in B, \quad p_i > 0 (i=1, \dots, r), \quad \sum_{i=1}^r p_i = 1 \quad (2)$$

的点 x 组成, 其中 $r \leq n+1$.

证明 设 B' 表示对于某个 r 可表为如形式(2)的所有点 x 的集, 这里允许 $r > n+1$. 显然, $B' \subset B_0$. 另一方面, B' 是凸的. 事实上, 若 x 和 y 有形式(2) (r 可以不相同), 则 $\alpha x + \beta y, \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$ 也有这样的形式. 又因 $B' \supset B$, 故 $B' = B_0$.

现在假设 $x \in B_0$ 已给定, 又设 r 表示 (2) 式中最小的整

数. 下面证明 $r \leq n+1$.

假如 $r > n+1$, 那么 $r-1 > n$ 个向量 $x^{(2)} - x^{(1)}, \dots, x^{(r)} - x^{(1)}$ 是线性相关的, 从而有关系式

$$\sum_{i=1}^{r-1} \beta_i [x^{(i+1)} - x^{(1)}] = \sum_{i=1}^r \alpha_i x^{(i)} = 0, \quad \sum \alpha_i = 0.$$

这里 β_i 和 α_i 都不全为零. 于是把它与 (2) 式相加, 得

$$x = \sum_{i=1}^r (p_i + \lambda \alpha_i) x^{(i)}.$$

现在希望选择 λ , 使得对于一切的 i , 有 $q_i = p_i + \lambda \alpha_i \geq 0$, 并且至少有一个 i 使 $q_i = 0$. 存在着 α_i 满足 $\alpha_i < 0$. 不难看到, $\lambda = \min \{p_i / |\alpha_i|; \alpha_i < 0\} > 0$ 具备所需要的性质. 因为 $\sum q_i = 1$, 故可获得少于 r 个项的形如 (2) 的表示式. 这是矛盾的. 于是引理证毕. $\square$

下面指出一些有用的推理. 设 B 是紧致的, 则可仿效引理 1 的论证, 利用引理 2 和 B 的紧致性, 我们证明: B_0 的每个点列包含着收敛于 B_0 中点的子序列. 因此, 紧致集的凸包是紧致的. 利用这一事实与 (1) 式可以看到, 若 B 是紧致的, 则

$$B_0 = \bigcap_{H \supset B_0} H = \bigcap_{H \supset B} H. \quad (3)$$

所有上述讨论适用于与 $2n$ -维实欧氏空间同构的、由具有复坐标 $z_k = x_k + iy_k$ 的点 $z = (z_1, \dots, z_n)$ 所组成的 n -维复空间 B_n 中凸性的问题. 在此情形, 引理 2 中对 r 的限制成为 $r \leq 2n+1$. 定义半空间的不等式成为

$$\sum_{k=1}^n (a_k x_k + b_k y_k) \leq a_0.$$

综合复的和实的情形, 可把它们写成形式

$$\operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n \bar{c}_k z_k \right\} \leq a_0, \quad (4)$$

其中 c_k 是任意不全为零的复(实)数, 而 a_0 是实的.

在以下讨论中, $C[A]$ 表示在紧致 Hausdorff 空间 A 上的复的或实的连续函数的空间, $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ 是 $C[A]$ 中 n 个元素的集. 对于给定的 $f \in C[A]$ 以及 $P = \sum a_k \phi_k$, 我们希望判断 P 是否为 f 的最佳逼近多项式. 如前一样, 用 A_0 表示所有具有性质

$$|f(x) - P(x)| = \|f - P\|$$

的 $x \in A$ 的集. 现在先给出定理 2 中条件 2(2) 的新形式:

$$\left. \begin{aligned} &R_n \text{ 中的原点属于由点} \\ &z = ((f(x) - P(x)) \overline{\phi_1(x)}, \dots, (f(x) \\ &\quad - P(x)) \overline{\phi_n(x)}), \quad x \in A_0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

组成的集 B 的凸包.

集 A_0 是紧致的, 并且 $x \rightarrow z$ 是 A 到 R_n 中的连续映照. 因此, $B(A_0 \text{ 在 } R_n \text{ 中的像})$ 也是紧致的, 现在由 (3) 知道: 点 0 属于 B . 当且仅当它属于每个包含 B 中所有点 z 的闭半空间 H . 若 H 由 (4) 给出, 则 $0 \in H$ 蕴含 $a_0 \geq 0$. 于是, 条件 (5) 等价于命题: 若关于某个 c_i 和 a_0 , 对一切 $x \in A_0$, 有

$$\operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^n \bar{c}_i (f(x) - P(x)) \overline{\phi_i(x)} \right\} \leq a_0,$$

则 $a_0 \geq 0$. 置 $Q = \sum c_i \phi_i$, 可以看到, 这等价于 2(2).

把条件 (5) 和引理 2 结合起来, 可得到:

定理 3 多项式 P 是 $f \in C[A]$ 的最佳逼近多项式, 当且仅当存在 r 个点 $x_1, \dots, x_r \in A_0$ 和 r 个数 $p_1 > 0, \dots, p_r > 0$, $\sum p_k = 1$ (对于复情形 $r \leq 2n+1$; 对于实情形 $r \leq n+1$), 使得

$$\sum_{k=1}^r p_k [f(x_k) - P(x_k)] \overline{\phi_i(x_k)} = 0 \quad (i=1, \dots, n), \quad (6)$$

或是等价地, 对于每个多项式 Q , 有

$$\sum_{k=1}^r p_k [f(x_k) - P(x_k)] \overline{Q(x_k)} = 0. \quad (7)$$

作为推论,有

定理 4 若 P 是在 A 上关于 f 的最佳逼近多项式, 则 P 也是在由 r ($r \leq 2n+1$ 或 $r \leq n+1$) 个点组成的 A 的某有限子集上的关于 f 的最佳逼近多项式.

设 $S = \{x_1, \dots, x_r\}$, 其中 x_k ($k=1, \dots, r$) 是 A 中相异的点; μ 是 A 上的函数. 假如在 $A \setminus S$ 上 $\mu(x) = 0$ 而 $\mu(x_k) \neq 0$ ($k=1, \dots, r$), 则说 μ 具有有限支柱 $S = \{x_1, \dots, x_r\}$. 符号差 σ 是有限支柱 S 的函数, 它在点 $x_k \in S$ 处的值 $\sigma(x_k)$ 是 (复或实的) 符号即绝对值为 1 的数. 假如存在以 $S = \{x_1, \dots, x_r\}$ 为支柱的函数 μ , 使得 $\text{sign } \mu(x_k) = \sigma(x_k)$ ($k=1, \dots, r$), 并且对于一切多项式 Q , 有

$$\sum_{k=1}^r \mu(x_k) \overline{Q(x_k)} = 0, \quad (8)$$

则称以 S 为支柱的符号差 σ 为 (关于系 Φ 的) 极符号差.

下述定理表明极符号差的概念是有用的.

定理 5 (Rivlin 和 Shapiro[86]) 不恒等于函数 $f \in O[A]$ 的多项式 P 是 f 的最佳逼近多项式, 当且仅当存在着以 $S = \{x_1, \dots, x_r\} \subset A_0$ 为支柱的极符号差 σ , 使得 $r \leq 2n+1$ (或 $r \leq n+1$), 且

$$\text{sign}[f(x_k) - P(x_k)] = \sigma(x_k) \quad (k=1, \dots, r). \quad (9)$$

证明 必要性 对于最佳逼近多项式 P 有 (7). 在此定义 $\sigma(x_k) = \text{sign}[f(x_k) - P(x_k)]$, $\mu(x_k) = p_k[f(x_k) - P(x_k)]$ ($k=1, \dots, r$), 并且对于 $x \neq x_k$ ($k=1, \dots, r$), 设 $\mu(x) = \sigma(x) = 0$. 则 (7) 式表明 σ 是极符号差, 并且 (9) 式成立.

充分性 假设定理条件是满足的, 且设 μ 是具有满足 (8) 的支柱 S 的函数. 那么, 对于每个多项式 P_1 , 有

$$\sum [P(x_k) - P_1(x_k)] \mu(x_k) = 0,$$

从而

$$\begin{aligned} \|f - P_1\| \sum_{k=1}^r |\mu(x_k)| &\geq |\sum [f(x_k) - P_1(x_k)] \mu(x_k)| \\ &= |\sum [f(x_k) - P(x_k)] \mu(x_k)| \\ &= \sum |f(x_k) - P(x_k)| |\mu(x_k)| \\ &= \|f - P\| \sum_{k=1}^r |\mu(x_k)|. \end{aligned} \quad (10)$$

因此,

$$\|f - P_1\| \geq \|f - P\|.$$

证毕.]

算式(10)在更一般的情形中是有用的. 假设 σ 是以 $S = \{x_1, \dots, x_r\}$ 为支柱的极符号差, 并且存在多项式 P 和 $\delta \geq 0$, 使得

$$\left. \begin{aligned} \text{sign}[f(x_k) - P(x_k)] &= \sigma(x_k), \\ |f(x_k) - P(x_k)| &> \delta \quad (k=1, \dots, r). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

那么

$$E_n(f) \geq \delta. \quad (12)$$

事实上, 这时对于每个多项式 P_1 有 $\|f - P_1\| \geq \delta$.

4. Chebyshev 组

函数组 $1, x, x^2, \dots, x^n$ 有一个重要的性质: 不恒等于零的多项式 $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ 在区间 $[a, b]$ 上至多有 n 个零点. 函数组 $1, z, z^2, \dots, z^n$ 在复平面的每个子集上也有同样的性质. 还有, 三角函数组 $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx$ 也有这种性质. 不恒等于零的实或复系数的三角多项式

$$T(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

在圆周 K 上不能有多于 $2n$ 个相异的零点. 欲证明这点, 可

考虑圆周 $|z|=1$ 的点与 $x \bmod 2\pi$ 的值之间由 $e^{ix}=z$ 给出的一一对应. 利用 Euler 公式

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}); \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}),$$

可以得到

$$T(x)e^{inx} = P(z). \quad (1)$$

其中 P 是 $2n$ 阶多项式. 若 T 有多于 $2n$ 个按 $\bmod 2\pi$ 相异的零点, 则 P 在 $|z|=1$ 上有大于 $2n$ 个相异的零点; 因此, P 恒等于零, 并且由 (1) 可看到, T 也恒等于零.

以下将采用这一定义: 紧致 Hausdorff 空间 A 上连续的复或实函数 $\phi_1, \dots, \phi_n$ 的集称为 Chebyshev 组, 倘若满足下列条件:

(a) A 至少含有 n 个点;

(b) 系数 a_i 不全为零的每个多项式 $P = a_1\phi_1 + \dots + a_n\phi_n$ 在 A 上至多有 $n-1$ 个相异的零点.

特别, 由此定义可推知 Chebyshev 组的函数是线性无关的. 本节开始时所述三个组是 Chebyshev 组的重要例子. 在此留给读者证明: $1, \cos x, \dots, \cos nx$ 和 $\sin x, \dots, \sin nx$ 是 $[0, \pi]$ 上的两个 Chebyshev 组^[1].

定义中的条件 (b) 也可表述成以下形式:

1. 若 $x_1, \dots, x_n$ 是 A 中相异的点, 则包含 n 个未知数 $a_1, \dots, a_n$ 的 n 个方程的组

$$a_1\phi_1(x_k) + a_2\phi_2(x_k) + \dots + a_n\phi_n(x_k) = 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad (2)$$

只有明显解 $a_1 = \dots = a_n = 0$.

[1] 对于 $\sin x, \dots, \sin nx$ 应把 $[0, \pi]$ 改为 $(0, \pi)$ 的任一闭子区间——译者注.

从关于线性方程组的熟知结果可知, 它等价于下述性质 2 或 3 中的任意一个.

2. 若 $x_1, \dots, x_n$ 是 A 中 n 个相异的点, 则行列式

$$D(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \phi_1(x_n) & \dots & \phi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3)$$

3. 若 $x_1, \dots, x_n$ 是 A 中相异的点, 而 $c_1, \dots, c_n$ 是任意的数, 则方程组

$$a_1\phi_1(x_k) + \dots + a_n\phi_n(x_k) = c_k \quad (k=1, \dots, n) \quad (4)$$

关于 $a_1, \dots, a_n$ 有唯一的解.

倘若设 $P = a_1\phi_1 + \dots + a_n\phi_n$, 则条件 (4) 导出 $P(x_k) = c_k$ ($k=1, \dots, n$), 则称此 P 为在点 x_k 处取值 c_k 的插值多项式. 这样, 命题 3 可陈述为: 插值多项式 P 存在且唯一. 假如所给点 x_k 和值 c_k 的数目少于 n , 那么插值多项式仍存在, 但不唯一了.

本节余下的部分将考察实 Chebyshev 组. 假如紧致空间 A 是给定的, 那么是否存在关于 A 的 Chebyshev 组呢? 一般说, 回答是否定的. 可以证明, 空间 A 没有具 $n \geq 2$ 的实 Chebyshev 组, 倘若 A 包含三条从公共点 a 分出的不相交的弧. 例如在二维正方形上就不存在 Chebyshev 组.

事实上, 假设对于某 $n \geq 2$, 有 Chebyshev 组存在. 于是选取点 $x_1, \dots, x_n$ (如图 1 所示). 设

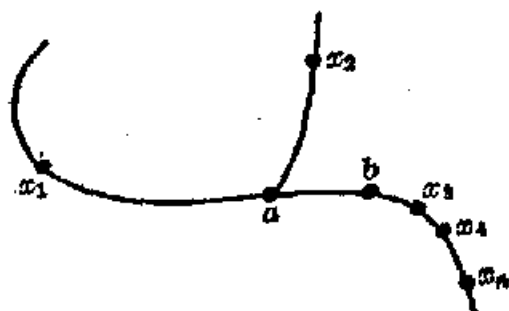


图 1

$$g(x, y) = D(x, y, x_3, \dots, x_n),$$

由命题 2, 只要 $x, y, x_3, \dots, x_n$ 各不相同, 就有 $g(x, y) \neq 0$. 于是按下述方法在 A 中连续地变动点 x, y , 首先, 让 x 由 x_1 移动到 b ; 然后将 y 从 x_2 通过 a 移动到 x_1 ; 最后, 把 x 由 b 通过 a 移动到 x_2 . 函数 g 将连续地变化且保持异于零. 因此, $g(x_1, x_2)$ 和 $g(x_2, x_1)$ 有相同的符号. 但这是不可能的, 因为 $g(x_2, x_1) = -g(x_1, x_2)$.

倘若 $A = [a, b]$ 或 $A = K$, 则对于实 Chebyshev 组 $\phi_1, \dots, \phi_n$ 有下述命题成立:

4. 若 $x_1, \dots, x_{n-1}$ 是 A 中 $n-1$ 个相异的点, 则存在多项式 $D(x)$ 在诸点 x_k 处恰好等于零且在这些点变号 (除非点 x_k 与 a 或 b 重合).

若 ϕ_i 是 $[a, b]$ 上的幂函数组 $1, x, \dots, x^{n-1}$, 则可简单地取

$$D(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

在一般情形下, 需对此式作改变.

现在取 (见 (3))

$$D(x) = D(x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

显然, 对于 $x = x_1, \dots, x_{n-1}$, $D(x)$ 为零. 若 x 异于这些点中的每一个, 则根据命题 2, $D(x) \neq 0$. 因此在任意两点 x_k 之间的每个区间上, $D(x)$ 保持固定号. 现在来证明, 例如, D 在 x_1 处变号 (若 x_1 异于 a, b). 取 $h > 0$ 充分小, 使得区间 $[x_1 - h, x_1 + h]$ 含于 A 中并且不包含点 $x_2, \dots, x_{n-1}$ (以及点 a, b , 倘若 $A = [a, b]$). 考察 t 的函数

$$g(t) = D(x_1 - h + t, x_1 + t, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

它是连续的, 并且当 $0 \leq t \leq h$ 时异于零. 显然, 在此区间中 $g(t)$ 保持固定号. 但是

$$g(0) = D(x_1 - h),$$

$$g(h) = D(x_1, x_1+h, x_2, \dots, x_{n-1}) = -D(x_1+h).$$

这表明, $D(x_1-h)$ 和 $D(x_1+h)$ 是异号的. 故 D 在 x_1 处变号.

性质 4 在 Chebyshev 定理 (第 6 节定理 9) 的证明中是常用到的. 作为命题 4 的推论, 需要指出, K 上的每个实 Chebyshev 组是由奇数个函数组成的. 事实上, 连续函数 $D(x)$ 在 K 上只能变号偶数次.

5. 最佳逼近多项式的唯一性

在此将证明, 对于 Chebyshev 组, 每个连续函数仅有一个最佳逼近多项式.

首先需要证明下述的

引理 3 设 A 是紧致 Hausdorff 空间, 它至少包含 $n+1$ 个点, $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ 是 A 上复或实函数的 Chebyshev 组; 又设 P 是连续函数 f 的最佳逼近多项式. 那么, 由所有适合

$$|f(x) - P(x)| = \|f - P\| = E$$

的点 $x \in A$ 组成的集 A_0 至少含有 $n+1$ 个点.

证明 设 $A_0 = \{x_1, \dots, x_s\}$, 其中 $s \leq n$. 因为存在着点 w 使 $|f(w) - P(w)| < E$, 故必有 $E > 0$. 由第 4 节命题 3 知道, 存在着多项式 Q , 使得

$$Q(x_k) = -[f(x_k) - P(x_k)] \quad (k=1, \dots, s).$$

从而

$$\begin{aligned} & \max_{w \in A_0} \operatorname{Re}\{[f(w) - P(w)]\bar{Q}(w)\} \\ &= \max_{k \leq s} \{-|f(x_k) - P(x_k)|^2\} = -E^2 < 0, \end{aligned}$$

这与定理 2 相矛盾. 于是引理得证. $\square$

定理 6 对于 Chebyshev 组, 每个连续函数仅有唯一的

最佳逼近多项式.

证明 若 A 恰有 n 个点, 则由第 4 节命题 3 知, 每个在 A 上的函数等于多项式 P , 且此多项式是唯一的. 因此, 可以假设 A 至少含有 $n+1$ 个点, 于是引理 3 可以应用.

假设对于连续函数 $f(x)$ 存在两个最佳逼近多项式 $P(x)$ 和 $P_1(x)$, 有:

$$\|f - P\| = \|f - P_1\| = E,$$

设

$$Q(x) = \frac{1}{2}(P(x) + P_1(x)),$$

那么

$$\begin{aligned} \|f - Q\| &= \left\| \frac{1}{2}(f - P) + \frac{1}{2}(f - P_1) \right\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|f - P\| + \frac{1}{2} \|f - P_1\| = E. \end{aligned}$$

另一方面, $\|f - Q\| \geq E$, 故 Q 也是最佳逼近多项式. 根据引理 3, 至少有 $n+1$ 个点 x 适合

$$|f(x) - Q(x)| = E.$$

在每个这样的点 x 处, 对于复数

$$\alpha = f(x) - P(x) \text{ 和 } \alpha_1 = f(x) - P_1(x),$$

有 $|\alpha + \alpha_1| = 2E$, $|\alpha| \leq E$, $|\alpha_1| \leq E$. 但这仅当 $\alpha = \alpha_1$ 时成立. 于是, 至少在 A 的 $n+1$ 个点处有 $P(x) = P_1(x)$. 因为 Φ 是 Chebyshev 组, 故多项式 $P(x)$ 与 $P_1(x)$ 是恒等的.

证毕. **1**

值得指出, 定理 6 的逆也是成立的.

定理 7 (A. Haar[55]) 设 $\phi_1, \dots, \phi_n$ 是定义在至少含有 n 个点的紧致集 A 上的连续函数. 假如每个连续函数仅有一个最佳逼近多项式, 那么 $\phi_1, \dots, \phi_n$ 是 Chebyshev 组.

证明 显然, 函数 $\phi_1, \dots, \phi_n$ 是线性无关的. 我们假设

该组不是 Chebyshev 组, 并且构造具有若干最佳逼近多项式的函数 f_1 .

按假设, 存在 A 的 n 个相异点 $x_1, \dots, x_n$ 使得线性方程组

$$a_1\phi_1(x_k) + \dots + a_n\phi_n(x_k) = 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad (1)$$

有非零解 $a_1, \dots, a_n$. 取一组这样的解, 且设

$$P_1(x) = a_1\phi_1(x) + \dots + a_n\phi_n(x).$$

转置组

$$c_1\phi_1(x_i) + \dots + c_n\phi_n(x_i) = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (2)$$

也有非零解 $c_1, \dots, c_n$. 设 $c_1, \dots, c_n$ 是这样的一组解: c_k 中可能有若干为零, 但使 $c_k \neq 0$ 的 k 的集 N 是非空的.

根据 Tietz 的开拓定理, 存在着连续函数 f_0 具有性质:

$$(a) \quad f_0(x_k) = \bar{c}_k / |c_k|, \quad k \in N;$$

$$(b) \quad |f_0(x)| \leq 1 \text{ 对于 } x \in A.$$

引理 4 对于每个满足条件 (a) 和 (b) 的连续函数 f_0 , 有 $E_n(f_0) = 1$.

由 (b), 多项式 $P=0$ 逼近 f_0 的误差不超过 1. 因此, $E_n(f_0) \leq 1$. 可以证明, $E_n(f_0) < 1$ 时会导出矛盾. 假设存在多项式 $P = \sum_{i=1}^n b_i\phi_i$ 使得对于一切 $x \in A$ 有 $|f_0(x) - P(x)| < 1$. 特别, 根据 2(1), 有

$$\begin{aligned} |f_0(x_k) - P(x_k)|^2 &= |f_0(x_k)|^2 \\ &\quad - 2\operatorname{Re}\{P(x_k)\overline{f_0(x_k)}\} + |P(x_k)|^2 < 1. \end{aligned}$$

根据 (a), 对于 $k \in N$, 有 $|f_0(x_k)| = 1$. 因此

$$\operatorname{Re}\{P(x_k)\overline{f_0(x_k)}\} > 0, \quad k \in N. \quad (3)$$

换句话说, 对于 $k \in N$ 有 $\operatorname{Re}\{c_k P(x_k)\} > 0$. 另一方面, 对于一切其余的 k 值, 因 $c_k = 0$ 而其值为零, 故

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{k=1}^n c_k P(x_k)\right\} > 0. \quad (4)$$

但这与由(2)导出的方程

$$\sum_{k=1}^n c_k P(x_k) = \sum_{k=1}^n c_k \sum_{i=1}^n b_i \phi_i(x_k) = \sum_{i=1}^n b_i \sum_{k=1}^n c_k \phi_i(x_k) = 0$$

相矛盾.

引理证毕. **■**

为了完成定理的证明, 设

$$f_1(x) = (1 - M^{-1}|P_1(x)|)f_0(x).$$

其中 M 是 $|P_1(x)|$ 在 A 上的最大值 (因为函数 ϕ_i 线性无关, 故有 $M > 0$). 根据 (1), $P_1(x_k) = 0$ ($k=1, \dots, n$), 并且显然地, $f_1(x)$ 满足条件 (a) 和 (b). 于是, 根据引理 4, $E_n(f_1) = 1$. 最后, 对于一切充分小的 $\lambda > 0$, $\lambda P_1(x)$ 是函数 $f_1(x)$ 的最佳逼近多项式. 事实上, 若 $\lambda \leq M^{-1}$, 则

$$\begin{aligned} |f_1(x) - \lambda P_1(x)| &\leq |f_1(x)| + \lambda |P_1(x)| \\ &\leq 1 - M^{-1}|P_1(x)| + \lambda |P_1(x)| \leq 1. \end{aligned}$$

定理证毕. **■**

6. Chebyshev 定理

对于区间或圆周上的 Chebyshev 组 $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, 可以给出比定理 2 和 5 所述的更为简明的最佳逼近多项式的特征. 考虑实的情形: 首先来刻画极符号差 (见第 3 节) 的特征, 有

1. 紧致 Hausdorff 拓扑空间 A 上 Chebyshev 组的每个极符号差有包含不少于 $n+1$ 个点的支柱 $S = \{x_1, \dots, x_r\}$.

因为, 若 $r \leq n$, 则 (见第 4 节) 存在着多项式 Q , 使 $Q(x_1) = 1$, $Q(x_i) = 0$ ($i > 1$). 于是 3(8) 蕴涵 $\mu(x_1) = 0$, 从而极符号差不存在.

2. 对于每 $n+1$ 个相异点 $x_1, \dots, x_{n+1} \in A$ 的集存在着唯一的(精确到因子 ± 1)极符号差.

对于一切多项式 Q , 考察方程

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i Q(x_i) = 0, \quad (1)$$

或(同样地)组

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i \phi_k(x_i) = 0 \quad (k=1, \dots, n). \quad (2)$$

因为矩阵 $\|\phi_k(x_i)\|$ 的秩是 n , 故解 $(a_1, \dots, a_{n+1})$ 的集是 1-维空间. 此外, 对于非零解, 没有一个 a_i 等于零. 对于某个这样的解, 取 $\mu(x_i) = a_i$ ($i=1, \dots, n+1$), 在其它地方, $\mu(x) = 0$. 则 μ 满足 3(8), 并且函数 $\sigma(x) = \text{sign } \mu(x)$ 是取值 $\sigma(x_i) = \pm 1$ ($i=1, \dots, n+1$) 的极符号差. 任意其它满足 3(8) 的函数 μ' 是 μ 的倍数, 且相应的 σ' 满足 $\sigma' = \pm \sigma$.

设 $S = \{x_1, \dots, x_{n+1}\} \subset A$, $A = [a, b]$ 或 $A = K$. 且设 x_i, x_j 是 S 中的两个点, 假如在 A 中存在着包含 x_i, x_j 而不包含 S 中其它点的区间, 则称 x_i, x_j 为相邻的. 假如以 S 为支柱的符号差 σ 在相邻的点上符号相反, 则称 σ 为 Chebyshev 交错. 例如, 若 $A = [a, b]$ 且

$$a \leq x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b,$$

则以 S 为支柱的函数 σ 是一个 Chebyshev 交错, 当且仅当 $\sigma(x_i) = (-1)^i$ 或 $\sigma(x_i) = (-1)^{i+1}$ ($i=1, \dots, n+1$).

定理 8 对于 $A = [a, b]$ 或 $A = K$ 上的实 Chebyshev 组 Φ , 以 $n+1$ 个点为支柱的极符号差与 Chebyshev 交错全同.

证明 首先证明组 (2) 的每组非零解 $(a_1, \dots, a_{n+1})$ 的符号为 Chebyshev 交错. 先设 $n=1$, 则 ϕ_1 在 A 上是保号的, 并且 (2) 由一个方程 $a_1 \phi_1(x_1) + a_2 \phi_1(x_2) = 0$ 所组成. 在

此情形下, $\text{sign } a_1 = -\text{sign } a_2$.

其次, 设 $n \geq 2$, 则至少存在三个点 x_i . 假设在两个相邻的点 x_i 处, a_i 有相同的符号, 设其为正号. 必要的话, 标出 x_i , 便出现这样的情形: 点 x_{q-1} 和 x_q 以及 x_q 和 x_{q+1} 彼此相邻, 并且 $a_{q-1} > 0$, $a_q > 0$.

我们可选取 $a_{q-1} > 0$, $a_{q+1} > 0$, 使得

$$a_{q-1}a_{q-1} + a_{q+1}a_{q+1} > 0.$$

根据 4(3), 存在着取值 $Q(x_{q-1}) = a_{q-1}$, $Q(x_{q+1}) = a_{q+1}$, 对于 $i \neq q-1, q, q+1$, 有 $Q(x_i) = 0$ 的多项式 Q . 由(1),

$$a_{q-1}a_{q-1} + a_q Q(x_q) + a_{q+1}a_{q+1} = 0.$$

于是, $a_q Q(x_q) < 0$ 并且 $Q(x_q) < 0$. 这样, 多项式 Q 在 x_{q-1} 和 x_q 之间以及 x_q 和 x_{q+1} 之间有零点. 总计, 至少有 n 个零点. 这是矛盾的. 证毕. $\square$

综合定理 5 和 8 即得:

定理 9 (Chebyshev) 设 P 是关于 $A = [a, b]$ 或 $A = K$ 上的 Chebyshev 组的多项式, 它不恒等于函数 $f \in C[A]$. 那么, P 是 f 的最佳逼近多项式, 当且仅当存在着 A 的 $n+1$ 个相异的点, 使得在这些点上 $|f(x) - P(x)|$ 达到它的最大值, 并且 $f(x) - P(x)$ 的符号构成 Chebyshev 交错.

在证明了定理 5 以后, 根据第 3 节的注释便可导出

定理 10 (de la Vallée-Poussin) 在定理 9 的假设下, 设 $|f(x_i) - P(x_i)| \geq \delta$ ($i = 1, \dots, n+1$), 又 $f(x_i) - P(x_i)$ 的符号构成 Chebyshev 交错, 那么

$$E_n(f) \geq \delta. \quad (3)$$

7. Chebyshev 多项式

能够对 f 的逼近阶 $E_n(f)$ 或最佳逼近多项式给出明显

表达式的情形是极个别的. 然而对此人们却特别感兴趣. 在这里以及第 8 节中将考虑两个例子.

先来讨论在 $[-1, +1]$ 上 x^n 借助 $n-1$ 阶多项式逼近的问题. 我们希望能找到实系数多项式 $a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ 使

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_0|$$

取到最小可能的值. 显然, 这等价于下述问题: 在所有首项系数为 1 的 n 阶多项式 $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ 中找出与零偏差最小的多项式, 也即使 P 有最小可能的范数.

因为 $1, x, \dots, x^{n-1}$ 是 $[-1, +1]$ 上的 Chebyshev 组, 故定理 9 可应用, 且由此可知, 多项式 P_n 是与零偏差最小的多项式, 其特征为: (a) 存在着 $n+1$ 个 $[-1, +1]$ 上的点使 P_n 在其上交错变号地取值 $\pm \|P_n\|$; (b) P_n 的首项系数为 1.

找出满足 (a) 的 P_n 是容易的. 对于每个 x ($-1 \leq x \leq 1$), 存在着唯一的 t ($0 \leq t \leq \pi$), 使得 $x = \cos t$. 因此, $C_n(x) = \cos nt$ ($n=0, 1, \dots$) 是 x 的函数. 可以看到, $C_0(x) = 1$, $C_1(x) = x$, C_n 满足递推关系

$$C_n(x) = 2xC_{n-1}(x) - C_{n-2}(x) \quad (n=2, 3, \dots). \quad (1)$$

这可以从 $\cos nt + \cos(n-2)t = 2\cos t \cos(n-1)t$ 推出. 容易算出:

$$C_2(x) = 2x^2 - 1, \quad C_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$C_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \dots$$

从而可推知 C_n ($n=0, 1, \dots$) 是 n 阶代数多项式. C_n ($n=1, 2, \dots$) 的首项系数是 2^{n-1} . 这可以从 (1) 归纳地推得:

定理 11 在 $[-1, +1]$ 上与零偏差最小且首项系数为 1 的 n 阶多项式是 $2^{-n+1}C_n(x)$. 在 $[-1, +1]$ 上 x^n 借助 $n-1$ 阶多项式的逼近阶是 2^{-n+1} .

证明 由于有 $\|O_n\| = \max_t |\cos nt| = 1$. 又, 对于 $t = k\pi/n$ ($k=0, \dots, n$), 有 $\cos nt = (-1)^k$; 因此, $O_n(x_k) = (-1)^k$, 其中 $x_k = \cos(k\pi/n)$ ($k=0, \dots, n$). 于是 O_n 满足 (a).

证毕. $\blacksquare$

多项式 O_n 称为 Chebyshev 多项式. 关于它们, 下面指出几个值得注意的性质:

1. 关于 $O_n(x)$ 用 x 表示的显式是

$$O_n(x) = \frac{1}{2} \{ (x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \}. \quad (2)$$

将两个公式

$$\cos nt \pm i \sin nt = (\cos t \pm i \sin t)^n$$

相加, 得到

$$\cos nt = \frac{1}{2} \{ (\cos t + i \sin t)^n + (\cos t - i \sin t)^n \}.$$

由此即得 (2). 只要置 $\cos t = x$, 则 $i \sin t$ 便是两值 $\pm \sqrt{x^2 - 1}$ 中的一个.

2. $O_n(x)$ ($n=0, 1, \dots$) 组成 $[-1, +1]$ 上关于重函数 $1/\sqrt{1-x^2}$ 的正交多项式系:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} O_n(x) O_m(x) dx = 0 \quad (n \neq m). \quad (3)$$

这可以从 $\int_0^\pi \cos nt \cos mt dt = 0$ ($n \neq m$) 推出.

3. O_n 的零点容易求出. 因为当 $t = (2k-1)\pi/(2n)$ 时, $\cos nt = 0$, 故

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \quad (k=1, \dots, n) \quad (4)$$

是 O_n 的 n 个零点. 于是, 零点都是实的、相异的, 并且位于 $[-1, +1]$ 中. 它们关于 0 点是对称的.

对于大的 n , (4) 中的点在点 $-1, +1$ 附近较区间 $[-1, +1]$ 的中心更为密集. 它们常常成功地被用作 $[-1, +1]$ 上对于连续函数 f 的内插基点. 其原因大致如下: 需要利用 $f(x)$ 在点 $-1, +1$ 附近的值比其它地方更多, 因为在这些点的近傍 $f(x)$ 不十分确定, 对于 $x < -1$ 或 $x > 1$, $f(x)$ 都无定义.

8. 某些复函数的逼近

下面介绍少数最佳逼近的代数多项式能明确求出的情形.

1. 设在圆 $|z| \leq 1$ 上, $f(z) = z^{n+1}$. 则 f 的最佳逼近 n 阶代数多项式是零, 并且因此 $E_n(f) = 1$.

欲证明这点, 只需指出, 对于 n 阶多项式 P_n , 不可能在 $|z| \leq 1$ 上恒有 $|f(z) - P_n(z)| < 1$ 成立. 事实上, 对于 $z = e^{it}$, 此不等式蕴涵 $|\operatorname{Re} f(e^{it}) - T_n(t)| < 1$, 其中 $T_n(t) = \operatorname{Re} P_n(e^{it})$ 是 n 阶三角多项式. 因为当 $z = e^{it_k}$, $t_k = k\pi/(n+1)$ 时, $f(z) = (-1)^k$ ($k=0, \dots, 2n+1$). 故多项式 T_n 对于 $0 \leq t < 2\pi$ 至少有 $2n+2$ 次变号, 这是不可能的.

2. 考察在圆 $A: |z| \leq 1$ 上的函数 $f(z) = (z - \alpha)^{-1}$, α 是复常数, 且 $|\alpha| > 1$. 设

$$P_n(z) = \frac{1}{z - \alpha} - Cz^n \frac{\bar{\alpha}z - 1}{z - \alpha} = \frac{1 - Cz^n(\bar{\alpha}z - 1)}{z - \alpha}. \quad (1)$$

显然, P_n 是 n 阶多项式当且仅当 $1 - C\alpha^n(\bar{\alpha}\alpha - 1) = 0$. 于是, 置

$$C = \frac{\alpha^{-n}}{|\alpha|^2 - 1}, \quad (2)$$

则有

定理 12 (Al'per [31]) 设 P_n 和 O 由 (1) 和 (2) 定义. 那么 P_n 是 f 的最佳逼近多项式, 且

$$E_n(f) = |O|. \quad (3)$$

证明 对于 $|z|=1$, 有

$$\left| \frac{\bar{\alpha}z-1}{z-\alpha} \right| = \left| \frac{(\alpha/z)-1}{z-\alpha} \right| = 1,$$

又因为 $(\bar{\alpha}z-1)/(z-\alpha)$ 是 $|z| \leq 1$ 中的解析函数, 故当 $|z| < 1$ 时, 此表达式不超过 1. 设 $F = f - P_n$, 且设 A_0 是 A 的子集, 在其上函数 $|F(z)|$ 达到它的最大值 $\|F\|$. 可以看到 A_0 恰恰就是圆周 $|z|=1$, 并且 $\|F\| = |O|$.

余下还要证明, 不存在 n 阶多项式 Q_n , 使得

$$|F(z) - Q_n(z)| < |O|, \quad |z| \leq 1. \quad (4)$$

为此目的, 现在对于 $z = e^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 来研究 $F(z)$ 的性质. 因为

$$\begin{aligned} \arg F(z) &= \text{const} + n \arg z + \arg(z - \bar{\alpha}^{-1}) \\ &\quad - \arg(z - \alpha), \end{aligned}$$

此幅角当 t 自 0 变化到 2π 时, 总计增加 $2\pi(n+1)$, 故必定存在着 $2n+2$ 个点 t_k ($0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{2n+2} < 2\pi$), 对于这些点, 使得 $\arg F(e^{it_k})$ 的值是 π 的 $2n+2$ 个相继的倍数. 于是有

$$F(e^{it_k}) = \mu(-1)^k O \quad (k=1, 2, \dots),$$

其中 $\mu = +1$ 或 $\mu = -1$.

若 (4) 成立, 则对于三角多项式 $T_n(t) = \text{Re} Q_n(e^{it})$, 将有 $|\text{Re} F(e^{it}) - T_n(t)| < |O|$. 于是 T_n 也至少有 $2n+2$ 次变号, 这是不可能的. 因此, P_n 是最佳逼近多项式, 也即 $E_n(f) = \|F\| = |O|$. 证毕. $\blacksquare$

9. 附 记

1. 对于固定的 n , $f \in [-1, +1]$ 的最佳逼近代数多项式 P_n 由 f 唯一地确定. 从而 $P_n = P_n(f, x)$ 是 $C[-1, +1]$ 上的算子. 可以证明, 该算子是连续的. 但 P_n 是非线性的. 例如, 设 $f(x) = \sin m\pi x$ ($-1 \leq x \leq 1$), 且对于 $-1 \leq x \leq (m-1)/m$, 设 $g(x) = f(x)$; 对于 $(m-1)/m \leq x \leq 1$, $g(x) = 0$. 函数 f 有 $2m$ 个关于 0 的符号交错的最大偏差点, 函数 g 有 $(2m-1)$ 个这种点. 只要 $n+2 \leq 2m-1$, f 和 g 的 n 阶最佳逼近多项式都是零, 但是, 用 $\frac{1}{2}(-1)^{m-1}$ 逼近 $f-g$ 更优于用 0.

2. 在第 3 节中还留下一个未解决的问题, 即怎样的拓扑空间 A 具有 Chebyshev 组. 下述由 Mairhuber [78] 和 Curtis [40] 得到的定理给出了回答.

定理 紧致 Hausdorff 空间 A 有非平凡的实 Chebyshev 组, 当且仅当 A 同胚于圆周 K 的子集.

3. 凸性在逼近问题中的重要性是由 Haar [55] 在 1918 年揭示的. 在 [105] 中 Žuhoviokiĭ 从这一观点出发拓广了最佳逼近的基本定理. 第 3 节和第 6 节的内容引自 Rivlin 和 Shapiro 的佳作 [86].

4. 定理 9 对于 $A = [a, b]$ 和借助于代数多项式逼近的情形是 Chebyshev 于 1857 年证明的. 我们在引进该定理时或多或少掩盖了它的原来面貌. 读者可参照 [10, 第 25 页] 中 Chebyshev 定理的原始证明. 在定理 2 的条件 2(3) 的基础上, 利用 4(4) 和问题 11 的结果, 可得定理 9 在一般形式下的类似证明.

5. 这里没有讨论任意 Banach 空间元素的逼近问题. 这方面的重要结果是 Phelps [85]、Garkavi 和 Singer 得到的, Butzer 的即将出版的书中将包含现时仅在罗马尼亚有效地应用着的 Singer 的结果.

问 题

1. 设 X 是 Banach 空间. $f \in X$, $\phi_n \in X (n=1, 2, \dots)$ 是给定的, 那么 f 借助多项式 $P_n = a_1 \phi_1 + \dots + a_n \phi_n$ 的逼近阶 $E_n(f)$ 满足 $E_n(f+g) \leq E_n(f) + E_n(g)$; $E_n(af) = |a| E_n(f)$; $E_n(f+P_n) = E_n(f)$; $E_1(f) \geq E_2(f) \geq \dots$.

2. $f \in X$ 的所有最佳逼近多项式 P_n 的集是 X 的闭的凸子集.

3. 若 $f \in C[-1, +1]$ 或 $f \in C^*$ 是偶的或奇的, 则其最佳逼近多项式 P_n 或 T_n 也同样如此.

4. 多项式 $T_n(x) = a \cos nx + b \sin nx$ 是在所有 $\cos nx$ 与 $\sin nx$ 具有所述系数的 n 阶三角多项式中与零偏差最小者.

5. 证明 $e^{a_1 x}, \dots, e^{a_n x}$ 和 $x^{a_1}, \dots, x^{a_n}$ 是 $[0, 1]$ 上的两个 Chebyshev 组, 其中 a_i 是相异实数 (并且在第二种情形 $a_i \geq 0$).

6. 若函数 $f(x) (a \leq x \leq b)$ 有不等于零的连续导数 $f^{(n)}(x)$, 则 $1, x, \dots, x^{n-1}, f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的 Chebyshev 组.

7. 设
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 3^k x, \quad (*)$$

其中 $a_k > 0$, $\sum a_k < +\infty$. 那么 $f(x)$ 的最佳逼近三角多项式是级数 (*) 的相应部分的和, 而逼近阶为

$$E_n^*(f) = \sum_{3^k > n} a_k.$$

8. 不存在整系数多项式

$$P_n(x) = a_0 x^n + \dots + a_n, \quad a_0 \neq 0, \quad n \geq 1,$$

在长为 $b-a \geq 4$ 的区间 $[a, b]$ 上满足 $|P_n(x)| < 2$.

9. 设 $b-a \geq 4$. 利用问题 8 的结论证明, 在 $[a, b]$ 上异于多项式的连续函数不能用整系数多项式逼近.

10. 若 P_n 和 Q_m 分别是 f 和 g 在 $[0, 1]$ 上的最佳逼近代数多项式, 则 $P_n(x) + Q_m(y)$ 是 $f(x) + g(y)$ 的最佳逼近多项式 (在多项式 $\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m a_{kl} x^k y^l$ 中间) (Newman 和 Shapiro). [提示: 构造一个极符号差, 使得对于 $f(x) + g(y) - P_n(x) - Q_m(y)$ 满足 3(9).]

11. 对于 $A = [a, b]$ 或 $A = K$ 上的 Chebyshev 组, 存在着多项式 $P(x)$ 使得 $P(x) > 0, x \in A$.

第三章

多项式的性质与连续模

1. 引言

设 $\Phi: \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ 是集 A 上的实值函数组; $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是 A 中给定的互异点; 又设 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 为给定的实数. 所谓多项式 $P(x) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x)$ 的内插值 c_k 是指对 $k=1, 2, \dots, n$ 时, 有 $P(x_k) = c_k$. 通常, c_k 是某一给定的函数 $f(x)$ 在点 x_k 处的值, 这时就说 P 内插 f . 假设能够求得多项式 $l_k(x)$ ($k=1, 2, \dots, n$), 使得

$$l_k(x_k) = 1, \quad l_k(x_i) = 0 \quad (i \neq k, i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

那末内插多项式 P 可以写成形式

$$P(x) = \sum_{i=1}^n c_i l_i(x); \quad (2)$$

显然, 对于每个 k 有 $P(x_k) = c_k$. 如果 Φ 是 Chebyshev 组, 则多项式 $P(x)$ 是唯一的. 在这种情形下, 可以取

$$l_k(x) = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)}, \quad (3)$$

式中 $D(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是行列式 2.4(3). 对于特殊的情形 (见下面的 (4) 和 (6)), 可以用 (3), 也可以直接处理.

1. $[a, b]$ 上的代数多项式 设 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 是区间 $[a, b]$ 上的 $(n+1)$ 个不同点, $c_0, c_1, \dots, c_n$ 为给定的数. 现

在考察在点 x_k 处取值 c_k 的 n 次代数多项式 $P_n(x)$. 这时取

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \quad (k=0, 1, \dots, n) \quad (4)$$

若置 $\Omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, 则可把这个公式写成如下的形式

$$l_k(x) = \frac{\Omega(x)}{(x-x_k)\Omega'(x_k)}.$$

这样, 内插多项式可表为

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{c_k \Omega'(x)}{(x-x_k)\Omega'(x_k)}. \quad (5)$$

此即 Lagrange 内插公式. 倘若给出的不同点少于 $n+1$ 个, 则内插多项式并不唯一. 通过不仅规定 $P_n(x)$ 在 $x=x_k$ 处的值, 而且也规定导数 $P_n^{(j)}(x)$ 在 $x=x_k$ 处的一些值 ($j=1, 2, \dots, m_k$), 这个情况是可以改变的. 如果给定值的总数等于 P_n 的系数的个数 $n+1$, 则又可唯一地确定 $P_n(x)$. 在此不给出相应的被称作 Hermite 内插公式的表示式. 它的特殊情形是 Lagrange 公式 (5) 和 Taylor 公式, 前者假定所有 $n+1$ 个点是不相同的, 后者是当所有 $n+1$ 个插值点重合时, 给出具有指定的 $P_n(x_0), P_n'(x_0), \dots, P_n^{(n)}(x_0)$ 的 $P_n(x)$.

当然会这样期望: 若 $P_n(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的内插多项式 (5), 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 只要插值点在 $[a, b]$ 中稠密, 就必定有 $P_n(x) \rightarrow f(x)$. 然而, 一般地说, 这并不成立. 例如, Bernstein 证明: 如果 $x_0 = -1, x_n = +1$ 的插值点在 $[-1, +1]$ 中是等距的, 则对于 $f(x) = |x|$, 内插多项式 $P_n(x)$ 在 $[-1, +1]$ 上除去 $x=0, x=-1$ 以及 $x=+1$ 外的每点上都发散 (见 [10, p. 375])!

2. 三角多项式 设 $x_0, x_1, \dots, x_{2n}$ 是圆周 K 的 $2n+1$

个互异点. 那末满足 $l_k(x_k) = 1$, $l_k(x_i) = 0$ ($i \neq k$) 的 n 阶三角多项式 $l_k(x)$ 为

$$l_k(x) = \frac{\left(\sin \frac{x-x_0}{2} \sin \frac{x-x_1}{2} \dots \sin \frac{x-x_{k-1}}{2} \sin \frac{x-x_{k+1}}{2} \dots \sin \frac{x-x_n}{2} \right)}{\left(\sin \frac{x_k-x_0}{2} \sin \frac{x_k-x_1}{2} \dots \sin \frac{x_k-x_{k-1}}{2} \sin \frac{x_k-x_{k+1}}{2} \dots \sin \frac{x_k-x_n}{2} \right)}. \quad (6)$$

事实上, 只要注意到形如 $\sin((x-x_0)/2) \sin((x-x_1)/2)$ 的乘积可以写成 $a + b \cos x + c \sin x$ 的形式, 即可见到 $l_k(x)$ 是所需的 n 阶多项式.

回到 $A = [a, b]$ 或 $A = K$ 上 n 个函数的实 Chebyshev 组的情形, 应该注意, 连续函数 $f(x)$ 的最佳逼近多项式也是在 A 的某 n 个点上 $f(x)$ 的内插多项式. 事实上, 由 Chebyshev 定理 (第二章定理 9), 差 $f(x) - P(x)$ 在 A 的某 $n+1$ 个点处取符号交错的值. 由于连续性, 至少存在 n 个点使 $f(x) - P(x)$ 等于零. 这一简单的注释有下述应用:

定理 1 (Bernstein [2, 第 I 卷第 63 页]) 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上有 $n+1$ 阶连续导数的两个函数, 又设

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq g^{(n+1)}(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (7)$$

则借助于代数多项式逼近的阶, 满足不等式

$$E_n(f) \leq E_n(g). \quad (8)$$

证明 先设当 $a < x < b$ 时, $g^{(n+1)}(x)$ 不等于零. 从 $[a, b]$ 中任取 $(n+1)$ 个不同的点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 开始, 设 P_n 和 Q_n 是 f 和 g 在这些点上的内插多项式, 并置 $R = f - P_n$, $S = g - Q_n$. 设 x 是 $[a, b]$ 中异于每个 x_k 的固定点. y 的函数

$$\Phi(y) = R(x)S(y) - S(x)R(y)$$

有 $n+2$ 个不同的零点 $y=x, x_0, \dots, x_n$. 因此, 据 Rolle 定理, 它的 $(n+1)$ 阶导数在 (a, b) 的某个点 ξ 处等于零. 但是, $R^{(n+1)} = f^{(n+1)}$, $S^{(n+1)} = g^{(n+1)}$, 故得

$$R(x)g^{(n+1)}(\xi) = S(x)f^{(n+1)}(\xi).$$

利用 (7), 则有

$$|f(x) - P_n(x)| \leq |g(x) - Q_n(x)|. \quad (9)$$

(9) 式对于 $x=x_0, x_1, \dots, x_n$ 也成立, 所以, 它对一切 x 成立.

为了利用 (9), 取 $Q_n(x)$ 为 $g(x)$ 的最佳逼近多项式, 又取 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 为使 $Q_n(x)$ 等于 $g(x)$ 的 $n+1$ 个点的集. 于是 (9) 说明: 对于 f 的相应的内插多项式 $P_n(x)$, 有

$$|f(x) - P_n(x)| \leq E_n(g).$$

因此, (8) 必成立.

若 $g^{(n+1)}(x)$ 有零点, 则可取一个导数异于零的小函数加在它上面, 例如取 εh , $h(x) = (x-a)^{n+1}$, $\varepsilon > 0$. 那末

$$E_n(f) \leq E_n(g + \varepsilon h) \leq E_n(g) + \varepsilon \|h\|.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 便得到 (8).

证毕. $\square$

系 设在 $[-1, +1]$ 上 $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, 则 $E_n(f) \leq M2^{-n}/(n+1)!$.

欲证明它, 取 $g(x) = Mx^{n+1}/(n+1)!$, 并且注意, 根据第二章的定理 11, x^{n+1} 借助 n 次多项式逼近的阶为 2^{-n} .

2. Bernstein 不等式

逼近论中许多定理都依赖于 n 阶多项式不可能急剧变化的事实, 换言之, 它的导数不会很大. 在下述定理中, 将用多项式本身作比较来估计导数的大小.

首先讨论三角多项式. 若 $T_n(x) = \cos nx$ 或 $T_n(x) =$

$\sin nx$, 则 $\|T_n\| = 1$, 而其导数 T'_n 具有等于 n 的范数, 但这是极端的情形.

定理 2 (Bernstein [2, 第 I 卷第 26 页]) 若三角多项式 $T_n(x)$ 在 K 上满足不等式 $|T_n(x)| \leq M$, 则

$$|T'_n(x)| \leq nM, \quad x \in K. \quad (1)$$

证明. 如果定理不成立, 则存在多项式 T_n , 使 $\|T'_n\| = nL$, $L > \|T_n\|$. 在某个点 $x_0 \in K$ 有 $|T'_n(x_0)| = nL$, 而且, 可以假设 $T'_n(x_0) = nL$. 因为 T'_n 在 x_0 处取极大值, 故 $T''_n(x_0) = 0$.

现在考察 n 阶三角多项式

$$S_n(x) = L \sin n(x - x_0) - T_n(x). \quad (2)$$

在 K 中 $\sin n(x - x_0)$ 处取值 ± 1 的 $2n$ 个点 $x = x_0 + (2k+1)\pi(2n)^{-1}$ 上, 多项式 S_n 取符号交错的值. 在任意两个这样的点之间, S_n 有一个零点. 所以 S_n 在 K 上有 $2n$ 个不同的零. 根据 Rolle 定理,

$$S'_n(x) = nL \cos n(x - x_0) - T'_n(x)$$

也有 $2n$ 个不同的零点. x_0 是这些零点中的一个, 这是因为

$$S'_n(x_0) = nL - T'_n(x_0) = 0.$$

又

$$S''_n(x) = -n^2 L \sin n(x - x_0) - T''_n(x). \quad (3)$$

在 $x = x_0$ 处也为 0. 然而, 再次利用 Rolle 定理可知, S''_n 有 $2n$ 个位于 S'_n 的零点之间的零点. 于是, S''_n 至少有 $2n+1$ 个零点. 因此 (根据第二章第 4 节) S''_n 恒等于零. 从而 S_n 是常数, 因为我们已知 S_n 变号, 所以这是矛盾的. 这样, (1) 必然成立.

证毕. **1**

关于 n 次代数多项式有下述相对应的命题.

定理 3 设对于 $-1 \leq x \leq 1$, 有 $|P_n(x)| \leq M$, 则

$$|P'_n(x)| \leq \frac{M_n}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1). \quad (4)$$

证明 这可由定理 2 借助“标准”代换 $x = \cos t$ 而得到. 因为 $T_n(t) = P_n(\cos t)$ 是 n 阶三角多项式, 又因为 $|T_n(t)| \leq M$, 故有 $|T'_n(t)| \leq Mn$. 但是

$$T'_n(t) = \pm P'_n(x) \sqrt{1-x^2}. \quad \text{证毕. } \blacksquare$$

从定理 2 和 3 还可以导出(通过迭代)对任意阶导数的估计. 例如对于三角多项式, 如果 $\|T_n\| \leq M$, 则

$$\|T_n^{(p)}\| \leq Mn^p \quad (p=1, 2, \dots). \quad (5)$$

对于复系数的三角多项式 T_n , 定理 2 也成立. 事实上, 可取实数 α , 使 $e^{i\alpha}T'_n$ 在 $x=x_0$ 处取值 $\|T'_n\|$. 这样, $S_n(x) = \operatorname{Re}\{e^{i\alpha}T'_n(x)\}$ 便是个实系数多项式. 对于它来说, 有 $\|S_n\| \leq \|T_n\|$ 且 $S'_n(x) = \operatorname{Re}\{e^{i\alpha}T''_n(x)\}$. 因此

$$\|T'_n\| = e^{i\alpha}T'_n(x_0) = S'_n(x_0) \leq n\|T_n\|.$$

由此得到

定理 4 对于在圆 $|z| \leq 1$ 上的复系数多项式 $P_n(z) = \sum_0^n a_k z^k$, 置

$$\|P_n\| = \max_{|z| \leq 1} |P_n(z)|.$$

那么,

$$\|P'_n\| \leq n\|P_n\|. \quad (6)$$

证明 在圆周 $|z|=1$ 上考察 P_n 和 P'_n , 也即 $z=e^{ix}$, $x \in K$. 那么 $P_n(z) = \sum_0^n a_k e^{ikx} = T_n(x)$ 是个复系数三角多项式, 而且 $P'_n(z) = \sum_1^n a_k k e^{i(k-1)x} = -ie^{-ix} T'_n(x)$. 从而 (6) 可由 (1) 及最大模原理推得. 证毕. $\blacksquare$

3. Markov 不等式

不等式 2(4) 并非总是最佳的: 如果 x 接近于区间的端点 -1 、 $+1$, 则上界变成任意大. 不过, 还是可以给出常数上界的.

定理 5 (A. A. Markov [79]) 若在 $[-1, 1]$ 上 $|P_n(x)| \leq M$, 则

$$|P'_n(x)| \leq Mn^2 \quad (-1 \leq x \leq 1). \quad (1)$$

显然, (1) 是不能改善的. 事实上, 设 P_n 是 Chebyshev 多项式 $C_n(x) = \cos nt$, $x = \cos t$, $0 \leq t \leq \pi$, 则 $\|C_n\| = 1$, 而 $C'_n(x) = n \sin nt / \sin t$ 在 $x=1$ (或 $t=0$) 处等于 n^2 . 还可看到

$$|C'_n(x)| \leq n^2 \quad (-1 \leq x \leq 1). \quad (2)$$

这可以由不等式 $|\sin nt| \leq n |\sin t|$ 导出, 而 $|\sin nt| \leq n |\sin t|$, 容易对 n 用归纳法证明. Markov 定理可直接从定理 3 和下述定理推得.

定理 6 (Schur) 若 S_{n-1} 是在 $-1 < x < 1$ 中满足 $|S_{n-1}(x)| \leq L(1-x^2)^{-1/2}$ 的 $n-1$ 次代数多项式, 则在这个区间上 $|S_{n-1}(x)| \leq Ln$.

证明 设 x_k ($-1 < x_n < \dots < x_1 < 1$) 是 Chebyshev 多项式 U_n 的零点 (见 2.7(4)). 下面考察两种情形.

(a) 首先设 $|x| \leq x_1$ 或 $x_n \leq x \leq x_1$, 则

$$\begin{aligned} (1-x^2)^{-1/2} &\leq (1-x_1^2)^{-1/2} \\ &= \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{2n}\right)^{-1/2} = \left(\sin \frac{\pi}{2n}\right)^{-1} \leq n. \end{aligned}$$

这是因为对于 $0 \leq x \leq \pi/2$, 有不等式 $\sin x \geq (2/\pi)x$ 成立 (这个不等式可从下述事实推出: 在 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 上, 曲线 $y = \sin x$ 是凸的, 因此在其弦 $y = (2/\pi)x$ 的上面).

(b) 对于 x 的其它值, 按 1(5) 在 Chebyshev 多项式 $O_n(x)$ 的零点 x_k 上内插 S_{n-1} 而得到

$$S_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} S_{n-1}(x_k) \frac{O_n(x)}{(x-x_k)O'_n(x_k)}. \quad (3)$$

置 $x = \cos t$, O_n 的零点 x_k 对应着 t 的值 $t_k = (2k-1)\pi/(2n)^{-1}$ ($k=1, 2, \dots, n$), 因此

$$|O'_n(x_k)| = \left| n \frac{\sin nt_k}{\sqrt{1-x_k^2}} \right| = \frac{n}{\sqrt{1-x_k^2}}.$$

在(3)中, 用所设的上界代替 $S_{n-1}(t_k)$, 则得到

$$|S_{n-1}(x)| \leq L n^{-1} \sum_{k=1}^n \left| \frac{O_n(x)}{x-x_k} \right|, \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

但 $O_n(x) = \cos t(x-x_1) \cdots (x-x_n)$, 故对每个满足 $x \leq x_n$ 或 $x \geq x_1$ 的 x , 所有的商 $O_n(x)/(x-x_k)$ 都同号. 根据(2), 有

$$\begin{aligned} |S_{n-1}(x)| &\leq L n^{-1} \left| \sum_{k=1}^n \frac{O_n(x)}{x-x_k} \right| \\ &= L n^{-1} |O'_n(x)| \leq L n. \end{aligned}$$

综合(a)和(b)即得定理.

证毕. $\square$

往后(第五章第3节; 第七章第5节)将对多项式的导数建立某些进一步的不等式.

4. 在复平面内多项式的增长

如果多项式 $P_n(x)$ 在 $[-1, +1]$ 上满足 $|P_n(x)| \leq 1$, 那末关于它在复平面中的性质有些什么情况呢? 为了回答这个问题, 考察如下定义的椭圆 E_ρ : 变换

$$z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right) \quad (1)$$

可以写成实的形式

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}) \cos \phi; \\ y &= \frac{1}{2}(\rho - \rho^{-1}) \sin \phi. \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $z = x + iy$, $w = \rho e^{i\phi}$. 带常数 $\rho > 0$ 的曲线 E_ρ 在 $\rho \neq 1$ 时是表示以 $a = \frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1})$ 和 $b = \frac{1}{2}|\rho - \rho^{-1}|$ 为半轴、以 ± 1 为焦点的椭圆 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. 椭圆 $E_{\rho^{-1}}$ 和 E_ρ 相同. 对于 $\rho = 1$, E_ρ 是两次覆盖的区间 $[-1, +1]$. 对于不在 $[-1, +1]$ 上的每个点 z , 恰有一个椭圆 E_ρ ($\rho > 1$) 通过 z ; ρ 可由方程 $\rho + \rho^{-1} = |z-1| + |z+1|$ 确定. 由此推知: 变换(1)一对一地把区域 $|w| > 1$ 映成 z 平面上的区间 $[-1, +1]$ 的余集.

定理 7 (Bernstein 2, 第一卷第 21 页) 若复系数多项式 $P_n(x)$ 在 $-1 \leq x \leq 1$ 上满足 $|P_n(x)| \leq M$, 则

$$|P_n(z)| \leq M\rho^n \quad (z \in E_\rho, \rho > 1). \quad (3)$$

证明 设 $\rho > 1$ 是给定的. 现在构造 $2n$ 次多项式

$$Q(w) = w^n P_n\left(\frac{w + w^{-1}}{2}\right),$$

并且对它应用解析函数的最大模原理:

$$\begin{aligned} \max_{|w|=\rho^{-1}} |Q(w)| &\leq \max_{|w|=1} |Q(w)| = \max_{w=1} \left| P_n\left(\frac{w + w^{-1}}{2}\right) \right| \\ &= \max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n(x)| \leq M. \end{aligned} \quad (4)$$

若 w 在圆周 $|w| = \rho^{-1}$ 上, 则 $z = \frac{1}{2}(w + w^{-1})$ 在椭圆 E_ρ 上,

故由(4)可直接导出(3).

证毕.]

作为定理 7 的应用例子, 对于实轴上的多项式有下列性质:

1. 若 $P_n(x)$ 是 n 次多项式, $0 < a < 1$, 而且对于 $|x| \leq a$

有 $|P_n(x)| \leq M$, 则

$$|P_n(x)| \leq M \left(\frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{a} \right)^n \quad (|x| \leq 1). \quad (5)$$

2. 若对于 $|x| \leq 1 - n^{-2}$, $n > 1$, 有 $|P_n(x)| \leq M$, 则对于某一绝对常数 C , 有

$$|P_n(x)| \leq CM \quad (|x| \leq 1). \quad (6)$$

应用定理 7 于 $Q_n(z) = P_n(az)$, 即可推出第一个命题, 而第二个命题则是第一个命题当 $a = 1 - n^{-2}$ 时的特殊情形.

5. 连续模

设 A 是集 $[a, b]$ 或 K , 下面将这样来度量函数 $f \in C[A]$ 的连续性: 考察函数 f 以 t 为步长的一阶差

$$\Delta_t f(x) = f(x+t) - f(x),$$

并置

$$\omega(f, h) = \omega(h) = \max_{\substack{0 < t \leq h \\ |x| \leq l}} |f(x+t) - f(x)|. \quad (1)$$

函数 $\omega(h)$ 称为 f 的连续模, 它对于 $0 \leq h \leq l$ 有定义, 在此, 若 $A = [a, b]$, 则 $l = b - a$; 若 $A = K$, 则 $l = \pi$.

连续模 $\omega(h)$ 有下列性质: (a) 当 $h \rightarrow 0$ 时, $\omega(h) \rightarrow 0$; (b) $\omega(h)$ 是正的、增加的; (c) ω 是半可加的, 即

$$\omega(h_1 + h_2) \leq \omega(h_1) + \omega(h_2). \quad (2)$$

事实上, 若 $|t| \leq h_1 + h_2$, 则 t 可写成形式 $t = t_1 + t_2$, $|t_1| \leq h_1$, $|t_2| \leq h_2$, 于是 (2) 可从

$$\begin{aligned} & |f(x+t) - f(x)| \\ & \leq |f(x+t_1+t_2) - f(x+t_2)| + |f(x+t_2) - f(x)| \end{aligned}$$

导出. 此外, 我们有 $|\omega(h_1 \pm h_2) - \omega(h_1)| \leq \omega(h_2)$. 于是 (a)、(b) 和 (c) 含有性质 (d): $\omega(h)$ 是连续的.

为使给定函数 $\omega(h)$ ($0 \leq h \leq l$) 成为某函数 $f \in C[A]$ 的连续模, 条件 (a)、(b)、(c) 也是充分的. 事实上, 函数 $f(x) = \omega(x)$ ($0 \leq x \leq l$) 的连续模就是 $\omega(x)$ 本身, 而且这也适用于函数 $f(x) = \omega(x-a)$ ($a \leq x \leq b$) 和 $f(x) = \omega(|x|)$ ($-\pi \leq x \leq \pi$).

通过归纳法, 由 (2) 即可推出

$$\omega(h_1 + h_2 + \cdots + h_n) \leq \omega(h_1) + \omega(h_2) + \cdots + \omega(h_n).$$

对于 $h = h_1 = \cdots = h_n$, 则得

$$\omega(nh) \leq n\omega(h). \quad (3)$$

对于非整数的因子 λ , 有下列类似的不等式成立,

$$\omega(\lambda h) \leq (\lambda + 1)\omega(h) \quad (\lambda \geq 0). \quad (4)$$

事实上, 取整数 n , 使 $n \leq \lambda \leq n+1$, 可以看到

$$\omega(\lambda h) \leq \omega[(n+1)h] \leq (n+1)\omega(h) \leq (\lambda+1)\omega(h).$$

设 F 是一个乘积: $F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$. 由恒等式

$$\Delta_t F(x) = f_1(x+t) \Delta_t f_2(x) + f_2(x) \Delta_t f_1(x)$$

得到

$$\omega(F, h) \leq \|f_2\| \omega(f_1, h) + \|f_1\| \omega(f_2, h).$$

对于 s 个函数的乘积, 相应的不等式有形式

$$\begin{aligned} & \omega(f_1 f_2 \cdots f_s, h) \\ & \leq \sum_{i=1}^s \|f_1\| \|f_2\| \cdots \|f_{i-1}\| \omega(f_i, h) \|f_{i+1}\| \cdots \|f_s\|. \end{aligned} \quad (5)$$

连续模是不可能太小的, 对于 $h \rightarrow 0$, 若 $\omega(h)/h \rightarrow 0$, 则函数 f 是一个常数. 事实上, 这时随着 $t \rightarrow 0$, 有 $|[f(x+t) - f(x)]/t| \rightarrow 0$, 因此 $f'(x)$ 存在并且对于所有的 $x \in A$ 都等于零. 作为 f 的函数, 连续模有半范数的性质:

$$\begin{aligned} \omega(\alpha f, h) &= |\alpha| \omega(f, h); \\ \omega(f_1 + f_2, h) &\leq \omega(f_1, h) + \omega(f_2, h). \end{aligned} \quad (6)$$

如果对于任意的 $x, y \in [a, b]$ 和 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$, 函数 $f(x)$ 满足不等式 $\alpha f(x) + \beta f(y) \leq f(\alpha x + \beta y)$, 则称它在 $[a, b]$ 上是凹的. 在 $[0, 1]$ 上的凹函数 $f(x)$ 如果适合 $f(0) = 0$, 则它有这样的性质: $f(x)/x$ 递减, 事实上, 若 $x < y$, 则

$$\frac{x}{y} f(y) = \frac{y-x}{y} f(0) + \frac{x}{y} f(y) \leq f(x).$$

在 $[0, 1]$ 上满足 $\omega(0) = 0$ 的连续、递增函数 $\omega(x)$, 如果是凹的 (或者更一般地, 假设 $\omega(x)/x$ 是递减的), 则 $\omega(\omega)$ 是一个连续模. 要证明它, 只需指出 ω 满足 (2) 即可. 为此, 用 h_1 和 h_2 分别乘下述不等式

$$\frac{\omega(h_1+h_2)}{h_1+h_2} \leq \frac{\omega(h_1)}{h_1} \quad \text{和} \quad \frac{\omega(h_1+h_2)}{h_1+h_2} \leq \frac{\omega(h_2)}{h_2}$$

并把所得的结果相加即可.

我们考察几个以后要用的例子: 设 $I_i = (\alpha_i, \alpha_i + 2\delta)$ ($\delta > 0$) 是含于 $[a, b]$ 中的有限个互不相交的区间. 假定 $F(x)$ 在 I_i 之外为零, 且设

$$F(x) = \begin{cases} c_i \omega(x - \alpha_i), & \alpha_i \leq x \leq \alpha_i + \delta, \\ c_i \omega(\alpha_i + 2\delta - x), & \alpha_i + \delta \leq x \leq \alpha_i + 2\delta. \end{cases} \quad (7)$$

假如仅有一个区间 I_1 具有 $c_1 = c > 0$, 且当 $h \leq \delta$ 时, 对于 $|t| \leq h$, 则 $|F(x+t) - F(x)|$ 的最大值在 $x = \alpha_1, t = h$ 处取得且等于 $c\omega(h)$. 当 $h \geq \delta$ 时, 它是 $c\omega(\delta)$. 因此

$$\omega(F, h) = \begin{cases} c\omega(h), & 0 \leq h \leq \delta, \\ c\omega(\delta), & h \geq \delta. \end{cases} \quad (8)$$

只要所有的 $c_i > 0$ 且 $c = \max c_i$, 对于多个 I_i 这个注记也是正确的. 如果 c_i 变号, 则取 $c = \max |c_i|$. 于是 F 是具有正 c_i 的两个形如 (7) 的函数之差, 所以用 $2c$ 代替 c , 以“ $\leq$ ”代替“ $=$ ”,

(8) 仍然成立^[1].

若 ω 是凹的, 则有更好的估计:

$$\omega(F, h) \leq \begin{cases} 2c\omega\left(\frac{1}{2}h\right), & 0 \leq h \leq 2\delta, \\ 2c\omega(\delta), & h \geq 2\delta. \end{cases} \quad (9)$$

事实上, 在 $0 \leq h \leq 2\delta$ 时, 只有当 $x \in I_{i-1}$, $(x+h) \in I_i$ 且当 $c_{i-1} = -c_i = \pm c$ 时, $|F(x+h) - F(x)|$ 的最大可能值才会出现, 这里区间 I_{i-1} 与 I_i 有着公共点 α_i . 若 $x = \alpha_i - h_1$ ($0 \leq h_1 \leq h$), 则

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x)| &\leq c\omega(h_1) + c\omega(h-h_1) \\ &\leq 2c\omega\left(\frac{1}{2}h\right). \end{aligned}$$

连续模未必是凹的, 可是有

定理 8 对于每个连续模 $\omega(x)$ ($0 \leq x \leq l$), 存在凹的连续模 $\omega_1(x)$, 具有性质

$$\omega(x) \leq \omega_1(x) \leq 2\omega(x) \quad (0 \leq x \leq l). \quad (10)$$

证明 设 B 表示所有使 $0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq \omega(x)$ 的点 (x, y) 所组成的平面子集. 集 B 是紧致的, 且其凸包 B_0 (见第二章第 3 节) 也同样如此. B_0 与直线 $x = x_0$ ($0 \leq x_0 \leq l$) 的交集是形如 $[0, y_0]$ 的闭线段, 在此取 $y_0 = \omega_1(x_0)$.

函数 ω_1 在 $[0, l]$ 上是凹的. 事实上, 设 $0 \leq x_1 < x_2 \leq l$, 因为点 $(x_1, \omega_1(x_1))$ 和 $(x_2, \omega_1(x_2))$ 属于 B_0 , 所以, 对于 $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ 所有的点 $(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha \omega_1(x_1) + \beta \omega_1(x_2))$ 也同样如此. 于是

$$\alpha \omega_1(x_1) + \beta \omega_1(x_2) \leq \omega_1(\alpha x_1 + \beta x_2). \quad (11)$$

对于 $0 \leq x_1 < x_2 \leq l$, 我们定义

[1] 以“ $\leq$ ”代替“ $=$ ”, 这句话原书中没有, 是译者加的.

$$\begin{aligned} & \omega(x_1, x_2; x) \\ &= \begin{cases} \frac{x_2-x}{x_2-x_1} \omega(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \omega(x_2) & (x_1 \leq x \leq x_2), \\ \omega(x) & \text{在 } [x_1, x_2] \text{ 之外.} \end{cases} \quad (12) \end{aligned}$$

那么

$$\omega_1(x) = \max_{x_1 < x < x_2} \omega(x_1, x_2; x). \quad (13)$$

事实上, 由 ω_1 的定义可导出不等式 $\omega_1(x) \geq \omega(x_1, x_2; x)$ (其中 $x_1 \leq x \leq x_2$). 另一方面, 对于每个 $x (0 \leq x \leq l)$, 根据第二章引理 2, 点 $(x, \omega_1(x))$ 含于某一个三顶点属于集 B 的三角形 Δ 之内.

可以排除点 $(x, \omega_1(x))$ 属于 Δ 的垂直边的情形. 这样就有 $\omega_1(x) \leq l(x)$, 在此 $y = l(x)$ 是 Δ 的三边之一的方程, 但对于适当选取的 x_1, x_2 , 有 $l(x) \leq \omega(x_1, x_2; x)$.

函数 ω_1 满足 (10). 第一个不等式是显然的. 另一方面, 设 $x_1 \leq x \leq x_2$, $x_1 < x_2$. 我们有 $\omega(x_1) \leq \omega(x)$, 而且由 (4):

$$\omega(x_2) \leq (x_2 + x)x^{-1}\omega(x).$$

于是

$$\omega(x_1, x_2; x) \leq \frac{\omega(x)}{x_2 - x_1} \left\{ (x_2 - x) + \frac{x_2 + x}{x}(x - x_1) \right\}.$$

花括号中的表达式等于

$$x_2 - x_1 + \frac{x_2}{x}(x - x_1) \leq 2(x_2 - x_1).$$

因此

$$\omega(x_1, x_2; x) \leq 2\omega(x).$$

ω_1 仍为递增的, 这是因为 (13) 中的函数 $\omega(x_1, x_2; x)$ 是递增的. 又 $\omega_1(0) = 0$, 且在 $x = 0$ [根据 (10)] 以及 $x = l$ 处, ω_1 是连续的. 又因 $\omega_1(l) = \omega(l)$, 所以 ω_1 在 $[0, l]$ 的内点处连续 (每一个凹的递增函数均有此性质). 这样一来, ω_1 是一个连续模. 证毕. $\square$

考察 A 上 s 个变量的函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_s)$, 其中 A 或是 s -维长方体 (它是 s 个区间 $a_k \leq x_k \leq b_k$ ($k=1, 2, \dots, s$) 的乘积), 或是 s -维环 $K^{(s)}$, 即为 s 个圆周 K 的乘积. 我们定义连续模为

$$|f(y_1, y_2, \dots, y_s) - f(x_1, x_2, \dots, x_s)|$$

(在 $|y_k - x_k| \leq h$ ($k=1, 2, \dots, s$) 限制下) (14)

的最大值. 有时, 需要用到 f 的偏连续模 $\omega^{(k)}(f, h)$, 这里第 k 个模是当增量仅出现于第 k 个坐标, 也即 $x_i = y_i$ ($i \neq k$), $|y_k - x_k| \leq h$ 时 (14) 的最大值.

6. 光滑模

在第四章和第五章中, 讨论函数 f 用三角或代数多项式逼近的阶的估计时, 连续模 $\omega(f, h)$ 将起着重要的作用. 高阶连续模或光滑模也可用于这一目的, 它们与函数 f 以 h 为步长的 r 阶差分 $\Delta_h^r f(x)$ 关联着 ($r=1, 2, \dots$), 这些差分是归纳定义的. 若 $f(x)$ 定义在 $A=[a, b]$ 或 $A=K$ 上, 则 $\Delta_h^1 f(x) = \Delta_h f(x)$, $\Delta_h^r f(x) = \Delta_h \Delta_h^{r-1} f(x)$. 用归纳法可以证明

$$\Delta_h^r f(x) = \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} f(x+kh). \quad (1)$$

对于有绝对连续导数 $f^{(r-1)}$ 的函数 f (这时, $f^{(r)}$ 在 A 上几乎处处存在, 且 $f^{(r-1)}$ 是 $f^{(r)}$ 的不定积分), 成立着一个常用的公式

$$\Delta_h^r f(x) = \int_0^h \dots \int_0^h f^{(r)}(x+y_1+\dots+y_r) dy_1 \dots dy_r. \quad (2)$$

这个公式对于 $r=1$ 是显然的, 在一般的情形, 可通过对 r 作归纳证明.

若 $l=b-a$ (对于 $A=[a, b]$) 或 $l=\pi$ (对于 $A=K$), 则

$f \in O[A]$ 的光滑模由

$$\omega_r(f, h) = \max_{\substack{x, t \\ |t| \leq h}} |\Delta_t^r f(x)| \quad (r=1, 2, \dots, 0 \leq h \leq l/r) \quad (3)$$

来定义. $\omega_1(f, h)$ 是连续模 $\omega(f, h)$. $\omega_r(f, h)$ 作为 h 的函数, 是连续且递增的, 并且 $\omega_r(f, 0) = 0$. 若公式 (2) 有效且 $f^{(r)}$ 有界, 则可估计差分 (2):

$$|\Delta_t^r f(x)| \leq t^r \sup_x |f^{(r)}(x)|.$$

$$\text{这就导出} \quad \omega_r(f, h) \leq h^r \sup_x |f^{(r)}(x)|. \quad (4)$$

设 $f^{(r)}$ 是连续的, 由 (2), 可以看到 $\Delta_t^{r+s} f(x)$ 是 $\Delta_t^s f(x+y_1+\dots+y_r)$ 的 r 重积分 ($s=1, 2, \dots$). 对这个积分直接用中值定理, 并且对于 $x \in A$, $|t| \leq h$ 在两边取最大值, 于是得到

$$\omega_{r+s}(f, h) \leq h^r \omega_s(f^{(r)}, h). \quad (5)$$

我们还需要一个由关系式

$$\Delta_{nt}^r f(x) = \sum_{k_1=0}^{n-1} \dots \sum_{k_r=0}^{n-1} \Delta_t^r f(x+k_1 t + \dots + k_r t) \quad (6)$$

导出的类似于 5(3) 的公式. 若 $r=1$, 这是显然的, 对于任一个 r , 它可由对 (6) 的两边用算子 Δ_{nt} 通过归纳法来证实. 由 (6) 可得到

$$\omega_r(f, nh) \leq n^r \omega_r(f, h). \quad (7)$$

象第 5 节那样, 由这一公式可导出

$$\omega_r(f, \lambda h) \leq (\lambda+1)^r \omega_r(f, h). \quad (8)$$

不同阶的函数 $\omega_r(f, h)$ 之间是存在一定关系的. 这里仅限于比较函数 $f \in O[A]$ 的连续模 $\omega(h)$ 和 $\omega_2(h)$. 显然

$$\omega_2(h) \leq 2\omega(h). \quad (9)$$

反之, 有

定理 9 下述不等式是成立的:

$$\omega(h) \leq \sum_{i=0}^k \frac{\omega_2(2^i h)}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} \omega(2^{k+1} h) \quad \left(2^k h \leq \frac{1}{3} l\right), \quad (10)$$

(Marchaud)^[1]. 若 $\omega_2(l) \neq 0$, 则

$$\omega(h) \leq M \omega_2(\sqrt{h}) \quad \left(h \leq \frac{1}{4} l^2\right), \quad (11)$$

其中常数 M 依赖于 f 及 l (Trigub).

证明 设 x_1, x_2 是 A 中适合 $|x_1 - x_2| \leq h$ 的两个点, 在此可以扩充成为形如 $x, x+t, x+2t$ 的三个点, 其中 $t = \pm(x_1 - x_2)$, 而 x_1 和 x_2 是 x 和 $x+t$ (或 $x+t$ 和 x). 若 $A = K$, 这样做是毫无困难的, 若 $A = [a, b]$, 那么我们必须假设 $|t| \leq \frac{1}{3} l$. 从

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &\leq \frac{1}{2} |f(x+2t) - 2f(x+t) + f(x)| \\ &\quad + \frac{1}{2} |f(x) - f(x+2t)| \end{aligned}$$

导出

$$\omega(h) \leq \frac{1}{2} \omega_2(h) + \frac{1}{2} \omega(2h) \quad \left(h \leq \frac{1}{3} l\right). \quad (12)$$

同理, $\omega(2h) \leq \frac{1}{2} \omega_2(2h) + \frac{1}{2} \omega(4h)$. 把这个对于 $\omega(2h)$ 的

估计式代入 (12) 中, 重复此过程 k 次, 即得 (10). 因为 (10) 的最后一项是很小的, 所以这个不等式可看作 $\omega_2(h)$ 对 $\omega(h)$ 的估计.

为了得到 (11), 先设 $h \leq l_0 = \min\left(1, \frac{1}{3} l, l^2\right)$, 可以取整数 $k \geq 0, i_0 \geq 0$, 使 $2^k h \leq \frac{1}{3} l < 2^{k+1} h$ 且 $2^{i_0} \leq h^{-1/2} < 2^{i_0+1}$. 设

[1] (10) 的另一形式见问题 5.

Σ_1 与 Σ_2 是和式 (10) 中分别对应于 $i \leq i_0$ 、 $i > i_0$ 的部分. 对于第一部分的和, 利用不等式 $\omega_2(2^i h) \leq \omega_2(\sqrt{h})$; 对于第二部分, 利用由 (7) 导出的

$$\omega_2(2^i h) \leq (2^{i-i_0})^2 \omega_2(\sqrt{h}),$$

则有 $\Sigma_1 \leq \omega_2(\sqrt{h})$, 而且对于上述定义的 i_0 和 h ,

$$\Sigma_2 \leq 2^{-2i_0} \omega_2(\sqrt{h}) 2^k \leq \frac{4}{3} l \omega_2(\sqrt{h}).$$

最后, 由 (8),

$$\omega_2(l) \leq \left(\frac{l}{\sqrt{h}} + 1 \right)^2 \omega_2(\sqrt{h}) \leq \frac{4l^2}{h} \omega_2(\sqrt{h}).$$

于是导出不等式 $h \leq M_1 \omega_2(\sqrt{h})$, 其中 $M_1 = 4l^2/\omega_2(l)$. 根据 h 的定义, (10) 中最后一项不超过

$$2^{-k-1} \omega\left(\frac{2}{3} l\right) \leq 3 h \omega\left(\frac{2}{3} l\right) l^{-1} \leq M_2 \omega_2(\sqrt{h}).$$

将所有这些代入 (10), 对于所有的值 $0 \leq h \leq l_0$, 可得到 (11). 根据 5(4), 可以看到当 $h \geq l_0$ 时, $\omega(h) \leq \text{const } \omega(l_0) \leq \text{const } \omega_2(\sqrt{l_0})$. 因此, (11) 在一般情况下也成立. 证毕. $\blacksquare$

7. 函 数 类

这一节将介绍以后常要用到的函数类. 一个定义在 $A = [a, b]$ 或 $A = K$ 上的函数 f , 如果有 $M \geq 0$ 和 $0 < \alpha \leq 1$, 使

$$|f(x') - f(x)| \leq M |x' - x|^\alpha \quad (x', x \in A), \quad (1)$$

则说它满足具有常数 M 和指数 α 的 Lipschitz 条件, 或说它属于类 $\text{Lip}_M \alpha$. 与上述不等式等价的是不等式 $\omega(f, h) \leq M h^\alpha$. 例如, 若 f 有导数满足 $|f'(x)| \leq M$, $x \in A$, 则 $f \in \text{Lip}_M 1$. 类 $\text{Lip}_M \alpha$ 是由对于某个 M 满足 (1) 的所有函数组成的. 易见, 若 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$, 则 $\text{Lip}_M \alpha \supset \text{Lip}_M \beta$.

更一般的是类 $A_\omega(M)$, 这里 $\omega(h)$ 是连续模. 它由所有具备性质 $\omega(f, h) \leq M\omega(h)$ 的函数 $f \in C[A]$ 所组成.

有一些类是以导数的连续性为依据的. 设 $r=0, 1, \dots, M_i \geq 0$ ($i=0, 1, \dots, r+1$). 设 ω 是连续模, 并设 $A=[a, b]$ 或 $A=K$, 那末 $A_{p\omega} = A_{p\omega}(M_0, M_1, \dots, M_{p+1}, A)$ 表示所有在 A 上满足

$$|f^{(i)}(x)| \leq M_i, \quad x \in A \quad (i=0, 1, \dots, p). \quad (2)$$

$$\omega(f^{(p)}, h) \leq M_{p+1}\omega(h) \quad (3)$$

的连续导数 $f, f', \dots, f^{(p)}$ 的函数 $f \in C[A]$ 组成的集. 若 $\omega(h) = h^\alpha$, 则把 $A_{p\omega}$ 记为 $A_{p\alpha}$.

如果在所述条件中允许常数 M_i 随 f 变化, 则代替 $A_{p\omega}$ 得到一个线性空间 $X = X_{p\omega}$. $f \in X_{p\omega}$ 表示 $f, f', \dots, f^{(p)}$ 是连续的, 且对于某个 M_{p+1} 满足 (3). 我们可使 $X_{p\omega}$ 为赋范线性空间. 这只要对给定的 f 定义 $\|f\|_X$ 为最小可能的 $\max M_i$ ($i=0, 1, \dots, p+1$), 换言之

$$\|f\|_X = \max \left\{ \|f\|, \|f'\|, \dots, \|f^{(p)}\|, \max_h \frac{\omega(f^{(p)}, h)}{\omega(h)} \right\}. \quad (4)$$

当然, $\|f\|_X$ 与均匀范数 $\|f\|$ 是不同的. 通常不取 (4) 作范数 [对照 5(6)].

定理 10 (a) $A_{p\omega}$ 在 $C[A]$ 中是紧致的; (b) $X_{p\omega}$ 是 Banach 空间.

证明 (a) 设 $f_k \in A_{p\omega}$ ($k=1, 2, \dots$), 则函数 f_k 一致有界, $|f_k(x)| \leq M_0$, 而且等度连续. 若 $p=0$, 这可从 (3) 推出. 而若 $p>0$, 则可从导数 f'_k 的一致有界性推出. 根据 Arzelà 的定理 [28, 第 128 页] 存在着在 A 上一致收敛于连续函数 g 的子列 f_{k_i} . 这同样也适用于导数 $f_k^{(j)}$ ($j=1, 2, \dots, p$). 必

要时,用子列代替 f_k 时,可设对于 $j=1, 2, \dots, p$, 在 A 上有 $f_k^{(j)} \rightarrow g_j$ 一致成立. 根据微分学的基本定理, g_j 就是 g 的导数.

另一方面, $A_{p\omega}$ 在 $j=0, 1, \dots, p$ 阶导数一致收敛的意义下是闭的,这是因为在这种收敛性下,不等式(2)和(3)仍然成立.

(b) 设序列 $f_k \in X_{p\omega} (k=1, 2, \dots)$ 是该空间中的 Cauchy 序列 (即当 $k, l \rightarrow \infty$ 时, $\|f_k - f_l\|_x \rightarrow 0$), 则对于每个 $j=0, 1, \dots, p$, 有 $\|f_k^{(j)} - f_l^{(j)}\| \rightarrow 0$, 因此, $\|f_k^{(j)}\| - \|f_l^{(j)}\| \rightarrow 0$. 于是, 序列 $\|f_k^{(j)}\| (k=1, 2, \dots)$ 是有界的. 这同样适用于序列 $\max_A [\omega(f_k^{(j)}, h)/\omega(h)]$. 于是, 对于某些常数 M_j , $f_k \in A_{p\omega} (M_0, M_1, \dots, M_{p+1}; A) (k=1, 2, \dots)$. 根据 (a) 的证明, 对于某个 $g \in X_{p\omega}^{[1]}$, 有 $f_k^{(j)}(x) \rightarrow g^{(j)}(x) (j=0, 1, \dots, p)$ 一致成立. 在关系式 $|f_k^{(j)}(x) - f_l^{(j)}(x)| \leq \varepsilon (j=0, 1, \dots, p, x \in A)$, $\omega(f_k^{(j)} - f_l^{(j)}, h) \leq \varepsilon \omega(h) (0 \leq a \leq b)$ 中 (只要 i 和 k 足够大, 这些关系式对每个 $\varepsilon > 0$ 都成立), 通过 $i \rightarrow \infty$ 便可得到 $\|f_k - g\|_x \leq \varepsilon$, 这样, $X_{p\omega}$ 是完备的. 证毕.]

对于 $p=1, 2, \dots$, $A=[a, b]$ 或 $A=K$, 类 $W_p(A)$ 是由具有绝对连续的导数 $f^{(p-1)}$ (从而 $f^{(p)}(x)$ 几乎处处存在) 且 $|f^{(p)}(x)| \leq 1$ a. e. 的所有函数 $f \in C[A]$ 组成. 我们把 $W_p[K]$ 记为 W_p^* .

我们还定义在 s -维集 A 上的 s 个变量的函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_s)$ 的类 $A_{p\omega}^s = A_{p\omega}^s(M_0, M_1, \dots, M_{p+1}, A)$, 这里 A 是长方体或环 (见第 5 节). 一个函数 f 属于类 $A_{p\omega}^s$, 乃是指它的 $j=0, 1, \dots, p$ 阶偏导数存在、连续且满足下列条件: 对于每个

[1] 原文误为 $X_{r\omega}$ ——译者注.

j 阶偏导数 $D^j f$ 有 $\|D^j f\| \leq M, (j=0, 1, \dots, p)$, 而对于每个 p 阶导数, 则有 $\omega(D^p f, h) \leq M_{p+1} \omega(h)$.

定理 10 对于类 $A_{p\omega}^s$ 以及相应的空间 $X_{p\omega}^s$ 也成立. 类 $\text{Lip}_\omega 1$ 是由在 A 上具有性质 $\omega(f, h) \leq Mh$ 或对于 $|y_k - x_k| \leq h (k=1, \dots, s)$ 有

$$|f(y_1, \dots, y_s) - f(x_1, \dots, x_s)| \leq Mh \quad (5)$$

的函数 f 所组成.

回到单变量函数, 如果函数 f 满足 $\omega_2(f, h) = O(h)$, 则说它是亚光滑的. 类 $\text{Lip } 1$ 的所有函数都是亚光滑的, 但其逆不成立. 例如, 函数

$$g(x) = \begin{cases} x \log |x|, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (6)$$

在 $[-1, +1]$ 上是亚光滑的, 但不属于类 $\text{Lip } 1$. 先证 g 在 $[0, 1]$ 上是亚光滑的. 考察二阶差 $\Delta_t^2 g(x)$, 不妨假设 (根据它关于中间点 $x+t$ 的对称性) $t > 0$, 那末

$$\begin{aligned} \Delta_t^2 g(x) &= 2t \log \frac{x+2t}{x+t} - x \log \left(1 + \frac{t}{x}\right) \\ &\quad + x \log \left(1 + \frac{t}{x+t}\right). \end{aligned}$$

这里 $1 \leq (x+2t)/(x+t) \leq 2$, 于是右边第一项不超过 $2t \log 2$. 利用不等式 $\log(1+u) \leq u, u \geq 0$, 我们还可看到其余两项都是 $O(t)$.

其次证明: 每个在 $[0, 1]$ 上亚光滑而在 $[-1, +1]$ 上是奇函数的 g 在较大的区间上也是亚光滑的. 在此再次估计差 $\Delta_t^2 g(x) (t > 0)$. 需要注意的是三个点 $x, x+t$ 及 $x+2t$ 不同时在一个子区间 $[-1, 0]$ 或 $[0, 1]$ 上的情形, 在此不妨假设点 x 在第一个区间中, 而 $x+t, x+2t$ 在第二个区间中, 从而 $0 \leq -x \leq t$. 于是有

$$\begin{aligned}
\Delta_t^2 g(x) &= g(x+2t) - 2g(x+t) + g(-x) \\
&= [g(x+2t) - 2g(t) + g(-x)] - 2[g(-x) \\
&\quad - 2g\left(\frac{1}{2}t\right) + g(x+t)] + 2[g(t) - 2g\left(\frac{1}{2}t\right) + g(0)] \\
&= O(x+t) + O\left(x + \frac{t}{2}\right) + O\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= O(t).
\end{aligned}$$

在圆周 K 上, 可取 $f(x) = g(\pi x)$ 作为非平凡的亚光滑函数的例子, 事实上, f 在 $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$ 及 $\left[\frac{1}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right]$ 上是亚光滑的 (在后一区间上它属于类 $\text{Lip}1$); 当 t 充分小时, K 的三个点 $x, x+t, x+2t$ 或属于第一个区间, 或属于第二个区间.

8. 附 记

1. Bernstein 不等式 2(1)、2(4)、2(5) 有许多拓广和变形. 设

$$\tilde{T}(x) = \sum_{k=1}^n (b_k \cos kx - a_k \sin kx)$$

是系数为 a_k, b_k 的三角多项式 $T_n(x)$ 的共轭. 若 $|T_n(x)| \leq M, x \in K$, 则

$$T_n''(x)^2 + \tilde{T}_n'(x)^2 \leq nM^2, \quad T_n''(x)^2 + n^2 T_n'^2(x) \leq n^2 M^2.$$

其中, 第一个不等式是 Szegő [1, 第 140 页] 得到的.

2. 对于特殊的多项式, Markov 定理的估计 $|P_n'(x)| \leq Mn^2$ 往往还可以改善. 例如 Erdős [45] 证明, 若代数多项式 $P_n(x)$ 仅有不在区间 $[-1, +1]$ 中的实根, 则在此区间中 $\|P_n'\| \leq \frac{1}{2} en \|P_n\|$. 由 Lax [72] 知道, 若多项式 P_n 在 $|z| < 1$

中没有根, 则不等式 2(6) 中的 n 可代之以 $\frac{1}{2}n$.

对关于 $x, 1-x$ 有正系数的较广泛的多项式类, 也即对多项式

$$P_n(x) = \sum_{k+l \leq n} a_{kl} x^k (1-x)^l, \quad a_{kl} \geq 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

成立着同样类型的不等式, 但具有较小的精确常数 (Lorentz [75], 也可见问题 7).

3. 由 Schoenberg, de Boor 以及其他人发展起来的“样条函数”内插形成了对应于多项式内插的有趣的平行系统. 参看 [88].

问 题

1. 设 $f(x) = e^x (-1 \leq x \leq 1)$. 证明 $E_n(f) \leq e 2^{-n} / (n+1)!$; 试将它与借助 Taylor 级数部分和对 e^x 的逼近相比较.

2. 设在 $|z| \leq 1$ 上 $|P_n(z)| \leq M$, 则在 $|z| \leq r$ 上, $|P_n(z)| \leq M r^n$ (其中 $r \geq 1$).

3. 设对于 $0 \leq x \leq \frac{1}{3}l$, 函数 $\omega(x) = x$; 对于 $\frac{1}{3}l \leq x \leq \frac{2}{3}l$, $\omega(x) = -\frac{l}{3}$; 对于 $\frac{2}{3}l \leq x \leq l$, $\omega(x) = x - \frac{1}{3}l$. 则它是个连续模, 但 $\omega(x)/x$ 并非单调减少.

4. 试证明函数 $f \in C[a, b]$ 是线性的当且仅当对于某个 $h > 0$, 有 $\omega_2(f, h) = 0$.

5. 试证

$$\omega(f, t) \leq 12h \left\{ \int_h^t \frac{\omega_2(f, t)}{t^2} dt + t^{-1} \|f\| \right\}.$$

[Marchaud. 提示: 利用 6(10).]

6. 试证, 若函数 f 不是线性的, 则对于与 f 无关的常数 M , 6(11) 不成立.

7. 若 $P_n(z)$ 是实系数多项式, 并且在圆 $|z| \leq 1$ 中没有根, 那末或

是 P_n , 或是 $-P_n$ 为关于 $x, 1-x$ 的正系数多项式 (简记为 ppc).

8. 一个 ppc P_n 的积分 $\int_0^x P_n(t)dt$ 也是一个 ppc. 每个多项式都是 ppc 的导数.

9. 假设 P_{n-1} 是 $[-1, +1]$ 上 k 次可微函数 f 的最佳逼近多项式, 设 $0 \leq k < n-1$, 则对于 $(-1, +1)$ 中某 $n-k$ 个相异点 $x_1, x_2, \dots, x_{n-k}$ 和某个 $\xi \in (-1, +1)$, 有

$$R_{nk}(x) = f^{(k)}(x) - P_{n-1}^{(k)}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-k})}{(n-k)!} f^{(n)}(\xi).$$

[提示: 利用 Lagrange 内插的余项公式, (4, 56 页).]

10. 设 f 在 $[-1, +1]$ 上 n 次连续可微, $C_k = \|f^{(k)}\|$ ($k=0, 1, \dots, n$), 则

$$|R_{nk}(x)| \leq \frac{2^{n-k} C_n}{(n-1)!}.$$

11. 在问题 10 的记号下,

$$C_k \leq n^{2k} C_0 + \frac{2^{n-k}}{(n-k)!} C_n \quad (\text{Gorny}).$$

12. 证明函数 $f \in C^*$ 属于 $\text{Lip } 1$ 的充要条件是 $\|\sigma_n(f')\| = O(1)$. 这里 $\sigma_n(f')$ 是 f 的 Fourier 级数微分 (形式) 的算术平均.

第四章

借助三角多项式逼近的阶

1. 概 述

函数 $f \in C^*$ 借助于 n 阶三角多项式 T_n 的第 n 逼近阶是由

$$E_n^*(f) = \min_{T_n} \|f - T_n\|, \quad \|f - T_n\| = \max_x |f(x) - T_n(x)| \quad (1)$$

定义的. Weierstrass 定理(第一章定理 4)告诉我们: 对于每个 $f \in C^*$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $E_n^*(f) \rightarrow 0$. 现在我们希望估计 $E_n^*(f)$ 趋于零时的速度. 只要附加于函数 f 的要求已经给出, 例如: 若知道它的连续模, 它属于 $\text{Lip}\alpha$, 或者它可微分的次数, 便能够建立这样的估计. 一般说来, 越“光滑”的函数, $E_n^*(f)$ 趋于零越快. 陈述这方面的定理称为逼近论的正定理(见第 2 节和第 3 节). 反之, 逆定理(见第 4 节和第 5 节)指出了当 $E_n^*(f)$ 急剧趋于零时, 函数 f 有相当光滑的性质. 在特殊但却很重要的情形, 正与逆定理可以互推. 例如对于类 $\text{Lip}\alpha$, $X_{p,\alpha}$ 的函数, 可以通过逼近阶的大小来刻画其特征.

在寻求一个逼近于给定函数 f 的三角多项式 T_n 时, 自然会想到利用某些线性算子 $L_n(f, x)$. 在 1.2(9) 中给出的 Fourier 级数的部分和 $s_n(f, x)$ 未必对于所有的 f 都一致收敛(第七章第 2 节), 而由 1.2(12) 给出的它们的算术平均 $\sigma_n(f, x)$ 又未必能达到最佳可能的结果. 但是, 用部分和逼近精确性的损失是轻微的. 例如:

定理 1 (Lebesgue) 存在一个常数 M , 使得对于每个 $f \in C^*$, 有

$$\|f - s_n(f)\| \leq M E_n^*(f) \log n \quad (n > 1). \quad (2)$$

欲证明此定理, 只要注意 $s_n(f)$ 是范数 $\|s_n\| \leq A \log n$ 且对于每个 n 阶三角多项式保持不变的线性算子 (第一章第 2 节). 设 T_n 是 f 的最佳逼近多项式, 则

$$\begin{aligned} \|f - s_n(f)\| &= \|(f - T_n) - s_n(f - T_n)\| \\ &\leq \|f - T_n\| + \|s_n(f - T_n)\| \\ &\leq E_n^*(f) (1 + \|s_n\|) \\ &\leq M E_n^*(f) \log n. \quad \text{证毕.} \end{aligned}$$

2. Jackson 定理

在这一节中, 用函数的连续模来估计其逼近阶. 考察下述算子

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) L_n(x-t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) L_n(t) dt, \quad (1)$$

其中 L_n 是 Jackson 核.

$$L_n(t) = \lambda_n^{-1} \left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right)^4, \quad \int_{-\pi}^{\pi} L_n(t) dt = 1, \quad (2)$$

这里 λ_n 是由后一关系式确定的.

先研究 L_n 的一些性质. 用 $\sin \frac{\alpha}{2}$ 去除关系式 1.2(11), 再利用 1.2(10), 可证明 $(\sin(nt/2)/\sin(t/2))^2$ 是 $1, \cos t, \dots, \cos(n-1)t$ 的线性组合. 于是, $L_n(t)$ 是 $n-1$ 阶偶三角多项式的平方, 所以它是正的 $2(n-1)$ 阶偶三角多项式. 可以看到, 积分(1)也是 $2(n-1)$ 阶三角多项式, 而且当 f 是偶函数时, 它也是偶的.

其次证明

$$\lambda_n \approx n^3. \quad (3)$$

因为对于 $0 \leq t \leq \pi$, 有 $\frac{t}{\pi} \leq \sin(t/2) \leq 1/2t$ (见第 52 页). 从而有

$$\lambda_n \approx \int_0^\pi \left(\frac{\sin(nt/2)}{t/2} \right)^4 dt = n^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi n} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^4 du \approx n^3.$$

根据(3), 同理可证

$$\int_0^\pi t^k L_n(t) dt \approx n^{-k} \quad (k=0, 1, 2). \quad (4)$$

事实上, 利用(3)以及关于 $\sin(t/2)$ 的同一个不等式, 可以推知: 对于 $0 \leq k \leq 2$, 最后的积分是

$$n^{-k} \int_0^{\frac{1}{2}\pi n} u^{k-4} \sin^4 u du \approx n^{-k}.$$

不难把算子(1)规范化成 n 阶三角多项式. 为此设

$$K_n(t) = L_{n'}(t) \quad \left(n' = \left[\frac{n}{2} \right] + 1 \right). \quad (5)$$

因为 $2(n'-1) \leq n$, 所以这是一个 n 阶偶三角多项式. 由(2)和(4):

$$\int_{-\pi}^\pi K_n(t) dt = 1; \quad \int_0^\pi t^k K_n(t) dt \approx n^{-k} \quad (k=0, 1, 2). \quad (6)$$

算子

$$J_n(x) = J_n(f, x) = \int_{-\pi}^\pi f(x+t) K_n(t) dt \quad (7)$$

称为 Jackson 算子.

定理 2 (Jackson [58], [6]) 存在常数 M 使得对于每个 $f \in C^*$, 有

$$E_n^*(f) \leq M \omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \quad (n=1, 2, \dots), \quad (8)$$

并且甚至有

$$E_n^*(f) \leq M \omega_2\left(f, \frac{1}{n}\right). \quad (9)$$

证明 因为 $\omega_2(f, h) \leq 2\omega(f, h)$ [见 3.6(9)], 故只需证明 (9). 为此, 估计差 $f(x) - J_n(x)$. 由于 K_n 是偶的, 故

$$\begin{aligned} f(x) - J_n(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+t)] K_n(t) dt \\ &= \int_0^{\pi} [2f(x) - f(x+t) - f(x-t)] K_n(t) dt. \end{aligned}$$

方括号内差的绝对值不超过

$$\omega_2(f, t) = \omega_2(t) = \omega_2\left(nt \cdot \frac{1}{n}\right) \leq (nt+1)^2 \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)$$

[见 3.6(8)]. 于是, 对于所有的 x , 有

$$|f(x) - J_n(x)| \leq \omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \int_0^{\pi} (nt+1)^2 K_n(t) dt.$$

从上式以及 (6) 便可导出 (9). 证毕. $\square$

值得指出, 以算子 $s_n(f)$ 或 $\sigma_n(f)$ 代替 $J_n(f)$ 是不能得到 (8) 或 (9) 的. 其原因是对于 Dirichlet 和 Fejér 核没有类似于 (6) 的估计.

3. 可微函数的逼近阶

在此需要 Jackson 核 2(2) 的一个拓广. 这个核以及相应的常数 $\lambda_n = \lambda_{nr}$ 由关系式

$$L_{nr}(t) = \lambda_{nr}^{-1} \left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right)^{2r}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} L_{nr}(t) dt = 1 \quad (1)$$

定义. 显然, L_{n1} 是 Fejér 核; $L_{n2} = L_n$ 是 Jackson 核.

现在先指出 L_{nr} 的一些性质, 该核是正的 $r(n-1)$ 阶偶三角多项式. 因为在 $0 \leq t \leq \pi$ 时, 有 $t/\pi \leq \sin(t/2) \leq \frac{1}{2}t$, 故对于每个固定的 r , 有

$$\lambda_n \approx \int_0^\pi \left(\frac{\sin(nt/2)}{t/2} \right)^{2r} dt = 2n^{2r-1} \int_0^{\frac{1}{2}\pi n} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^{2r} du \approx n^{2r-1}. \quad (2)$$

此外还有[参见 2(4)的证明]

$$\int_0^\pi t^k L_{nr}(t) dt \approx n^{-k} \quad (k=0, 1, \dots, 2r-2). \quad (3)$$

核

$$K_{nr} = L_{n'r}(t) \quad \left(n' = \left[\frac{n}{r} \right] + 1 \right) \quad (4)$$

是正的 n 阶偶三角多项式; 从(1)和(3)可得到

$$\int_{-\pi}^\pi K_{nr}(t) dt = 1; \quad \int_0^\pi t^k K_{nr}(t) dt \approx n^{-k} \quad (k=0, 1, \dots, 2r-2). \quad (5)$$

定理 3 对于每个 $p=1, 2, \dots$, 存在着具有这样性质的常数 M_p : 若 $f \in C^*$ 有连续导数 $f^{(p)}$, 则

$$E_n^*(f) \leq \frac{M_p}{n^p} \omega\left(f^{(p)}, \frac{1}{n}\right) \quad (n=1, 2, \dots). \quad (6)$$

证明 利用下述算子:

$$\begin{aligned} I_n(x) &= I_{np}(f, x) \\ &= - \int_{-\pi}^\pi K_{nr}(t) \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^k \binom{p+1}{k} f(x+kt) dt, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 r 是使 $r \geq \frac{1}{2}(p+3)$ 的最小整数. 这一积分是

$$\int_{-\pi}^\pi f(x+kt) \cos lt dt \quad (l=0, 1, \dots, n; k=1, 2, \dots, p+1) \quad (8)$$

的线性组合. 注意, 作为 t 的函数, $f(x+kt)$ 有周期 $2\pi/k$.

下面的一般注释是常用的. 设 $\Phi \in C^*$ 有周期 $2\pi/k$, 而 l 不能被 k 整除, 则

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(t) \cos lt dt = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(t) \sin lt dt = 0. \quad (9)$$

事实上,

$$\int_0^{2\pi} \Phi(t) e^{ilt} dt = \int_{2\pi/k}^{2\pi+2\pi/k} \Phi(t) dt = e^{2\pi il/k} \int_0^{2\pi} \Phi(t) e^{ilt} dt.$$

若 l 能被 k 整除, 则作代换 $x+kt=u$, 可知 (8) 是 x 的 l/k 阶三角多项式. 这说明 $I_n(x)$ 是 n 阶三角多项式. 又由 3.6(1), 对于每个 x , 有

$$\begin{aligned} |f(x) - I_n(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} K_{nr} \Delta_l^{p+1} f(x) dt \right| \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} K_{nr}(t) \omega_{p+1}(f, |t|) dt. \end{aligned}$$

因为 $\omega_{p+1}(h) \leq (nh+1)^{p+1} \omega_{p+1}\left(\frac{1}{n}\right)$

[见 3.6(8)], 可以看到: 利用 (5), 若 $p+1 \leq 2r-2$, 也即 $r \geq \frac{1}{2}(p+3)$, 则

$$\begin{aligned} |f(x) - I_n(x)| &\leq 2\omega_{p+1}\left(\frac{1}{n}\right) \int_0^{\pi} (nt+1)^{p+1} K_{nr}(t) dt \\ &\leq M_p \omega_{p+1}\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n=1, 2, \dots). \quad (10) \end{aligned}$$

于是, $E_n^*(f) \leq M_p \omega_{p+1}(1/n)$. 这样, 若 $f^{(p)} \in O^*$, 则由 3.6(5) 便可导出 (6). 证毕. **1**

4. 逆 定 理

在本节和下一节中, 将从量 $E_n^*(f)$ 以给定的速度趋于零的假设来导出函数 $f \in O^*$ 的光滑性. 这类定理最早是由 Bernstein [35] 建立的. 他还揭示了他的不等式 3.2(1) 以及 3.2(5) 在这类问题研究中的重要作用. 他的结果已被

Zygmund [106], Stečkin [90] 以及其他作者进一步拓广了.

易见, 若函数 $\phi(n)$ 是减少的, 则和 $\sum_{i=k}^{\infty} 2^i \phi(2^i)$ 不超过 $2 \sum_{n \geq 2^{k-1}} \phi(n)$. 下述不等式也是同类型的, 它将在本章及下一章中用到.

引理 1 对于每一个实数 p , 存在具有下述性质的常数 M_p ; 对于每个当 $k < i \leq l$ 时适合 $2 \leq u_i/u_{i-1} \leq 4$ 的序列 $0 < u_k \leq u_{k+1} \leq \dots \leq u_l$, 以及对于每个当 $u \geq 0$ 时 (或者至少对于所有的 u_i 和 $u = 0, 1, \dots$) 有定义的函数 $\phi(u)$, 有

$$\sum_{i=k}^l u_i^p \phi(u_i) \leq M_p \sum_{[\frac{1}{2} u_k] \leq n < u_l} (n+1)^{p-1} \phi(n). \quad (1)$$

证明 首先假设 $p \geq 1$. 若 $\phi(u)$ 不是对于所有的 $u \geq 0$ 有定义, 则通过线性插值把它延拓. 在证明中, 规定 $u_{l-1} = \frac{1}{2} u_l$, 那末, 因为函数 t^{p-1} 是递增的:

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^l u_i^p \phi(u_i) &\leq \sum_{i=k}^l (4u_{i-1})^{p-1} \phi(u_i) u_i \\ &\leq 2 \cdot 4^{p-1} \sum_{i=k}^l u_{i-1}^{p-1} \phi(u_i) (u_i - u_{i-1}) \\ &\leq 2 \cdot 4^{p-1} \int_{u_{k-1}}^{u_l} t^{p-1} \phi(t) dt. \end{aligned}$$

由于当 $n \leq t \leq n+1$ 时, $t^{p-1} \phi(t) \leq (n+1)^{p-1} \phi(n)$, 故上述积分不超过

$$\sum_{[u_{k-1}] \leq n < u_l} (n+1)^{p-1} \phi(n).$$

如果 $p < 1$, 则 t^{p-1} 递减, 证明是类似的. 证毕. $\square$

定理 4 存在常数 M , 使得对于每个 $f \in O^*$, 有

$$\omega(f, h) \leq Mh \sum_{0 \leq n \leq h^{-1}} E_n^*(f) \quad (h > 0). \quad (2)$$

对于高阶连续模有着类似的定理. 事实上, 定理 4 是下述定理在 $p=1$ 时的特殊情形.

定理 5 存在常数 $M_p (p=1, 2, \dots)$, 使得对于每个函数 $f \in C^*$, 有

$$\omega_p(f, h) \leq M_p h^p \sum_{0 \leq n \leq h^{-1}} (n+1)^{p-1} E_n^*(f) \quad (h > 0). \quad (3)$$

定理 5 的证明 对于每一个 n , 以 T_n 表示 f 的最佳逼近三角多项式, 即 $\|f - T_n\| = E_n^*(f)$. 若 $h > 1$, 则 (3) 成为 $\omega_p(f, h) \leq M_p h^p E_0^*(f)$, 其正确性是由于 3.6(3) 和 3.6(1), 可得

$$\omega_p(f, h) = \omega_p(f - T_0, h) \leq 2^p \|f - T_0\| = 2^p E_0^*(f).$$

假定 $0 < h \leq 1$, 对于差分 $\Delta_h^k f(x)$, 利用 3.6(4) 知道: 当 $k=0, 1, \dots$ 时, 有

$$\begin{aligned} |\Delta_h^k f(x)| &\leq |\Delta_h^k T_{2^k}(x)| + 2^p E_{2^k}^*(f) \\ &\leq h^p \|T_{2^k}^{(p)}\| + 2^p \phi(2^k), \end{aligned} \quad (4)$$

这里已置 $\phi(n) = E_n^*(f)$. 由此看到必须估计 $\|T_{2^k}^{(p)}\|$. 我们有

$$T_{2^k}^{(p)}(x) = [T_1^{(p)}(x) - T_0^{(p)}(x)] + \sum_{i=1}^k [T_{2^i}^{(p)}(x) - T_{2^{i-1}}^{(p)}(x)]. \quad (5)$$

为了估计最后一个和中的项, 注意到

$$\|T_{2^i} - T_{2^{i-1}}\| \leq 2\phi(2^{i-1}) \quad (i=1, 2, \dots), \quad \|T_1 - T_0\| \leq 2\phi(0),$$

并应用 Bernstein 不等式 3.2(5). 根据引理 1, 可得

$$\begin{aligned} \|T_{2^k}^{(p)}\| &\leq 2\phi(0) + 2^{p+1} \sum_{i=1}^k (2^{i-1})^p \phi(2^{i-1}) \\ &\leq M'_p \sum_{0 \leq n \leq 2^k-1} (n+1)^{p-1} \phi(n). \end{aligned} \quad (6)$$

然而

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq n \leq 2^k} (n+1)^{p-1} \phi(n) &\geq \phi(2^k) \sum_{1 \leq n \leq 2^k} (n+1)^{p-1} \\ &\geq M''_p 2^{kp} \phi(2^k), \quad M''_p > 0, \end{aligned}$$

于是由(4)得到

$$|\Delta_h^p f(x)| \leq \text{const}(h^p + 2^{-kp}) \sum_{n=0}^{2^k} (n+1)^{p-1} \phi(n).$$

这样,显然只要取 $k=0, 1, \dots$, 使 $2^k \leq h^{-1} < 2^{k+1}$ 便可导出(3).

证毕.】

下面考察几个例子. 设

$$E_n^*(f) = O(n^{-\alpha}) \quad (0 < \alpha \leq 1).$$

由定理 4 知道, 当 $\alpha < 1$ 时, 有

$$\omega(f, h) = O(1)h \sum_{1 \leq n \leq h^{-1}} n^{-\alpha} = O(1)h \int_0^{h^{-1}} x^{-\alpha} dx = O(h^\alpha) \quad (0 < h \leq 1);$$

而当 $\alpha=1$ 时, 有 $\omega(f, h) = O(h \log(1/h))$. 在同样的假设下, 定理 5 给出 $\omega_2(f, h) = O(h^\alpha)$ ($0 < \alpha \leq 1$). 将这些事实与定理 2 相结合, 作为重要的特殊情形, 可得到

定理 6 (Bernstein [35]) 函数 $f \in C^*$ 属于类 $\text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha < 1$), 当且仅当

$$E_n^*(f) = O(n^{-\alpha}). \quad (7)$$

定理 7 (Zygmund [106]) 函数 $f \in C^*$ 是亚光滑的, 当且仅当 $E_n^*(f) = O(n^{-1})$.

定理 7 表明了这样的事实, 为了描述某些逼近类, 除了 $\omega(f, h)$ 外, 高阶连续模也是必需的.

通过简单的计算, 即可导出几个更特殊的类:

(a) $E_n^*(f) = O(\log^{-k} n)$ ($k > 0$) 成立, 当且仅当 $\omega(f, h) = O(\log^{-k}(1/h))$;

(b) 若 $E_n^*(f) = O(\psi(1/n))$, 其中 $\psi(u)$ ($0 < u \leq 1$) 是正值递增函数, 则对于较小的 h , 有

$$\omega(f, h) = O(1)h \int_h^1 t^{-2} \psi(t) dt.$$

5. 可微函数

倘若 $E_n^*(f)$ 充分快地趋于零时, 则可证明导数 $f', f'', \dots$ 存在, 并且还能估计它们的逼近阶.

定理 8 若对某个整数 $p \geq 1$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1} E_n^*(f) < +\infty, \quad (1)$$

则 $f^{(p)}$ 存在且连续, 并且它的逼近阶满足

$$M_n^*(f^{(p)}) \leq M_p \sum_{[n/2]}^{\infty} k^{p-1} E_k^*(f), \quad (2)$$

这里常数 M_p 仅与 p 有关.

证明 设 $T_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 阶最佳逼近多项式, 则

$$f(x) - T_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \{T_{2^i n}(x) - T_{2^{i-1} n}(x)\}. \quad (3)$$

这个级数是一致收敛的. 根据(1)可推知: 由形式微分所得的级数

$$T_n^{(r)}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \{T_{2^i n}^{(r)}(x) - T_{2^{i-1} n}^{(r)}(x)\} \quad (1 \leq r \leq p) \quad (4)$$

也一致收敛, 因其第 i 项的范数不超过 [由 3.2(5)]

$$2^{ir} n^r \|T_{2^i n} - T_{2^{i-1} n}\| \leq 2 \cdot 2^{ir} n^r \phi(2^{i-1} n), \quad \phi(n) = E_n^*(f), \quad (5)$$

而级数 $\sum (2^{i-1} n)^r \phi(2^{i-1} n)$ 的收敛性可由引理 1 推出.

根据关于一致收敛级数的熟知定理, $f^{(p)}(x)$ 存在且等于级数(4)的和. 这就证明了定理的第一部分.

对于第二部分, 根据引理 1, 可写为

$$\begin{aligned} \|f^{(p)} - T_n^{(p)}\| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \|T_{2^i n}^{(p)} - T_{2^{i-1} n}^{(p)}\| \\ &\leq \text{const} \sum_{i=1}^{\infty} (2^{i-1} n)^p \phi(2^{i-1} n) \\ &\leq \text{const} \sum_{[n/2]}^{\infty} k^{p-1} \phi(k). \end{aligned}$$

这就完成了定理的证明. **■**

当然,一旦由(2)知道了 $E_n^*(f^{(p)})$, 便可以根据定理 4 来估计 $f^{(p)}$ 的连续模. 下面将限于讨论最简单的特殊情形.

定理 9 周期 2π 的连续函数 f 属于类 $X_{p\alpha}$ ($p=0, 1, \dots$, $0 < \alpha < 1$), 当且仅当

$$E_n^*(f) = O\left(\frac{1}{n^{p+\alpha}}\right). \quad (6)$$

6. 附 记

1. 设 $\psi(u) > 0$ 是对于 $0 < u \leq 1$ 有定义的递增函数, 为了拓广定理 6, 自然会问: “对于怎样的 ψ , $E_n^*(f) = O(\psi(n^{-1}))$ 等价于 $\omega(f, h) = O(\psi(h))$?” Lozinskiĭ, Bari 与 Stočkin [33] 给出了这个问题的回答. 他们指出: 存在着常数 $C > 1$, 使

$$1 < \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\psi(Qu)}{\psi(u)} \leq \overline{\lim}_{u \rightarrow 0} \frac{\psi(Qu)}{\psi(u)} < C.$$

2. 设 B 是实轴 R : $-\infty < x < +\infty$ 上一致连续且有界的所有实(或复)的函数按一致范数组成的空间, 则既不能用 R 上无界的代数多项式, 也不能用周期为 2π 的三角多项式来逼近 B 中所有的函数. 在 1946 年, Bernstein ([2, 第 II 卷, 第 371~394 页]) 引入了合适的逼近工具.

一个复变量 z 的整函数 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ 是 $\sigma (\geq 0)$ 阶的 (按 Bernstein 的术语), 是指它满足下述的等价条件之一:

$$(a) \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k! |c_k|} \leq \sigma;$$

$$(b) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r} \leq \sigma, \text{ 其中 } M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|;$$

(c) 对于每个 $\varepsilon > 0$ 和所有充分大的 $|z|$, 有

$$|f(z)| \leq e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}.$$

若 B_σ 是所有在 R 上有界的 σ 阶整函数类, 在此定义 $A_\sigma(f) = f \in B$ 借助 $g_\sigma \in B_\sigma$ 的逼近的阶——为 $\|f - g_\sigma\|$ 对于所有 $g_\sigma \in B_\sigma$ 的极小值. 对于 $A_\sigma(f)$, 有类似于本章中关于三角逼近所述的那些定理. 现举最简单的例子如下:

$$A_\sigma(f) \leq \text{const } \omega\left(f, \frac{1}{\sigma}\right);$$

若 $A_\sigma(f) \leq \sigma^{-\alpha} (0 < \alpha < 1)$, 则 $f \in \text{Lip } \alpha$. 应该注意, n 阶三角多项式属于 B_n ; 反之, 若 $g \in B_\sigma$ 是周期为 2π 的, 则 g 是 $[\sigma]$ 阶三角多项式 (见 [1] [15]).

问 题

1. 若 $(a_0/2) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ 是函数 $f \in C^*$ 的 Fourier 级数, 则

$$\frac{1}{2}|a_{n+1}| \leq E_n^*(f) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|.$$

2. 假设 $h \rightarrow 0$ 时, $\omega(f, h) \log(1/h) \rightarrow 0$, 则函数 $f \in C^*$ 的 Fourier 级数是一致收敛的.

3. 以 $E_n(f)$ 表示函数 $f \in C^*$ 借助于没有常数项的三角多项式逼近的阶. 则存在着常数 M , 使得对于所有平均值为零的 f , 有

$$E_n(f) \leq M \omega(f, n^{-1}).$$

4. 若函数 $f \in C^*$ 有连续导数 f' , 则 $E_n(f) \leq M n^{-1} E_n(f')$ [提示: 考察 $f - T_n$ 的连续模, 这里 T'_n 逼近 f'].

5. 从定理 2 导出定理 3.

6. 利用定理 2 的证明方法, 证明: 对于 $f \in \text{Lip } \alpha (0 < \alpha < 1)$, 有 $\|f - \sigma_n(f)\| \leq \text{const } n^{-\alpha}$.

7. 若 $f \in C^*$ 有连续导数, 则 $n E_n^*(f) \rightarrow 0$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} E_n^*(f) < +\infty$, 则 f 有连续导数.

8. 从下方估计 $N^{-1} \sum_0^N E_n^*(f)$; 从上方估计 $N^{-1} M^{-1} \sum_0^{NM} E_n^*(f)$, 从而

证明: 对于 $h \rightarrow 0$, 假如 $\omega(f, h) \sim h^\alpha$, 那么 $E_n^*(f) \sim n^{-\alpha} (0 < \alpha < 1)$.

9. 试证明, 若 $\omega(f', h) \sim h^\alpha (0 < \alpha < 1)$, 则 $E_n^*(f) \sim n^{-1-\alpha}$. 再证明当 $\alpha=1$ 时问题 8 的命题.

10. 假设已知当 $f \in \text{Lip}1$ 时定理 2 是成立的. 由此利用 f 借助于分段线性函数的逼近, 而不利用积分算子, 导出定理 2 的(8)式.

11. 若 $f \in C^*$ 有二阶连续导数, 则对于 Jackson 多项式 J_n , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 [J_n(f, x) - f(x)] = \frac{3}{2} f''(x) \quad (\text{Natanson}).$$

第五章

借助代数多项式逼近的阶

1. 引言

设 f 是 $[-1, +1]$ 上具有连续模 $\omega(h)$ 的连续函数. 要获得 f 借助于 n 次多项式 P_n 逼近的阶的一个粗略估计, 是很容易的. 现在考察属于 C^* 的函数 $g(t) = f(\cos t)$, 若 t 的变化幅度为 h , 则 $\cos t$ 的变化幅度至多也是 h . 因此, g 的连续模不会超过 $\omega(h)$. 根据第四章的定理 2, 存在三角多项式 $T_n(t)$, 使得

$$|g(t) - T_n(t)| \leq M\omega\left(\frac{1}{n}\right);$$

由该定理的证明可看到, 对于偶函数 $g(t)$, $T_n(t)$ 也可取偶的. 这时, $T_n(t)$ 恰好是变量 $x = \cos t$ 的代数多项式. 从而得到

$$|f(x) - P_n(x)| \leq M\omega\left(\frac{1}{n}\right) \quad (-1 \leq x \leq 1). \quad (1)$$

然而, 如果应用同一代换 $x = \cos t$ 于第四章的逆定理 (见定理 6), 则只能得到 $E_n(f) = O(n^{-\alpha})$ ($0 < \alpha < 1$) 对于每个区间 $[-1 + \delta, 1 - \delta]$ ($\delta > 0$) 蕴含着 $f \in \text{Lip}_M \alpha$, 其中 M 当 $\delta \rightarrow 0$ 时增加到 $+\infty$. 故遵循这一途径是不能完全刻划出 $[-1, 1]$ 上的类 $\text{Lip} \alpha$ 的特征的. 出现这种现象的原因曾被 Nikol'skii [84] 所揭示, 他指出了, 在接近区间端点处, 对多项式逼近的性能是有增益的. 其后, Timan [96] 获得了下述结果:

定理 1 存在着常数 M 使得对于每个函数 $f \in C[-1, +1]$ 都有多项式 $P_n(x)$ 的序列, 适合

$$|f(x) - P_n(x)| \leq M\omega(f, \Delta_n(x)) \quad (-1 \leq x \leq 1, n=0, 1, \dots), \quad (2)$$

其中 $\Delta_n(x)$ 的定义如下:

$$\Delta_n = \Delta_n(x) = \max\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \quad (n=1, 2, \dots), \\ \Delta_0(x) = 1. \quad (3)$$

这样, 当 x 接近于 -1 或 $+1$ 时, (2) 本质地改进了 (1). 函数 $\Delta_n(x)$ 或类似的函数 $\sqrt{1-x^2}/n$ 在借助代数多项式逼近的理论中是经常出现的. 此外的例子可见本章的定理 8 和第七章的定理 11.

定理 2 若函数 f 在 $[-1, +1]$ 上有连续导数 $f', \dots, f^{(p)}$, 则存在多项式 $P_n(x)$ 的序列, 使得

$$|f(x) - P_n(x)| \leq M_p \Delta_n(x)^p \omega(f^{(p)}, \Delta_n(x)) \quad (-1 \leq x \leq 1, n=p, p+1, \dots), \quad (4)$$

常数 M_p 仅与 p 有关.

这个定理不能再改善了: Dzjadyk [43] 对于 $f \in \text{Lip}\alpha$ 或 $f^{(p)} \in \text{Lip}\alpha$ 的情形建立了它们的逆定理 (见第 4 节).

定理 1 和定理 2 的证明将以代换 $x = \cos t$ 为基础. 但采用了比前面更为精细的方法, 这需要下述 Jackson 算子的推广 [见 4.2(7)]:

$$J_n(t) = J_{nr}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+u) K_{nr}(u) du, \quad (5)$$

其中核 $K_n = K_{nr}$ 是与第四章第 3 节相同的:

$$K_{nr}(t) = L_{nr}(t) \quad \left(n' = \left[\frac{n}{r}\right] + 1\right),$$

$$L_{nr}(t) = \lambda_n^{-1} \left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right)^{2r}, \quad (6)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} L_{nr}(t) dt = 1 \quad (n, r=1, 2, \dots).$$

特别, 对于 $r=1$, 我们获得 1.2(12) 所给定的算子 $\sigma_{n+1}(f)$, 而对于 $r=2$, 获得 4.2(7) 所给定的 Jackson 算子. 我们知道, K_{nr} 以及 J_{nr} 是 n 阶三角多项式; 当 f 是偶函数时 J_{nr} 是偶的.

关于 K_{nr} 的主要引理关联着正值函数 $\phi(u)$ ($u \geq 0$), 它关于 u 是递增的, 并且对于某个正整数 m 满足条件

$$\phi(\lambda u) \leq (\lambda+1)^m \phi(u) \quad (\lambda \geq 0, u \geq 0). \quad (7)$$

例如, 当 ω 是连续模时, 形如 $\phi(u) = u^p \omega(u)$ 的函数对于 $m=p+1$ 满足条件 (7) [见 3.5(4)].

下述技巧性的引理归并了几乎所有在第 2 和第 3 节中所需的计算.

引理 1 设有具下述性质的常数 B_r ($r=1, 2, \dots$). 若 ϕ 和 m 有上述的性质, 而 s 是适合 $2s+m \leq 2r-2$ 的正整数, 则对于 $n=1, 2, \dots$, $-\pi \leq t \leq \pi$, 有

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} |\cos t - \cos(t+u)|^s \phi\left(\delta_n(t) + \frac{|u|}{n}\right) K_{nr}(u) du \\ & \leq B_r \delta_n(t)^s \phi(\delta_n(t)), \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\delta_n(t)$ 是由 $\Delta_n(x)$ 通过代换 $x = \cos t$ 后得到的 t 的函数:

$$\delta_0 = 1, \quad \delta_n = \delta_n(t) = \max\left(\frac{|\sin t|}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \quad (n=1, 2, \dots). \quad (9)$$

证明 我们有

$$\begin{aligned} |\cos t - \cos(t+u)| &= 2 \left| \sin \frac{u}{2} \sin\left(t + \frac{u}{2}\right) \right| \\ &\leq 2 \sin^2 \frac{u}{2} + 2 \left| \sin \frac{u}{2} \sin t \right| \leq u^2 + |u| |\sin t|. \end{aligned} \quad (10)$$

又, 由(7)取

$$\lambda = \frac{\delta_n + \frac{|u|}{n}}{\delta_n},$$

还有

$$\phi\left(\delta_n + \frac{|u|}{n}\right) \leq \left(2 + \frac{|u|}{n\delta_n}\right)^m \phi(\delta_n). \quad (11)$$

这就给出了积分(8)的一个上界:

$$2\delta_n^s \phi(\delta_n) \int_0^\pi \left(\frac{u^2 + u|\sin t|}{\delta_n}\right)^s \left(2 + \frac{u}{n\delta_n}\right)^m K_n(u) du. \quad (12)$$

按二项式的公式展开两个括号内的项, 可以看到, 最后的积分不超过形如

$$I = \int_0^\pi \left(\frac{u^2}{\delta_n}\right)^i \left(\frac{u|\sin t|}{\delta_n}\right)^j \left(\frac{u}{n\delta_n}\right)^k K_n(u) du \quad (13)$$

的项的常数倍的有限和, 其中 $i+j=s$, $k \leq m$. 因为 $2i+j+k \leq 2r-2$, 故可应用 4.3(5), 并且得到

$$I \approx \left(\frac{1}{n^2\delta_n}\right)^{i+k} \left(\frac{|\sin t|}{n\delta_n}\right)^j \leq 1.$$

这就推知积分(12)不超过常数 $B(s, m)$. 倘若 r 是给定的, 则 s 和 m 仅取有限个值, 故可取 B_r 为常数 $B(s, m)$ 对于所有 s 与 m 的最大值. 证毕.】

2. 逼近定理

定理 1 的证明 设 $f \in O[-1, +1]$, 先说明

$$|f(\cos t) - J_n(t)| \leq M\omega(\delta_n(t)). \quad (1)$$

其中 M 是常数, J_n 是由 4.2(7) 或 1(5) 在 $r=2$ 时给出的函数 $f(\cos t)$ 的 Jackson 多项式. 从而有

$$f(\cos t) - J_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(\cos t) - f(\cos(t+u))] K_n(u) du. \quad (2)$$

由 3.5(4), 方括号中差的绝对值不超过

$$\begin{aligned} & \omega(|\cos t - \cos(t+u)|) \\ & \leq \left[\frac{|\cos t - \cos(t+u)|}{\delta_n} + 1 \right] \omega(\delta_n). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} & |f(\cos t) - J_n(t)| \\ & \leq \omega(\delta_n) \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{|\cos t - \cos(t+u)|}{\delta_n} + 1 \right] K_n(u) du, \end{aligned}$$

并且, (1) 可由引理 1 设 $r=2, s=1, \phi(u) \equiv 1, m=0$ 推得.

因为 J_n 是偶的 n 阶三角多项式, 所以 (1) 给出

$$|f(x) - P_n(x)| \leq M\omega(\Delta_n) \quad (n=1, 2, \dots),$$

同时还有

$$|f(x) - f(0)| \leq \omega(1) = \omega(\Delta_0). \quad \text{证毕.} \quad \blacksquare$$

引理 2 假定 $B_r (r=1, 2, \dots)$ 是引理 1 的常数. 设 ϕ 是满足 1(7) 的正值递增函数, 再设 $2r \geq m+4$. 倘若对于某个 $n=1, 2, \dots$, 函数 f 具有对于所有实的 t 满足

$$|f'(\cos t)| \leq \phi(\delta_n(t)) \quad (3)$$

的连续导数, 那么对于以 $f(\cos t)$ 代替 $f(t)$ 后的 1(5) 的多项式 J_{nr} 有

$$|f(\cos t) - J_n(t)| \leq B_r \delta_n(t) \phi(\delta_n(t)). \quad (4)$$

证明 把差 (4) 写成 (2) 的形式, 这时有

$$\begin{aligned} & |f(\cos t) - f(\cos(t+u))| \\ & = |\cos t - \cos(t+u)| |f'(\cos \xi)|, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\xi = t + \theta u (0 \leq \theta \leq 1)$. 用 $\phi(\delta_n(\xi))$ 来控制 $f'(\cos \xi)$, 现在

$$\begin{aligned} \delta_n(\xi) &= \max \left\{ \frac{|\sin \xi|}{n}, \frac{1}{n^2} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \frac{|\sin t|}{n} + \frac{|\sin \theta u|}{n}, \frac{1}{n^2} \right\} \leq \delta_n(t) + \frac{|u|}{n}. \end{aligned} \quad (6)$$

因此,

$$\begin{aligned} & |f(\cos t) - J_n(t)| \\ & \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\cos t - \cos(t+u)| \phi\left(\delta_n + \frac{|u|}{n}\right) K_n(u) du. \end{aligned}$$

可应用具有 $s=1$ 的引理 1 得出 (4).

证毕.】

引理 3 存在着具有下述性质的常数 $B'_m (m=0, 1, \dots)$. 设 f 在 $[-1, +1]$ 上有连续导数, 并且对于 1(7) 型的正值递增函数 ϕ , 有

$$|f'(x) - P_n(x)| \leq \phi(\Delta_n(x)) \quad (-1 \leq x \leq 1), \quad (7)$$

其中 P_n 是某个次数为 $n=0, 1, \dots$ 的多项式, 那么存在着 $n+1$ 次多项式 Q_{n+1} , 使得

$$|f(x) - Q_{n+1}(x)| \leq B'_m \Delta_{n+1}(x) \phi(\Delta_{n+1}(x)) \quad (-1 \leq x \leq 1). \quad (8)$$

证明 首先假定 $n \geq 1$. 设 P_{n+1} 是 P_n 的积分, 又设 r 是使 $2r \geq m+4$ 的最小整数. 函数 $g=f-P_{n+1}$ 满足 (3), 从而可以导出 (4). 于是 $|f(x) - Q_{n+1}(x)| \leq B_r \Delta_n \phi(\Delta_n)$, 其中 $Q_{n+1}(x) = J_n(t) + P_{n+1}(x) (\cos t = x)$ 是 x 的 $n+1$ 次多项式. 注意 $\Delta_n \leq 4\Delta_{n+1}$. 对于 $n=0$, (8) 可由 (7) 通过积分而得到.

证毕.】

定理 2 可以通过多次应用引理 3 从定理 1 推出.

3. 关于多项式导数的不等式

为了证明下一节的逆定理, 需要一些比 Bernstein 不等式 3.2(4) 更广 (由 Dzyadyk [43] 和 Brudnyi 得出) 的不等式. 如同第 2 节, 其运算首先对三角多项式和 Jackson 核进行, 然后再转换成关于代数多项式的命题. 我们从寻找 n 阶三角多项式 T_n 的导数用多项式自身所表达的积分表示式着手, 这种

类型的一个简单公式可从 1.2(9) 导出. 因为算子 $s_n(f)$ 对于 n 阶三角多项式不变, 故有

$$T_n(t) = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(u) D_n(u-t) du,$$

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \cos u + \cdots + \cos nu.$$

求微分即得

$$T'_n(t) = -\pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(t+u) D'_n(u) du,$$

$$D'_n(u) = -(\sin u + \cdots + n \sin nu).$$
(1)

三角多项式 $\pi^{-1} D'_n(u)$ 的绝对值不超过 n^2 .

更一般地, 对于 $r=0, 1, \dots; n=1, 2, \dots$, 可以证明

$$T'_n(t) = 2^{2r} n^{-2r+2} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(t+u) H_{nr}(u) \bar{K}_{nr}(u) du,$$

$$\bar{K}_{nr}(u) = \left(\frac{\sin(nu/2)}{\sin(u/2)} \right)^{2r},$$
(2)

其中 $H_{nr}(u)$ 是某个确定的三角多项式, 它有性质 $|H_{nr}(u)| \leq 1$; 而核 $\bar{K}_{nr}$ 是以显见的形式关联着 L_{nr} (参见 1(6)).

对于 $r=0$, (2) 可以由 (1) 导出, 于是, 可以通过对 r 归纳来证明 (2). 假设对于某个 r 和所有的 $n=1, 2, \dots$ 有多项式 H_{nr} 存在. 若 $S_{2n}(t)$ 是某个 $2n$ 阶的三角多项式, 那么由 (2), 有

$$S'_{2n}(0) = 2^{2r} (2n)^{-2r+2} \int_{-\pi}^{\pi} S_{2n}(u) H_{2n,r}(u) \bar{K}_{2n,r}(u) du. \quad (3)$$

特别, 可以取

$$S_{2n}(t) = T_n(x+t) \left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right)^2,$$

其中 T_n 是任意的 n 阶多项式, 因为第二个因子是 $n-1$ 阶多项式. 由于

$$S'_{2n}(0) = n^2 T'_n(x)$$

以及
$$\tilde{K}_{2n,r}(u) = 2^{2r} \left(\cos \frac{1}{2} nu \right)^{2r} \tilde{K}_{nr}(u),$$

关系式(3)变成

$$T'_n(x) = 2^{2(r+1)} n^{-2r} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(x+u) H_{n,r+1}(u) \tilde{K}_{n,r+1}(u) du.$$

其中
$$H_{n,r+1}(u) = H_{2n,r}(u) \left(\cos \frac{1}{2} nu \right)^{2r}$$

也是绝对值不超过1的三角多项式.

下面需将1(3)的函数 $\Delta_n(x)$ 稍加拓广. 对于 $0 < a \leq 1$, $|x| \leq a$, 置

$$\Delta_n(x, a) = \max \left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{n}, \frac{1}{n^2} \right) \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$\Delta_0(x, a) = 1.$$

利用表达式(2)可证明

引理4 设 $0 < a \leq 1$, $0 < q < a$, 又设 ϕ 是满足1(7)的正值递增函数, 则存在着具有下述性质的常数 $M = M(a, q, m)$: 如果对于 n 次代数多项式 P_n , 有

$$|P_n(x)| \leq \phi(\Delta_n(x, a)), \quad |x| \leq a, \quad (4)$$

则对于 $a_1 = a - qn^{-2}$, 有

$$|P'_n(x)| \leq M \Delta_n(x, a_1)^{-1} \phi(\Delta_n(x, a_1)), \quad |x| \leq a_1. \quad (5)$$

证明 置 $x = a \cos t$. 因为 $\Delta_n(x, a) \leq \delta(t)$, 可以看到 $T_n(t) = P_n(a \cos t)$ 是一个满足 $|T_n(t)| \leq \phi(\delta_n(t))$ 的 n 阶三角多项式. 选取 r 使 $m \leq 2r - 2$, 并且利用(2)来估计 T'_n , 则得到

$$|P'_n(x)| a |\sin t| \leq 2^{2r} n^{-2r+2} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\delta_n(t+u)) \tilde{K}_{nr}(u) du.$$

但是, 由 1(6), $\bar{K}_{nr} = \lambda_n L_{nr} = \lambda_n K_{Nr}$, $N = r(n-1)$, 而且 $\delta_n \approx \delta_N(t)$ 一致成立. 因此,

$$\begin{aligned} |P'_n(x)| a |\sin t| &\leq \text{const } n \int_{-x}^x \phi\left(\delta_n(t) + \frac{|u|}{n}\right) K_{Nr}(u) du \\ &\leq \text{const } n \phi(\delta_N(t)) \leq \text{const } n \phi(\delta_n(t)). \end{aligned} \quad (6)$$

这里, 利用了 4.3(2)、不等式 $\delta_n(t+u) \leq \delta_n(t) + |u|/n$ 以及当 $s=0$ 时的引理 1. 由 a_1 的定义推出

$$\sqrt{a^2 - a_1^2} \approx \frac{1}{n}. \quad (7)$$

因此, 对于 $|x| \leq a_1$, 有

$$\begin{aligned} a |\sin t| &= \sqrt{a^2 - x^2} \leq \sqrt{a^2 - a_1^2} + \sqrt{a_1^2 - x^2} \\ &\leq \sqrt{a_1^2 - x^2} + \text{const } n^{-1}. \end{aligned}$$

于是 $\delta_n(t) \leq \text{const } \Delta_n(x, a_1)$. 从而, 由 1(7), 有

$$\phi(\delta_n(t)) \leq \text{const } \phi(\Delta_n(x, a_1)), \quad |x| \leq a_1.$$

$$\text{又} \quad a |\sin t| \geq \sqrt{a^2 - a_1^2} \geq \text{const } n^{-1}.$$

所以 $n |\sin t|^{-1} \leq \text{const } n^2$.

另一方面, $a |\sin t| \geq \sqrt{a_1^2 - x^2}$. 这就导出

$$\frac{n}{|\sin t|} \leq \text{const } \min \left\{ n^2, \frac{n}{\sqrt{a_1^2 - x^2}} \right\} = \frac{\text{const}}{\Delta_n(x, a_1)}, \quad |x| \leq a_1.$$

于是, (6) 含有 (5).

证毕.】

定理 3 设 $r=0, 1, \dots$, 又设 ω 是连续模. 若 n 次代数多项式 P_n 满足

$$|P_n(x)| \leq \Delta_n(x)^r \omega(\Delta_n(x)), \quad |x| \leq 1, \quad (8)$$

则仅有与 r 有关的常数 M_r , 使

$$|P'_n(x)| \leq M_r \Delta_n(x)^{r-1} \omega(\Delta_n(x)), \quad |x| \leq 1. \quad (9)$$

证明 可以假设 $n > 1$, 否则, 由于 $\Delta_0 = \Delta_1 = 1$, 可立即 (或由 Markov 定理) 推出 (9). 对于 $m = r + 1$, 函数 $\phi(u) = u^r \omega(u)$ 满足 1(7). 倘若在 (6) 中置 $a = 1$, 则得到

$$|P'_n(x)| \leq M' \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \Delta_n(x)^r \omega(\Delta_n(x)), \quad |x| \leq 1,$$

而且, 当 $\sqrt{1-x^2} \geq n^{-1}$ 时, 这个不等式与 (9) 相同. 还要证明, 当 $\sqrt{1-x^2} < n^{-1}$ 时 (9) 成立. 根据引理 4, 有

$$|P'_n(x)| \leq M \Delta_n(x, a_1)^{r-1} \omega(\Delta_n(x, a_1)), \quad (10)$$

$$|x| \leq a_1 = 1 - qn^{-2}.$$

现在取 $q = (r+1)^{-1}$. 若 $r \geq 1$, 则可再次应用引理 4. 在应用引理 4, $j = 1, 2, \dots, r+1$ 次之后, 将有

$$|P_n^{(r)}(x)| \leq M' \Delta_n(x, a_j)^{r-j} \omega(\Delta_n(x, a_j)), \quad (11)$$

$$|x| \leq a_j \quad (j = 1, \dots, r+1),$$

其中 $a_j = 1 - jqn^{-2}$. 置 $b = a_{r+1} = 1 - n^{-2}$. 函数 $\omega(u)/u$ 未必是递减的. 不过, 由 3.5(4), 对于 $0 < u \leq u'$, 有

$$\omega(u')/u' \leq 2\omega(u)/u.$$

对于 $|x| \leq b$, $\Delta_n(x, b)$ 的最小值等于 $x = b$ 时的值 n^{-2} . 因此, 由 (11), 置 $j = r+1$, 则有

$$|P_n^{(r+1)}(x)| \leq 2M'n^2 \omega(n^{-2}), \quad |x| \leq 1 - n^{-2}. \quad (12)$$

$P_n^{(r+1)}$ 的这个上界是常数. 由 3.4(2),

$$|P_n^{(r+1)}(x)| \leq M'n^2 \omega(n^{-2}), \quad |x| \leq 1. \quad (13)$$

现在, 置 $j = r$, 注意: (11) 保证了在 $(1 - n^{-2}, 1)$ 中存在着一个点使 $P_n^{(r)}(x)$ 的绝对值不超过 $M'\omega(n^{-2})$, 它就是 $x = a_r$. 因为

$$P_n^{(r)}(x) = P_n^{(r)}(a_r) + \int_{a_r}^x P_n^{(r+1)}(t) dt,$$

由(13)推出, 在 $[1-n^2, 1]$ 上以及类似地在 $[-1, -1+n^{-2}]$ 上 $|P_n^{(r)}(x)| \leq \text{const } \omega(n^{-2})$. 经 r 次积分后, 可得到

$$|P_n'(x)| \leq M_r n^{-2(r-1)} \omega(n^{-2}), \quad 1-n^{-2} \leq |x| \leq 1. \quad (14)$$

但是, 当 $\sqrt{1-x^2} < n^{-1}$ 时, 则 $1-n^2 \leq |x|$, 因此也有 $\Delta_n(x) = n^{-2}$. 此即对 x 的其余值证明了(9). 证毕.】

4. 逆定理

下述定理相应于第四章的定理 4. 证明也是类似的, 不过由于函数 $\Delta_n(x)$ 的出现而变得更为细致.

定理 4 存在着一个常数 M , 若 ω 是连续模, 又若对于函数 $f \in C[-1, +1]$ 和多项式 P_n , 有

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \omega(\Delta_n(x)); \quad n=0, 1, \dots, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

则

$$\omega(f, h) \leq Mh \sum_{1 \leq n \leq h^{-1}} \left(\frac{1}{n} \right). \quad (2)$$

证明 我们来估计 $f(x_1) - f(x_2)$, 其中 $|x_1 - x_2| \leq h$. 有两种可能: 两点 x_1, x_2 属于同一个子区间 $[-1, 0], [0, +1]$, 或者, 所述的差是具有这种性质的两个差的和. 于是, 只需估计差 $f(x+t) - f(x)$ ($x \geq 0, 0 \leq t \leq h, h \leq 1, x+t \leq 1$). 设 $k=0, 1, \dots$ 是任意的. 由(1)可知

$$|f(x+t) - f(x)| \leq |P_{2^k}(x+t) - P_{2^k}(x)| + 2\omega(\Delta_{2^k}(x)). \quad (3)$$

因为 $|P_n(x+t) - P_n(x)| \leq h |P_n'(\xi)|, 0 < \xi \leq x+h$, 故必须找出 $P_{2^k}(y)$ 的估计. 在此有

$$\begin{aligned} |P_{2^k}(y)| &\leq |P_1(y)| + |P_2(y) - P_1(y)| + \dots \\ &\quad + |P_{2^k}(y) - P_{2^{k-1}}(y)|. \end{aligned}$$

注意到

$$\frac{1}{4} \Delta_n(y) \leq \Delta_{2n}(y) \leq \frac{1}{2} \Delta_n(y) \quad (-1 \leq y \leq 1, n=1, 2, \dots). \quad (4)$$

由(1), 3.5(3)以及(4)的第一个不等式, 可得到

$$|P_{2^k}(y) - P_{2^{k-1}}(y)| \leq 2\omega(\Delta_{2^{k-1}}(y)) \leq 8\omega(\Delta_{2^k}(y)).$$

由定理 3,

$$|P'_{2^k}(y) - P'_{2^{k-1}}(y)| \leq \text{const } \Delta_{2^k}(y)^{-1} \omega(\Delta_{2^k}(y)).$$

$$\text{又} \quad |P_1(y) - P_0(y)| \leq 2\omega(\Delta_0),$$

$$\text{因此} \quad |P'_1(y)| \leq 2\omega(\Delta_0) = 2\omega(\Delta_1).$$

于是得到

$$|P'_{2^k}(y)| \leq \text{const} \left\{ \omega(\Delta_1) + \sum_{i=1}^k \Delta_{2^i}(y)^{-1} \omega(\Delta_{2^i}(y)) \right\}. \quad (5)$$

最后的和可以利用第四章的引理 1 来估计, 此时, 置 $\phi(u) = \omega(1/u)$, $u_i = \Delta_{2^i}(y)^{-1} (i=1, 2, \dots)$. 根据(4), 这样做是可能的, 而且由此可导出

$$|P'_{2^k}(\xi)| = O(1) \sum_{1 \leq n \leq H_1} \omega\left(\frac{1}{n}\right), \quad H_1 = \Delta_{2^k}(\xi)^{-1}. \quad (6)$$

因为 ω 是递增的, 所以对于 $0 < t \leq 1$, 有

$$\omega(t) = O(h) \sum_{n \leq t^{-1}} \omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

根据上式、(6)以及(3), 可知

$$|f(x+t) - f(x)| = O(1) \left\{ \Delta_{2^k}(x) \sum_{n \leq H} \omega\left(\frac{1}{n}\right) + h \sum_{n \leq H_1} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \right\}, \quad (7)$$

式中 $H = \Delta_{2^k}(x)^{-1}$.

为了得到(2), 自然需要选取 $k = k(x)$, 使得 $\Delta_{2^k}(x)$ 接近

于 h . 但这样做, 需要计及一个确定的因子 4. 选取 k , 使 $4h \leq \Delta_{2^k}(x) < 16h$ [参照 (4); 若 $4h > 1$, 这样选取是不可能的, 不过 $k=0$ 却明显地符合要求]. 现在证明这时有

$$\Delta_{2^k}(\xi) \geq \frac{1}{2} \Delta_{2^k}(x). \quad (8)$$

事实上, 若 $\Delta_{2^k}(x) = 2^{-2k}$, 则因 $\xi > x > 0$, $\Delta_{2^k}(\xi) = 2^{-2k}$. 另一方面, 若 $\Delta_{2^k}(x) = 2^{-k} \sqrt{1-x^2}$, 则 $\sqrt{1-x^2} \geq 2^{-k}$, 并且由 k 的定义, 有 $4h \leq \Delta_{2^k}(x) = 2^{-k} \sqrt{1-x^2} \leq 1-x^2$. 但随即有

$$\sqrt{1-\xi^2} \geq \sqrt{1-(x+h)^2} \geq \sqrt{1-x^2-3h} \geq \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2},$$

从而再次得到 (8). 对所选的 k 值, 有 $H \leq h^{-1}$, $H_1 \leq h^{-1}$, 于是由 (7) 可知

$$|f(x+t) - f(x)| = O(1)h \sum_{n \leq h^{-1}} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \quad (0 \leq t \leq h).$$

证毕. $\square$

关于可微函数有下述定理:

定理 5 存在着常数 M_p ($p=1, 2, \dots$), 它具有如下的性质: 若 ω 是使

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \omega\left(\frac{1}{n}\right) < +\infty \quad (9)$$

的连续模, 而且若对于 $f \in C[-1, +1]$ 和 n ($n=0, 1, \dots$) 次多项式 $P_n(x)$, 有

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \Delta_n(x)^p \omega(\Delta_n(x)) \quad (-1 \leq x \leq 1), \quad (10)$$

则 f 有连续导数 $f', \dots, f^{(p)}$, 且

$$|f^{(p)}(x) - P_n^{(p)}(x)| \leq M_p \sum_{k \geq [\Delta_n(x)^{-1}] } \frac{1}{k} \omega\left(\frac{1}{k}\right) \quad (-1 \leq x \leq 1). \quad (11)$$

其证明与第四章的定理 8 非常相似, 因而这里不再作详述. 在此 $f = P_n + \sum_{i=1}^{\infty} (P_{2^i n} - P_{2^{i-1} n})$, 而且由于 (10), 级数一致收敛. 导级数

$$P_n^{(p)}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \{P_{2^i n}^{(p)}(x) - P_{2^{i-1} n}^{(p)}(x)\} \quad (12)$$

也一致收敛 (于是表示 $f^{(p)}$). 这是由于

$$|P_{2^i n}(x) - P_{2^{i-1} n}(x)| \leq 2\Delta_{2^{i-1} n}(x)^p \omega(\Delta_{2^{i-1} n}(x)),$$

应用 (4) 及定理 8 于上式, 可获得估计

$$|P_{2^i n}^{(p)}(x) - P_{2^{i-1} n}^{(p)}(x)| = O(1) \omega(\Delta_{2^i n}(x)).$$

在 (12) 中的和表示着差 $f^{(p)} - P_n^{(p)}$. 根据第四章的引理 1, 它等于

$$O(1) \sum_{i=1}^{\infty} \omega(\Delta_{2^i n}(x)) = O(1) \sum_{\left[\frac{\Delta_{2n}(x)^{-1}}{2}\right]}^{\infty} \frac{1}{k} \omega\left(\frac{1}{k}\right).$$

余下的只要注意到由于

$$\left[\frac{1}{2} \Delta_{2n}(x)^{-1}\right] \geq [\Delta_n(x)^{-1}] \geq n,$$

最后的和数关于 x 一致地趋于零.

证毕.]

显然, 从 (11) 和定理 4, 可以得出导数 $f^{(p)}$ 的连续模的估计 [参见第 6 节, 附记 1]. 将它与定理 2 相结合, 就可完整地描述逼近类. 这里仅给出最重要的特殊情形.

定理 6 设 $0 < \alpha < 1$, $p = 0, 1, \dots$, 而且 $f \in O[-1, +1]$. 为使存在多项式 $P_n^{(p)}$ 的序列适合

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \Delta_n(x)^{p+\alpha} \quad (n=0, 1, \dots, -1 \leq x \leq 1) \quad (13)$$

的必要和充分的条件是: $f', \dots, f^{(p)}$ 存在, 而且 $f^{(p)} \in \text{Lip}_{M, \alpha}$, 这里常数 M 仅与 p 有关. 其证明留作练习.

5. 解析函数的逼近

定义在 $I = [-1, +1]$ 上的实或复值函数 f 称为在 I 上是解析的, 乃是指存在包含 I 的某复平面的开集 G 上存在着 f 的解析开拓. 这就是说, 必须存在着 G 上的单值解析函数, 它在 I 上与 f 相同, 若此开拓存在, 则它是唯一的.

由焦点为 ± 1 、半轴之和为 ρ ($\rho > 1$) 的椭圆 E_ρ 作界限的开椭圆域 D_ρ 就是包含 I 的开集的例子之一 [见 3.4(2)]. 此外, 对于每个开集 $G \supset I$, 只要 $\rho > 1$ 充分接近 1, 就有 $D_\rho \subset G$.

根据解析函数的性质可知, 对于每个在 I 上解析的函数 f , 存在具有这样性质的 $\rho_0 > 1$: f 能解析开拓到椭圆域 D_{ρ_0} 上, 但对于任意的 $\rho > \rho_0$, 却不能开拓到 D_ρ 上. 不过我们必须承认 $\rho_0 = +\infty$ 的可能, 这种情况为全平面中解析的函数所实现.

根据定理 6, 对于每个 $A > 0$, 解析函数 f 用代数多项式逼近的阶 $E_n(f)$ 满足 $E_n(f) = O(n^{-A})$. 实际上, 更有 $E_n(f)$ 趋于零的速度并不慢于几何级数 q^n ($0 < q < 1$). 下述由 Bernstein 得到的定理 ([35] 或 [2, 第 I 卷, pp. 41, 93]) 给出了 $E_n(f)$ 的渐近公式, 即下面的关系式 (1). 这个公式是从函数 $g(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ 的最大解析圆半径 R 与它的 Taylor 展开式系数 c_n 之间的关系

$$R^{-1} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}$$

启发而来的.

定理 7 定义在 $[-1, +1]$ 上的函数在此区间上是解析的, 当且仅当 $\overline{\lim} \sqrt[n]{E_n(f)} < 1$, 并且, 更确切地说

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{E_n(f)} = \frac{1}{\rho_0}, \quad (1)$$

其中 ρ_0 是上面所定义的数.

特别, f 有全平面的解析开拓, 当且仅当

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{E_n(f)} = 0.$$

证明 (a) 首先指出, 若 f 在 $D_\rho (1 < \rho \leq +\infty)$ 中是解析的, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{E_n(f)} \leq \rho^{-1}. \quad (2)$$

我们从在 $[-1, +1]$ 上把 f 展开为 Chebyshev 多项式级数

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k O_k(x) \quad (3)$$

着手 (第二章第 7 节). 为得到这一点, 我们注意: $f(\cos t)$ 是具有连续导数的、偶的、周期为 2π 的函数, 而且有收敛的 Fourier 级数

$$f(\cos t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt,$$

$$a_k = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) \cos kt \, dt.$$

代换以 $\cos t = x$ 便得 (3). 因为在 $[-1, +1]$ 上 $|O_k(x)| \leq 1$, 故由 (3), 有

$$E_n(f) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|. \quad (4)$$

从而, 需要估计 $|a_k|$. 在 a_k 的积分中作代换 $z = e^{it}$, 得到沿圆周 $|z| = 1$ 的线积分

$$a_k = \frac{1}{\pi i} \int_C f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right) \frac{z^k + z^{-k}}{2} \frac{dz}{z}. \quad (5)$$

取 ρ_1 使 $1 < \rho_1 < \rho$. 在由圆周 $C_1: |z| = \rho_1^{-1}$ 和 $C_2: |z| = \rho_1$ 作界限的闭环 R 中考察函数

$$g(z) = f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right).$$

我们知道 (第三章第4节), 若 z 在圆周 $|z| = \sigma$ 或 $|z| = \sigma^{-1}$ 上, 则 $w = \frac{1}{2}(z+z^{-1})$ 在椭圆 E_σ 上. 因为 $f(w)$ 在 D_σ 中是解析的, 从而推知 $g(z)$ 在圆环 R 中是解析的. 为了对 a_k 获得较好的估计, 改变积分的轨道, 把积分 (5) 分为两部分: 含 z^{-k} 的积分取在大半径的圆周上; 含 z^k 的积分取在小半径的圆周上. 从而

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} g(z) z^{k-1} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} g(z) z^{-(k+1)} dz.$$

设 M 是在 E_ρ 上 $f(w)$ 的绝对值的最大值, 则第一个积分的绝对值不大于

$$\frac{1}{2\pi} M \left(\frac{1}{\rho_1}\right)^{k-1} 2\pi \rho_1^{-1} = M \rho_1^{-k}.$$

同样, 第二个积分为 $M \rho_1^{-k}$ 所控制, 从而获得 $|a_k| \leq 2M \rho_1^{-k}$. 于是, 由 (4) 可知

$$E_n(f) \leq 2M \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho_1^{-k} = \frac{2M}{\rho_1 - 1} \rho_1^{-n} = M_1 \rho_1^{-n}. \quad (6)$$

因此, $\sqrt[n]{E_n(f)} \leq M_1^{1/n} \rho_1^{-1}$, 而且得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{E_n(f)} \leq \rho_1^{-1}$. 因为可以取 ρ_1 任意地接近 ρ , 这就得到了 (2).

(b) 反之, 设对于某个 $\rho (1 < \rho \leq +\infty)$, (2) 成立. 下面证明 f 在每个椭圆域 $D_{\rho_1} (1 < \rho_1 < \rho)$ 上 (因而在 D_ρ 上) 有解析开拓. 设 $\rho_1 < \rho_2 < \rho$, 则有充分大的 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, $\sqrt[n]{E_n(f)} \leq \rho_2^{-1}$. 记为

$$f(x) = P_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} [P_{n+1}(x) - P_n(x)], \quad (7)$$

这里, P_n 是 f 的最佳逼近多项式, 于是有

$$|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leq 2E_n(f) \leq 2\rho_2^{-n} \\ (-1 \leq x \leq 1, n \geq n_0).$$

利用不等式 3.4(3), 可以对 D_ρ 中所有的 z 估计这个差:

$$|P_{n+1}(z) - P_n(z)| \leq 2\rho_1 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^n; z \in D_\rho, n \geq n_0.$$

因此, 以 z 代替 x 的级数 (7) 在 D_ρ 的每个紧致子集上一致收敛. 它的和在 D_ρ 上是解析的, 此即所求 f 的解析开拓.

由 (a) 和 (b) 可知, 使 f 为解析的最大的椭圆域 D_ρ 是 D_{ρ_0} , 其中 ρ_0 由 (1) 给出. 证毕.】

6. 附 记

1. 可以把定理 4 和 5 的结论 (2) 和 (11) 改写成积分形式

$$\omega(f, h) \leq Mh \int_h^1 \frac{\omega(x)}{x^2} dx \quad (h \geq 0), \quad (1)$$

$$|f^{(p)}(x) - P_n^{(p)}(x)| \leq M_p \Omega(\Delta_n(x)), \quad \Omega(h) = \int_0^h \frac{\omega(x)}{x} dx. \quad (2)$$

(易见, 不论 ω 如何, Ω 都是连续模.) 应用 (1) 于 (2), 并改变积分次序, 则得到当定理 5 的条件满足时, 对于 $f^{(p)}$ 的连续模的估计

$$\omega(f^{(p)}, h) \leq M_p \left\{ \int_0^h \frac{\omega(x)}{x} dx + h \int_h^1 \frac{\omega(x)}{x^2} dx \right\}.$$

(参照 [15, p. 359].)

2. 在定理 1 的阐述中, 用 $\omega_p(f, h)$ ($p=2, 3, \dots$) 代替 $\omega(f, h)$ 是可能的 (Dzjadyk [44], Freud [51], Brudnyi [37]). 虽然在第四章定理 2 的证明中以 ω_2 代替 ω 并不需要作任何附加的工作, 但对于借助代数多项式的逼近, 情况却不一样.

其原因是函数 $f(\cos t)$ 的二阶差并不能直接表为 $f(x)$ 的二阶差.

相应的逆定理也能建立. 我们陈述一个简单的特殊情形: 函数 $f \in C[-1, +1]$ 是亚光滑的, 当且仅当对于某多项式序列 P_n 有 $|f(x) - P_n(x)| \leq M \Delta_n(x)$.

3. 对关于 $x, 1-x$ 有正系数的多项式

$$P_n(x) = \sum_{k+l \leq n} a_{kl} x^k (1-x)^l \quad (a_{kl} \geq 0) \quad (3)$$

以及区间 $[0, 1]$; 有类似的结果成立. 当然, 仅有正值函数 $f \in C[0, 1]$ 才能被逼近. 粗略地说: 倘若在逼近阶的估计中, 以 $\sqrt{n}$ 代替 n , 则本章的结果对于多项式 (3) 仍然成立. 例如 $f \in A_{p,\alpha}$ 成立, 当且仅当对于多项式 (3) 的一个序列, 有 $|f(x) - P_n(x)| \leq \text{const} \bar{\Delta}_n(x)^{p+\alpha}$, 这里

$$\bar{\Delta}_n(x) = \max(\sqrt{x(1-x)n^{-1}}, n^{-1}).$$

(见 Lorentz [75].)

问 题

1. 对于有连续导数的函数 f , 有 $E_n(f) \leq M n^{-1} E_{n-1}(f')$.

2. 由 83 页的论述及问题 1 推证, 对于每个 $p=1, 2, \dots$, 存在常数 M_p , 使得当 $f^{(p)} \in C[a, b]$ 时,

$$E_n(f) \leq M_p n^{-p} \omega\left(f^{(p)}, \frac{1}{n}\right) \quad (n > p).$$

3. 若 $f, f^{(p)} \in C[a, b]$ 且对于某个 $s(0 \leq s < p)$, 有 $f^{(s)}(x) \geq 0$ ($a \leq x \leq b$), 则有多项式 $P_n(x)$ 的序列, 使得 $P_n^{(s)}(x) \geq 0$, 且

$$\|f - P_n\| \leq \text{const} n^{s-p} \omega\left(f^{(p)}, \frac{1}{n}\right) \quad (\text{O. Shisha}).$$

4. 若 $f \in C[0, 1]$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) \geq 0$, 则存在着 $\text{ppc } P_n$, 使

$$|f(x) - P_n(x)| \leq 2\omega(f, \delta_n) \quad (\delta_n = \sqrt{x(1-x)/n}). \quad (*)$$

(见第三章第 9 节附记 2.)

5. 倘若再设 $f'(x)$ 存在, 则 (*) 可被

$$|f(x) - P_n(x)| \leq 2\delta_n \omega(f', \delta_n)$$

所代替. [提示: 在问题 4 和 5 中利用 Bernstein 多项式.]

6. 若 $Q(x) = ax^2 + bx + c$, 则 $B_n(Q, x) - Q(x) = an^{-1}x(1-x)$.

7. 若 $f \in C[0, 1]$, 对于某个 $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, 有 $f(\alpha) = f(\beta)$, 又若 f 在 $[\alpha, \beta]$ 上有正的最大值, 则存在多项式 $Q(x) = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$), 使得 $f(x) \leq Q(x)$ ($\alpha \leq x \leq \beta$), 而且对于某个 γ ($\alpha < \gamma < \beta$), 有 $f(\gamma) = Q(\gamma)$.

8. 若对于 $f \in C[0, 1]$ 及每个 $x \in [\alpha, \beta]$, 有 $f(x) - B_n(x) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ 成立, 则 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上是线性的 (Bajanski 和 Bojanic). [提示: 假设 $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, 则 $f(x) \leq Q(x) + g(x)$, 这里 Q 如在问题 7 中所表示的, 而 g 是在 $[\alpha, \beta]$ 上消失的有界函数.]

9. 证明附记 1 中的 (1) 和 (2).

10. 设 $0 < \alpha < 1$. 对于每个 $\varepsilon > 0$ 和适当选取的多项式 P_n , 函数 $f \in C[-1, 1]$ 容许有逼近 $|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon x^\alpha$ 当且仅当 $f(x) = f(0) + o(x^\alpha)$. 特别, 在定理 1 中 $A_n(x)$ 不能被 $\sqrt{1-x^2}/n$ 所代替.

第六章

借助有理函数逼近, 多变量函数

1. 有理逼近的阶

本书的主要内容是函数的线性逼近, 也就是借助于给定函数的线性组合的逼近. 作为非线性逼近的一个重要情况, 我们将讨论借助有理函数的逼近. 我们知道: n 阶有理函数 $r_n(x)$ 是两个没有公共零点的 n 次多项式的商:

$$r_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \quad (-\infty < x < \infty). \quad (1)$$

在此首先对有理函数作几点简单的注释: 精确到 P_n 和 Q_n 的常数因子, 表达式(1)是唯一的; 有理函数 $r_n(x)$ 可能对某实数 x 取无限值; 两个 n 阶和 m 阶的有理函数的和是 $n+m$ 阶有理函数.

每个函数 $f \in C[a, b]$ 能借助于有理函数逼近, 这是 Weierstrass 定理的直接推论. 描述最佳逼近有理函数的定理也是已知的. 众所周知, n 阶最佳逼近有理函数 r_n 是唯一的 (Walsh [18, 第 351 页]); 设 $f \in C[a, b]$, 差 $f - r_n$ 在 $[a, b]$ 上有 Chebyshev 交错性质 (Ahiezer [1, 第 55 页]). 在一般形式下这类结果的陈述可在 Cheney [38] 中找到.

撇开这些问题, 在第 1 和 2 节中, 我们将限于研究 f 借助有理函数的第 n 逼近阶 $R_n(f)$ 的渐近性态. 若 f 是实直线的子集 A 上的连续函数, 我们定义

$$R_n(f) = R_n(f, A) = \inf_{r_n} \{ \sup_{x \in A} |f(x) - r_n(x)| \}, \quad (2)$$

其中下确界取在所有在 A 上有根的 r_n 上。

显然, $R_n(f) \leq E_n(f)$, 其中 $E_n(f)$ 是 f 在 A 上借助多项式的第 n 逼近阶。

$R_n(f)$ 能比 $E_n(f)$ 小多少呢? 在这个方向上有两类结果: 一方面, 对于许多自然的函数类 $\mathfrak{R}$, 上确界 $\sup_{f \in \mathfrak{R}} R_n(f)$ 和 $\sup_{f \in \mathfrak{R}} E_n(f)$ 渐近相同, 这表明对于 $\mathfrak{R}$ 中“所有除去最好的”函数而采用有理逼近的价值是不大的。这类定理是由 Vituškin [17] 和 Erobir [47] 建立的。本章的定理 3 和 4 就是这方面的。

另一方面, 对于仅有较小奇异性的函数, 有理逼近可能是非常有效的。例如, 在 $[-1, +1]$ 上考察函数 $f(x) = \Gamma(x+2)$, 该函数最靠近于 $[-1, +1]$ 的奇点是奇异部分 $(x+2)^{-1}$ 的极点 $x = -2$ 。因此, 根据第五章的定理 8, $E_n(f)$ 是 ρ^{-n} 阶的, 其中 $\rho = 2 + \sqrt{3}$ 是由 $\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}) = 2$ 确定的。 f 的下一个极点是 $x = -3$ 。根据同一定理, 对于某一多项式 P_n , 差 $f(x) - \{(x+2)^{-1} + P_n(x)\}$ 在 $[-1, +1]$ 上是 ρ_1^{-n} 阶的 ($\rho_1 = 3 + \sqrt{8}$)。

仅仅在最近, 才发现连续函数 f 的一些自然类, 对于它们, $R_n(f)$ 与 $E_n(f)$ 的大小是不同阶的, 这可见附记 4。我们将限于详细地讨论一个很特殊而又非常重要的函数。设在 $A = [-1, 1]$ 上 $h(x) = |x|$, 在 7.1(5) 中, 我们将见到 $E_n(h) \approx n^{-1}$ 。与此形成对照的是

定理 1 (D. J. Newman [82])

$$R_n(h) \leq 3e^{-\sqrt{n}} \quad (n \geq 5). \quad (3)$$

证明 设 $a = e^{-1/\sqrt{n}}$; 若 n 很大, 则 a 接近于 1, 而 a^{n-1} 却接近于零. 现在先来证明

$$\prod_{j=1}^{n-1} \frac{1-a^j}{1+a^j} \leq e^{-\sqrt{n}} \quad (n \geq 5). \quad (4)$$

对于 $t \geq 0$, 有不等式 $(1-t)/(1+t) \leq e^{-2t}$ 成立, 于是有

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1-a^j}{1+a^j} &\leq \exp \left\{ -2 \sum_{j=1}^{n-1} a^j \right\} \\ &= \exp \left\{ -2 \frac{a-a^n}{1-a} \right\}. \end{aligned}$$

但是, 对于 $n \geq 5$, 有

$$2(a-a^n) \geq 2(e^{-1/\sqrt{5}} - e^{-\sqrt{5}}) > 1.$$

又, 对于所有的 $t \geq 0$, $1-e^{-t} \leq t$. 因此, $1/(1-a) \leq \sqrt{n}$, 从而导出 (4).

现在设

$$p(x) = \prod_{k=1}^{n-1} (x+a^k), \quad r_n(x) = x \frac{p(x)-p(-x)}{p(x)+p(-x)}. \quad (5)$$

显然, r_n 是 n 阶有理函数. 现在证明 $n \geq 5$, $x \in A$ 时,

$$||x| - r_n(x)| < 3e^{-\sqrt{n}}.$$

因为 $|x|$ 和 $r_n(x)$ 都是偶的, 故只需考虑 $0 \leq x \leq 1$ 的情形. 对于 $0 \leq x \leq a^n = \exp(-\sqrt{n})$, 是极为平易的, 因这里 $p(-x) \geq 0$, 从而 $0 \leq r_n(x) \leq x$. 因此 $||x| - r_n(x)| \leq x \leq e^{-\sqrt{n}}$.

其次, 有

$$\begin{aligned} ||x| - r_n(x)| &= 2x \left| \frac{p(-x)}{p(x)+p(-x)} \right| \leq \frac{2}{\left| \frac{p(x)}{p(-x)} \right| - 1} \\ &\quad (0 \leq x \leq 1). \end{aligned} \quad (6)$$

若 $a^n \leq x \leq 1$, 则对于某个 j ($0 \leq j \leq n-1$), 有 $a^{j+1} \leq x \leq a^j$. 这时, 由 (4), 有

$$\begin{aligned}
\left| \frac{p(-x)}{p(x)} \right| &= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a^k - x}{a^k + x} \prod_{k=j+1}^{n-1} \frac{x - a^k}{x + a^k} \\
&\leq \prod_{k=1}^j \frac{a^k - a^n}{a^k + a^n} \prod_{k=j+1}^{n-1} \frac{a^j - a^k}{a^j + a^k} \\
&= \prod_{m=n-j}^{n-1} \frac{1 - a^m}{1 + a^m} \prod_{m=1}^{n-j-1} \frac{1 - a^m}{1 + a^m} \\
&= \prod_{m=1}^{n-1} \frac{1 - a^m}{1 + a^m} \leq e^{-\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

因此, 由(6), 若 $a^n \leq x \leq 1$, 则当 $n \geq 5$ 时, 有

$$||x| - r_n(x)| \leq \frac{2}{e^{\sqrt{n}} - 1} \leq 3e^{-\sqrt{n}}. \quad \text{证毕.}]$$

在[82]中, 读者可找到: 当 $n \geq 5$ 时, 有 $R_n(h) \geq \frac{1}{2}e^{-9\sqrt{n}}$ 的证明.

2. 逆 定 理

有理逼近的正定理可从第五章的结果以及不等式 $R_n(f) \leq E_n(f)$ 导出来. 例如, 若在 $[a, b]$ 上, $f \in A_{p\alpha}$ ($p=0, 1, \dots$, $0 < \alpha \leq 1$), 则 $R_n(f) = O(n^{-p-\alpha})$. 在本节, 将建立不完全与它匹配的逆定理, 在它们的陈述中包含着一个小小的例外集. 例如, 若 $R_n(f, A)$ 很小, 只能推出 f 在 $A \setminus e$ 上是很光滑的, 这里 e 是一个任意小的测度的集. 定理 1 表明这是必然的.

同样, 若在 $[a, b]$ 上 $|r_n(x)| \leq M$, 则在 $[a, b]$ 内部可能存在着使 r'_n 较大的点. 例如, 对于小的 δ , $r(x) = \delta^2/(x^2 + \delta^2)$ 在 $[-1, 1]$ 上满足 $|r(x)| \leq 1$, 但 $r'(\delta) = -\frac{1}{2}\delta^{-1}$ 是大的. 从而 Bernstein 不等式对于有理函数并不成立. 但却能导出这个不等式的修正形式.

定理 2 假定 r_n 是 n 阶有理函数, 设 $A \subset (-\infty, +\infty)$.

又设在 A 上 $|r_n(x)| \leq M$. 那么对于每个 $\delta > 0$, 存在着 $(-\infty, +\infty)$ 的子集 e , $me \leq \delta$, 使得在 $A \setminus e$ 上, r_n 属于常数为 $(2/\delta)Mn$ 的类 Lip1.

$$|r_n(x) - r_n(x')| < \frac{2Mn}{\delta} |x - x'| \quad (x, x' \in A \setminus e). \quad (1)$$

证明 在此可假定 r_n 不是常数. 设 F 是 $(-\infty, +\infty)$ 中使 $|r_n(x)| \leq M$ 的子集. 那么 $F \supset A$. 集 F 是有限多个除端点外不相交的区间 I 的并, 在每个区间上 r_n 是单调的. 设 I' 是 r_n 在 I 上的值域. 那么 $I' \subset [-M, M]$. 因为每个方程 $r_n(x) = \text{const}$ 至多有 n 个解, 故区间 I' 覆盖 $[-M, M]$ 至多有 n 次. 从而推得

$$\text{Var}_F r_n = \sum mI' \leq 2nM.$$

现在设 $x_1 < x'_1$ 是 F 中使

$$|r_n(x_1) - r_n(x'_1)| \geq \frac{2Mn}{\delta} (x'_1 - x_1) \quad (2)$$

的两个点. 这蕴含着 $x'_1 - x_1 \leq (\delta/2Mn) \text{Var}_F r_n \leq \delta$. 因此, 存在着满足 (2) 的最大长度的区间 (x_1, x'_1) . 其次, 设 $F_1 = F \setminus (x_1, x'_1)$, 又设 $x_2, x'_2 \in F_1$ 且 (x_2, x'_2) 是异于 (x_1, x'_1) 又使 $|r_n(x_2) - r_n(x'_2)| \geq 2Mn(x'_2 - x_2)/\delta$ 的最大长度的区间. 这个区间与 (x_1, x'_1) 是不相交的, 而且如同前面所指出的: $(x'_1 - x_1) + (x'_2 - x_2) \leq \delta$. 归纳继续此过程, 可以得到一个测度 $me \leq \delta$ 的集 e , 它是有限或可列个不相交区间 (x_n, x'_n) 的并, 在后一情形 $x'_n - x_n \rightarrow 0$. 因此, 在 $F \setminus e$ 上有 (1). 证毕.]

系 (Dolženko [41]) 1. 在定理 2 的假设下存在着集 e_1 , $me_1 \leq \delta$, 使得

$$|r'_n(x)| \leq \frac{2}{\delta} Mn, \quad x \in A \setminus e_1. \quad (3)$$

2. 在同样假设下, 对于每个 $p=1, 2, \dots$, 有

$$|r_n^{(p)}(x)| \leq \frac{C_p M}{\delta^p} n^p \quad (x \in A \setminus e_p), \quad (4)$$

对于某个测度 $me_p \leq \delta$ 的集 e_p 成立, 其中 C_p 是绝对常数.

事实上, 可取 e 和 $A \setminus e$ 中所有孤立点集的并作为 e_1 . 系 2 可由 1 通过归纳法导出.

在下述定理中, f 是 $(-\infty, +\infty)$ 的子集 A 上的连续函数; 我们置 $R_n(f, A) = \phi(n)$.

定理 3 对于每个 $\delta > 0$ 存在集 e , $me \leq \delta$, 使得在 $A \setminus e$ 上 f 的连续模满足

$$\omega(f, h) \leq M \frac{h}{\delta} \left\{ \sum_{0 \leq n \leq \delta/h} \sqrt{\frac{\phi(n)}{n+1}} \right\}^2 \quad (0 < h \leq \delta), \quad (5)$$

其中 M 是绝对常数.

证明 (参照第四章定理 5 的证明) 我们可以找到有理函数 r_n , 使 $|f(x) - r_n(x)| \leq 2\phi(n)$ ($x \in A$, $n=0, 1, \dots$). 设 $k=0, 1, \dots$ 是由不等式 $2^k \leq \delta/h < 2^{k+1}$ 确定的. 对于 $x, (x+t) \in A$, $|t| \leq h$, 有

$$|f(x+t) - f(x)| \leq |r_{2^k}(x+t) - r_{2^k}(x)| + 4\phi(2^k). \quad (6)$$

设 $p_0 = r_1 - r_0$, $p_i = r_{2^i} - r_{2^{i-1}}$ ($i=1, 2, \dots$). 那么有

$$|\Delta_l r_{2^k}(x)| \leq \sum_{i=0}^k |\Delta_l p_i(x)|. \quad (7)$$

我们将由此式导出 $|\Delta_l r_{2^k}(x)|$ 不超过出现于 (5) 中的上界. 设 $l(0 \leq l \leq k)$ 是使 $\Delta_l p_i(x) \neq 0$ 的最大 $i \leq k$. 选取

$$C^{-1} = \frac{1}{8} \left\{ \sqrt{\phi(0)} + \sum_{i=1}^l \sqrt{2^i \phi(2^{i-1})} \right\},$$

并置 $\delta_i = C \sqrt{2^i \phi(2^{i-1})}$ ($i > 0$), $\delta_0 = C \sqrt{\phi(0)}$. 那么 $\sum_0^l \delta_i = \delta$.

根据函数 r_n 的定义, 在 A 上有 $|p_i(x)| \leq 4\phi(2^{i-1})$ ($i > 0$), 并且 $|p_0(x)| \leq 4\phi(0)$. 由定理 2, 可求到这样的集 e_i , $me_i \leq \delta_i$,

使得对于 $x, (x+t) \in A \setminus e$, 有

$$|A_i p_i(x)| \leq \frac{8\phi(2^{i-1})}{\delta_i} 2^{i+1}|t|, \quad |A_i p_0(x)| \leq \frac{8\phi(0)}{\delta_0} 2|t|.$$

因此, 对于 $x, (x+t) \in A \setminus e, e = \bigcup_i e_i$, 以及 $|t| \leq h$, 根据 (7) 可知

$$\begin{aligned} |A_i r_{2^k}(x)| &\leq 16h \left\{ \frac{\phi(0)}{\delta_0} + \sum_{i=1}^k \frac{2^i \phi(2^{i-1})}{\delta_i} \right\} \\ &= \frac{16h\delta}{O^2} \leq \frac{16h}{\delta} \left\{ \sqrt{\phi(0)} + \sqrt{2} \sum_{i=1}^k 2^{(i-1)/2} \sqrt{\phi(2^{i-1})} \right\}^2. \end{aligned}$$

由第四章引理 1 知, 花括号内的和不超过

$$M' \sum_{0 \leq n \leq \delta/h} \sqrt{\phi(n)/(n+1)}.$$

$$\text{又有 } \frac{\delta}{h} \phi(2^k) \leq \text{const} \left\{ \sum_{0 \leq n \leq \delta/h} \sqrt{\frac{\phi(n)}{n+1}} \right\}^2.$$

不等式 (5) 可由这些估计及 (6) 导出来. 证毕.】

例如, 若 $R_n(f, A) \leq Cn^{-\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$), 则在集 $A \setminus e$ 上, 函数 f 属于类 $\text{Lip}_{0, \alpha}$, 这里 $me \leq \delta, C_1 = O'\delta^{-\alpha}$.

函数 g 关于集 A 的导数是在 $x \in A, (x+t) \in A$ 的限制下当 $t \rightarrow 0$ 时 $(g(x+t) - g(x))/t$ 的极限.

引理 1 设函数 $g_n (n=1, 2, \dots)$ 在没有孤立点的集 $A \subset (-\infty, +\infty)$ 上都属于 Lip_{M1} . 假定 g'_n 在 A 上关于 A 存在, 且 $g_n(x) \rightarrow \bar{g}(x), g'_n(x) \rightarrow h(x)$ 在 A 上成立. 那么 $g(x)$ 关于 A 的导数 $g'(x)$ 存在, 且等于 $h(x)$ a.e..

证明 在此可以假设 A 是完全的. 借助于线性插值, 我们开拓函数 g_n, g 到 A 的每个余区间 (a, b) 上. 开拓函数 $\bar{g}_n, \bar{g}$ 属于 Lip_{M1} , 而且有 $\bar{g}_n(x) \rightarrow \bar{g}(x)$. 导数 $\bar{g}'_n$ a.e. 存在; 它们围于 M 并且 a.e. 收敛于 h 的开拓函数 $\bar{h}$. 通过对

$$\bar{g}_n(x) = \bar{g}_n(c) + \int_c^x \bar{g}'_n(x) dx$$

取极限, 得到 $\bar{g}(x) = \bar{g}(c) + \int_c^x \bar{h}(x) dt$. 因此, 由求导得出 $g'(t) = h(t)$ a.e. 于 A . 证毕.】

定理 4 在定理 3 的记号下, 设 (对于某个 $p=1, 2, \dots$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\phi(k)}{k+1} \right)^{1/(p+1)} < +\infty. \quad (8)$$

那么对于每个 $\delta > 0$, 存在集 $e \subset (-\infty, +\infty)$, $me \leq \delta$, 使得在 $A' = A \setminus e$ 上, f 关于 A' 是 p 次连续可微的, 而且

$$R_n(f^{(p)}, A') \leq \frac{M_p}{\delta^p} \left\{ \sum_{k \geq [n/2]} \left(\frac{\phi(k)}{k+1} \right)^{1/(p+1)} \right\}^{p+1}. \quad (9)$$

其证明类似于第四章的定理 8. 在此定义 r_k 如前, 固定 n , 并且置 $q_i = r_{2^i n} - r_{2^{i-1} n}$ ($i=1, 2, \dots$), 则对于 $x \in A$, 一致地有

$$f(x) = r_n(x) + \sum_{i=1}^{\infty} q_i(x). \quad (10)$$

因为在 A 上 $|q_i(x)| \leq 4\phi(2^{i-1}n)$, 故 (4) 蕴含着对某些集 e_i , $me_i \leq \delta_i$ ($i=1, 2, \dots$), 有

$$|q_i^{(p)}(x)| \leq \frac{C_p 4\phi(2^{i-1}n)}{\delta_i^p} (2 \cdot 2^i n)^p, \quad x \in A \setminus e_i, \quad (i=1, 2, \dots). \quad (11)$$

设

$$a_i = \{(2^{i-1}n)^p \phi(2^{i-1}n)\}^{1/(p+1)};$$

不失一般性, 可以假设 $a_i > 0$ ($i=1, 2, \dots$). 根据第四章引理 1 可知, 级数 $\sum a_i$ 收敛, 而且

$$\sum_1^{\infty} a_i \leq \text{const} \sum_{k \geq [n/2]} \left(\frac{\phi(k)}{k+1} \right)^{1/(p+1)}. \quad (12)$$

取 δ_i , 使 $\delta_i = M a_i$, $\sum \delta_i = \delta(p+1)^{-1}$. 那么

$$M = (p+1)^{-1} (\sum a_i)^{-1} \delta,$$

并且 (11) 变成

$$|q_i^{(p)}(x)| \leq O'_p M^{-p} a_i, \quad x \in A \setminus e_i. \quad (13)$$

这表明级数 $\sum q_i^{(p)}$ 在集 $A \setminus e^{(p)}$ 上一致收敛, $e^{(p)} = \bigcup_1^\infty e_i$.

类似地, 集 $e^{(j)}$, $me^{(j)} \leq \delta(p+1)^{-1}$ ($j=1, \dots, p-1$) 是由这样的性质构造的: 在 $A \setminus e^{(j)}$ 上 $\sum q_i^{(j)}$ 一致收敛. 根据引理 1 和定理 2, 只要 $e_0, me_0 \leq \delta(p+1)^{-1}$ 取得适当, 每个级数都是前一级数在 $A' = A \setminus e$ 上的导数, 其中 $e = \bigcup_0^p e^{(j)}$. 于是, 关于 A' 的 $f^{(p)}$ 在 A' 上存在; 且 $|f^{(p)}(x) - r_n^{(p)}(x)|$ 与 $|\sum q_i^{(p)}(x)|$ 相等. 由 (13) 和 (12) 知, 最后这个量不会超过 (9) 的右边, 其中 M_p 仅与 p 有关. 证毕.】

由定理 3 和 4, 可以得到:

定理 5 若 $R_n(f, A) \leq On^{-p-\alpha}$ ($p=0, 1, \dots, 0 < \alpha < 1$), 则 $f^{(p)}$ 在 $A' = A \setminus e$ 上存在, $me \leq \delta$, 并且

$$f^{(p)} \in \text{Lip}_{O, \alpha}, O_1 = O' \delta^{-p-\alpha}.$$

3. 多变量周期函数

多变量函数的逼近, 对于实际计算和理论研究是很重要的. 在第八章就需要本节的定理.

我们将在 s -维环 $K^{(s)} = K \times \dots \times K$ (见第三章第 5 节) 上考察连续函数 $f(x_1, \dots, x_s)$.

范数 $\|f\|$ 是 f 在 $K^{(s)}$ 上绝对值的最大值. 用 $T_{n_1, \dots, n_s}(x_1, \dots, x_s)$ 表示 x_i 的三角多项式, 它关于 x_i 的阶是 n_i ($i=1, 2, \dots, s$). $\|f - T_{n_1, \dots, n_s}\|$ 对于所有给定的 n_i 阶多项式取的最小值是逼近阶 $E_{n_1, \dots, n_s}^*(f)$. 在下述定理中要用到偏连续模 (第三章第 5 节). 这个定理是第四章定理 3 对于 s 个变量函数的推广.

定理 6 设 $f \in C[K^{(s)}]$ 是一个函数, 它有连续偏导数

$\partial^k f / \partial x_i^k$ ($0 \leq k \leq p_i$, $i=1, \dots, s$, $p_i \geq 0$). 假定 $\partial^k f / \partial x_i^k$ 关于 x_i 的连续模不超过 $\omega_i(h)$ ($i=1, \dots, s$), 那么

$$E_{n_1, \dots, n_s}^*(f) \leq M \sum_{i=1}^s \frac{1}{n_i^{p_i}} \omega_i\left(\frac{1}{n_i}\right) \quad (n_i \geq 1, i=1, \dots, s). \quad (1)$$

其中, 常数 M 仅依赖于 p_i ($i=1, \dots, s$).

证明 证明的思路是每个变量依次用三角多项式逐步逼近 f . 这可通过算子 4.3(7) 来实现.

我们来定义 $C[K^{(s)}]$ 的某些子类. 对于 $j=1, \dots, s+1$, 以 $\mathfrak{X}_j$ 表示具有如下性质的所有函数 $f \in C[K^{(s)}]$ 的集: 关于 x_i , $i < j$, f 是 n_i 阶三角多项式; 关于 x_i , $i \geq j$, f 是这样的一个函数: 它有连续的偏导数 $\partial^k f / \partial x_i^k$, $0 \leq k \leq p_i$; p_i 阶导数关于 x_i 的连续模不超过 $2^{p_i} \omega_i(h)$, 这里

$$P_j = (p_1 + 1) + \dots + (p_{j-1} + 1), \quad j > 1, \quad P_1 = 1.$$

特别, $\mathfrak{X}_1$ 是定理 6 的所有函数 f 的类. 而 $\mathfrak{X}_{s+1}$ 由所有三角多项式 $T_{n_1, \dots, n_s}$ 所组成.

引理 2 若 $f_j \in \mathfrak{X}_j$ ($j=1, \dots, s$), 则存在函数 $f_{j+1} \in \mathfrak{X}_{j+1}$ 使得

$$\|f_j - f_{j+1}\| \leq M \frac{1}{n_j^{p_j}} \omega_j\left(\frac{1}{n_j}\right). \quad (2)$$

取 f_{j+1} 为 $f_{j+1} = I_{n_j r_j}(f_j, x_j)$, 这里算子 4.3(7) 是作用在作为 x_j 的函数 f_j 上的. 更确切地说:

$$\begin{aligned} f_{j+1}(x_1, \dots, x_s) = & - \int_{-\pi}^{\pi} K_{n_j r_j}(t) \sum_{k=0}^{p_j+1} (-1)^k \binom{p_j+1}{k} \\ & \times f_j(x_1, \dots, x_j + kt, \dots, x_s) dt, \end{aligned} \quad (3)$$

式中 r_j 是适合 $r_j \geq \frac{1}{2}(p_j + 3)$ 的最小整数. 显然, 与 f_j 一起, f_{j+1} 是 x_i 的 n_i ($i < j$) 阶三角多项式. 根据第四章定理 3 的证明, 关于 x_j , f_{j+1} 是 n_j 阶三角多项式. 最后, 关于 x_i ($i > j$)

可以在积分号下微分(3), 从而得到

$$\frac{\partial^{p_i} f_{j+1}}{\partial x_i^{p_i}} = I_{n_j r_j} \left(\frac{\partial^{p_i} f_j}{\partial x_i^{p_i}}, x_j \right). \quad (4)$$

因为核 $K_{n_j r_j}$ 是正的, 并且在 $[-\pi, \pi]$ 上有积分等于 1, 故由(4)推知 $\partial^{p_i} f_{j+1} / \partial x_i^{p_i}$ 关于 x_i 的偏连续模不超过

$$\sum_{k=1}^{p_j+1} \binom{p_j+1}{k} \omega_i \left(\frac{\partial^{p_i} f_j}{\partial x_i^{p_i}}, h \right) \leq 2^{p_j+1} 2^{p_j} \omega_i(h) = 2^{p_j+1} \omega_i(h).$$

于是 $f_{j+1} \in \mathfrak{F}_{j+1}$. 根据 4.3(10), 关系式(2)关于 $M = M'_{p_j}$ 成立. 证毕.】

由(2), 通过由 $f_1 = f$ 起作迭代, 得到

$$\|f - f_{s+1}\| \leq M \sum_{i=1}^s \frac{1}{n_i^{p_i}} \omega_i \left(\frac{1}{n_i} \right). \quad (5)$$

作为推论, 有

定理 7 对于每一个函数 $f \in A_{p, \omega}^s [K^{(s)}]$, 存在着按每个变量为 n 阶的三角多项式 $T_n(x_1, \dots, x_s)$, 使得

$$\|f - T_n\| \leq M \frac{1}{n^p} \omega \left(\frac{1}{n} \right).$$

4. 借助代数多项式逼近

根据定理 6, 可以获得关于定义在立方体 $B: -1 \leq x_i \leq 1$ ($i=1, \dots, s$) 上的 $s=2, 3, \dots$ 个变量的函数 $f(x_1, \dots, x_s)$ 借助代数多项式逼近的结果. 这里仅仅讨论一致逼近, 而接近 B 的边界处改善逼近的可能性就不考虑了. 下面的引理是关于单变量函数的.

引理 8 对于每个类 $A = A_{p, \omega} (M_0, \dots, M_{p+1}) [-1, +1]$, 存在着具有下述性质的常数 C : 如果 $f \in A$, 则函数 $g(t) = f(\cos t)$ 是 p 次可微的, 而且

$$\omega(g^{(p)}, h) \leq C \omega(h) \quad (0 < h \leq 1). \quad (1)$$

证明 由归纳法得到

$$g^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^k f^{(j)}(\cos t) T_{kj}(t) \quad (k=1, \dots, p), \quad (2)$$

其中 T_{kj} 是某个与 f 无关的三角多项式. 取 $M' > 0$, 使得对所有的 k 与 j 有 $\|T_{kj}\| \leq M'$, $\|T'_{kj}\| \leq M'$; 从而 $\omega(T_{kj}, h) \leq M'h$. 若 $j < p$, 则 $f^{(j)}(\cos t)$ 的连续模不会超过 $\|f^{(j+1)}\|h \leq M_{j+1}h$, 而若 $j = p$, 则不超过 $M_{p+1}\omega(h)$. 应用 3.5(5) 于 (2) 的每一项 (此时 $k = p$):

$$\begin{aligned} \omega(g^{(p)}, h) &\leq M' \left\{ \sum_{j=1}^{p-1} (M_{j+1}h + M_jh) + M_{p+1}\omega(h) + M_ph \right\} \\ &\leq O'h + M'M_{p+1}\omega(h). \end{aligned} \quad (3)$$

但是, 对于 $0 < h \leq 1$ 有 $\omega(1) \leq (h^{-1} + 1)\omega(h) \leq 2h^{-1}\omega(h)$, 于是 $h \leq 2\omega(h)/\omega(1)$. 从而由 (3) 可得到 (1).

定理 8 若类 $\Delta = \Delta_n^s(M_0, \dots, M_{p+1}; B)$ 是给定的, 则存在具有这样性质的常数 M , 对于每个 $f \in \Delta$, 存在关于 x_i 的 n_i 次多项式 $P_{n_1 \dots n_s}(x_1, \dots, x_s)$, 使得

$$\begin{aligned} \|f - P_{n_1 \dots n_s}\| &\leq M \sum_{i=1}^s \frac{1}{n_i^p} \omega\left(\frac{1}{n_i}\right) \\ (n_i &= 1, 2, \dots, i=1, \dots, s). \end{aligned} \quad (4)$$

证明 设函数

$$g(t_1, \dots, t_s) = f(\cos t_1, \dots, \cos t_s)$$

是定义在 $K^{(s)}$ 上的. 根据引理 3, 导数 $\partial^p g / \partial x_i^p$ 的连续模不超过 $O\omega(h)$.

于是由定理 6, 存在三角多项式 $T_{n_1 \dots n_s}$, 使得

$$\|g - T_{n_1 \dots n_s}\| \leq M \sum_{i=1}^s \frac{1}{n_i^p} \omega\left(\frac{1}{n_i}\right).$$

因为函数 g 关于每个变量都是偶的, 可设 $T_{n_1 \dots n_s}$ 是纯余弦多

项式, 作代换 $\cos t_i = x_i$ 后就得到满足 (4) 的多项式 $P_{n_1, \dots, n_l}$.

证毕.]

5. 附 记

1. 在 [41] 中, Dolženko 给出了不等式 2(3) 和 2(4) 在复平面和对于多变量的有理函数的许多变形.

2. 定理 5 比 Gončar [54] 的结果稍微强一些; 他证明了 $R_n(f, A) = O(n^{-2-\varepsilon})$ ($\varepsilon > 0$) 在 $A \setminus e$ ($me \leq \delta$) 上对于某个通用的 $O'(\delta)$ 成立, 蕴含 $f^{(p)} \in \text{Lip}_p \alpha$.

3. 假如 n 和 s 同时非常大, 则定理 6、7 和 8 的估计就变得无意义了. 在这一场合下, 仅有已知的有效结果是由 Newman 和 Shapiro [83] 得出的.

4. Newman 的不等式 1(3) 可用于估计许多特殊的函数 f 借助有理函数逼近 $R_n(f)$ 的阶. 循此途径, Szűsz 和 Turán 以及后来的 Freud 发现了 $R_n(f)$ 与 $E_n(f)$ 不同阶的函数的自然类. 例如, Freud ["Über die Approximation reeller Funktionen durch rationale gebrochene Funktionen," 发表于 Acta Math. Acad. Hungar., Vol. 17 (1966)] 证明了若 $f \in \text{Lip}_p \alpha$ 且 $\text{Var} f \leq M$, 则 $R_n(f) \leq \text{const} M n^{-1} \log^2 n$; 若 $|f(x+h) - f(x)| \leq M \log^{-\gamma}(1/|t|)$ 且 $\text{Var} f \leq M$, 则 $R_n(f) \leq \text{const} M n^{-\gamma/(\gamma+2)}$.

问 题

1. 在定理 4 的情况下, f' 关于 A 在 A 上几乎处处存在.

2. 对 2(4) 稍作修改, 证明存在着集 $e \subset A$, $me \leq \delta$, 使得对于每个 $p=1, 2, \dots$, 有 $|r_n^{(p)}(x)| \leq p! 2^{p(p+3)/2} (n \setminus \delta)^p M$, $x \in A \setminus e$ (Dolženko).

3. 设 G 是复平面上使 $|r_n(z)| \leq M$ 的集; 设 $\delta > 0$, 则存在 G 的子集 e , $me \leq \delta$, 使得在 $G \setminus e$ 上有 $|r_n(z)| \leq M \sqrt{\pi n / \delta}$ (Dolženko). [提

示, G 的象的面积是 $\int_G |r'_n(z)|^2 dz$.

4. 设 $\phi_n > 0$, $\delta_n > 0$, $\sum \phi_n < +\infty$, 则对于函数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k \delta_k (1 + \delta_k - x)^{-1} \quad (0 \leq x \leq 1),$$

有 $R_n(f) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \phi_k$, 但 $\omega(f, \delta_k) \geq \frac{1}{2} \phi_k$.

5. 设 $\phi_n \rightarrow 0$, $\rho_n \rightarrow 0$, $\phi_n > 0$, $\rho_n > 0$ 是任意的. 存在函数 $f \in C[0, 1]$ 使得 $R_n(f) \leq \phi_n$ ($n=1, 2, \dots$), 但对于无穷多个 n , 有 $E_n(f) \geq \rho_n$. [(Gončar) 提示: 利用问题 4 及第五章的定理 4.]

6. 设 $E_{nm}^*(f)$ 是 $f \in C[K^{(2)}]$ 借助关于 x 为 n 阶三角多项式的连续函数 $g(x, y)$ 逼近的阶, 又设 E_{nm}^* 是类似地定义的, 利用第四章定理 1, 证明

$$E_{nm}^* \leq M \{E_{nn}^*(f) + E_{mm}^*(f)\} \log n \quad (n > 1) \text{ (Bernstein)}.$$

第七章

借助线性多项式算子逼近

1. de la Vallée-Poussin 和, 正算子

映 $C[-1, +1]$ 到其自身的有界线性算子 L_n 是 n 阶多项式算子, 倘若它的每个值 $L_n(f)$ ($f \in C[-1, +1]$) 都是 n 次代数多项式.

三角多项式算子也是以类似的方式定义的.

将每个 $f \in C[-1, 1]$ 变为其唯一的最佳逼近多项式的算子 $P_n(f)$ 是非线性的 [见第二章第 9 节附记 1], 由此推知, 不存在具有性质

$$\|f - L_n(f)\| = E_n(f) \quad (f \in C) \quad (1)$$

的 n 阶多项式算子 L_n . 但是, 即使 (1) 不能成立, 还是可以期望对于全空间 C 或是对于它的某个子集成立着类似但稍弱的命题. 这就是本章第 1 和第 3 节的内容. 另一方面, 可以看到 (定理 9), 对于每个固定的常数 M ,

$$\|f - L_n(f)\| \leq M E_n^*(f) \quad (f \in C^*, n=1, 2, \dots)$$

也是不可能的.

但若提高逼近算子的阶, 则上述不等式就能成立.

定理 1 (de la Vallée-Poussin [16]) 对于每个正整数 n , 存在着具有性质

$$\|f - V_n(f)\| \leq 4 E_n^*(f) \quad (f \in C^*) \quad (2)$$

的 $2n-1$ 阶三角多项式算子 $V_n(f)$.

为了寻求算子 V_n , 我们比较 Fourier 和 (Fourier Sums) $s_n(f)$ 与 Fejér 平均 $\sigma_n(f)$ 的性质 (第一章第 2 节). 算子 s_n 对于所有 n 阶三角多项式 T_n 保持不变. σ_n 却没有这一性质, 但是, 作为补偿, 它满足 $\sigma_n(f) \rightarrow f$, 也即对于所有的 $f \in C^*$, 有 $\|f - \sigma_n(f)\| \rightarrow 0$. 为了获得同时具备这些性质的算子, 我们考察“移动”平均

$$\frac{1}{p} [s_n(f, x) + s_{n+1}(f, x) + \cdots + s_{n+p-1}(f, x)]. \quad (3)$$

若 $n=0$, 就是 σ_p ; 若 $p=1$, 就是 s_n . 但我们要求 $p = p(n) \rightarrow \infty$. 特别, 取 $p=n$:

$$\begin{aligned} V_n(f, x) &= \frac{1}{n} [s_n(f, x) + \cdots + s_{2n-1}(f, x)] \\ &= 2\sigma_n(f, x) - s_n(f, x). \end{aligned} \quad (4)$$

下面指出算子 V_n 的若干简单性质:

1. V_n 是 $2n-1$ 阶三角多项式算子, 且 $V_n(T_n) = T_n$. 这可从 (4) 的第一个等式推得.

2. 对于 $f \in C^*$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $V_n(f) \rightarrow f$. 这可从 (4) 的第二个等式导出 (因为 $\sigma_n(f) \rightarrow f$).

3. $\|V_n\| \leq 3$. 事实上, $\|V_n\| \leq 2\|\sigma_n\| + \|s_n\| = 3$ (第一章第 2 节).

下面借助于函数 f 的最佳逼近多项式来证明 (2):

$$\begin{aligned} \|f - V_n(f)\| &= \|f - T_n - V_n(f - T_n)\| \\ &\leq \|f - T_n\| + \|V_n\| \cdot \|f - T_n\| \\ &\leq 4\|f - T_n\| = 4E_n^*(f). \quad \text{证毕.} \end{aligned}$$

将定理 1 稍加拓广是容易的. 设 $0 < \varepsilon < 1$ 是给定的, 在 (3) 中取 $p = [\varepsilon n]$, 即得阶 $\leq (1 + \varepsilon)n$ 的多项式算子 V'_n 的序列, 对于它, 有 $\|f - V'_n(f)\| \leq \text{const } E_n^*(f)$.

作为定理 1 的一个应用例子, 下面证明

定理 2 若 $g(x) = |\cos x|$, 则对于某常数 $M > 0$, 有

$$E_n^*(g) \geq M n^{-1}.$$

证明 $g(x)$ 的 Fourier 级数收敛. 容易求出:

$$g(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}.$$

因为 $0 = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (4k^2 - 1)^{-1},$

所以, 存在某个常数 $M' > 0$, 使

$$\begin{aligned} s_m\left(g, \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{2k \leq m} (4k^2 - 1)^{-1} \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{2k > m} (4k^2 - 1)^{-1} \geq \frac{M'}{m}. \end{aligned}$$

于是, $V_n\left(g, \frac{\pi}{2}\right) - g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{n} \sum_{m=n}^{2n-1} s_m\left(g, \frac{\pi}{2}\right) \geq \frac{M'}{2n}$
($n=1, 2, \dots$).

现在假设在 $[-1, +1]$ 上 $h(x) = |x|$, 那末

$$E_n(h) \approx n^{-1}. \quad (5)$$

欲明此理, 设 $P_n(x)$ 为任一个 n 次多项式. 如果 $x = \cos t$, 则根据定理 2, 至少有一点 x , 使

$$|h(x) - P_n(x)| = ||\cos t| - P_n(\cos t)| \geq M n^{-1}.$$

因此, $E_n(h) \geq M n^{-1}$. 相反的不等式可由 Jackson 定理或由第五章定理 1 推出. (事实上, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $nE_n(h)$ 收敛于某个极限 [2, 第 I 卷, 第 157 页].)

下一个定理涉及到正多项式算子. 对于这种算子, 逼近的临界阶是 $O(n^{-2})$; 无论怎样的光滑性假设都不能保证有更好的逼近. 以下设 $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$.

定理 3 (Korovkin) 设 $L_n(f)$ ($n=1, 2, \dots$) 都是定义在

$C[-1, +1]$ 上的 n 阶正多项式算子, 那末至少有一个 $i=0, 1, 2$, 使

$$\|f_i - L_n(f_i)\| \neq o(n^{-2}) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (6)$$

证明 这里将应用对于正线性算子 L 也有效的 Cauchy 不等式^[1]

$$|L(fg, x)| \leq L(f^2, x)^{1/2} L(g^2, x)^{1/2}. \quad (7)$$

设 $h(x) = |x|$, $h_a(x) = |x - a|$; 则 $h_a^2 = x^2 f_0 - 2af_1 + f_2$. 从不等式 $||x| - |a|| \leq |x - a|$ 出发, 应用所述函数可把此不等式写成 $||a| f_0 - h| \leq h_a$. 因此, 根据正算子的性质(第一章第2节), 有

$$||a| L_n(f_0, x) - L_n(h, x)| \leq L_n(h_a, x).$$

对于 $x=a$, 由(7):

$$\begin{aligned} & ||a| L_n(f_0, a) - L_n(h, a)| \leq L_n(h_a, a) \\ & \leq L_n(f_0, a)^{1/2} L_n(h_a^2, a)^{1/2} \\ & = L_n(f_0, a)^{1/2} \{a^2 [L_n(f_0, a) - f_0(a)] \\ & \quad - 2a [L_n(f_1, a) - f_1(a)] \\ & \quad + [L_n(f_2, a) - f_2(a)]\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

现在估计 $|h(a) - L_n(h, a)|$, 在此有

$$\begin{aligned} |h(a) - L_n(h, a)| & \leq |a| |f_0(a) - L_n(f_0, a)| \\ & \quad + ||a| L_n(f_0, a) - L_n(h, a)|. \end{aligned} \quad (9)$$

假设对于 $i=0, 1, 2$, 有 $\|f_i - L_n(f_i)\| = o(n^{-2})$ 成立. 那末, 首先有 $L_n(f_0, a) \rightarrow f_0(a) = 1$. 因此, 利用(8), 我们可看到(9)的最后一项是 $o(n^{-1})$, 从而可推得

$$|h(a) - L_n(h, a)| = o(n^{-2}) + o(n^{-1}) = o(n^{-1})$$

对于 a ($-1 \leq a \leq 1$) 一致成立. 但这与(5)矛盾. 证毕.】

[1] 为证此式, 可对固定的 x 考察 λ 的二次多项式

$$L((f + \lambda g)^2, x) \geq 0.$$

2. 一致有界原理

设 L_n 是有界线性算子序列, 它们都把给定的 Banach 空间 X 映到另一 Banach 空间 Y (X, Y 与 n 无关). 究竟在什么条件下, 对于每个 $f \in X$ 序列, $L_n(f)$ 在空间 Y 的范数下收敛或有界? 对于收敛性来说, 一个非常重要的必要条件是范数 $\|L_n\|$ 的有界性, 这可由下述定理推知.

定理 4 (“一致有界原理”) 对于每个 $f \in X$, 序列 $L_n(f)$ 在空间 Y 范数下有界, 当且仅当对于某个 $M \geq 0$, 有

$$\|L_n\| \leq M \quad (n=1, 2, \dots). \quad (1)$$

证明 显然, 条件 (1) 是充分的. 下面只要证明它也是必要的. 如果范数无界, 则通过选取子序列, 可假设 $\|L_n\| \geq 10^n$ ($n=1, 2, \dots$). 由此, 我们来导出 $f \in X$, 使得

$$\|L_n(f)\| \geq 8^{-1} \left(\frac{10}{9}\right)^n \quad (n=1, 2, \dots). \quad (2)$$

根据 $\|L_n\|$ 的定义, 可确定 $f_n \in X$ ($n=1, 2, \dots$), 使得

$$\|L_n(f)\| \geq \frac{1}{2} \|L_n\|; \quad \|f_n\| = 1. \quad (3)$$

在此选取 $f = \sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n} \varepsilon_n f_n$, 其中数 ε_n 仅允许取值 0 和 1. 选取它们后, 级数 $\sum 9^{-n} \varepsilon_n \|f_n\|$ 收敛, 而且结合着空间 X 的完备性可推出定义 f 的级数 (在 X 范数下) 的收敛性.

ε_n 按下述方式归纳地选取: 首先取 $\varepsilon_1 = 1$. 若 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ 已取好, 则当

$$\left\| L_n \left(\sum_{k=1}^{n-1} 9^{-k} \varepsilon_k f_k \right) \right\| \leq \frac{1}{4} 9^{-n} \|L_n\| \quad (4)$$

时, 取 $\varepsilon_n = 1$. 若 (4) 不成立, 则取 $\varepsilon_n = 0$, 在第一种情形下, 由 (3) 可得:

$$\begin{aligned}
\left\| L_n \left(\sum_{k=1}^n 9^{-k} \varepsilon_k f_k \right) \right\| &\geq \left\| L_n(9^{-n} f_n) \right\| - \left\| L_n \left(\sum_{k=1}^{n-1} 9^{-k} \varepsilon_k f_k \right) \right\| \\
&\geq \frac{1}{2} 9^{-n} \|L_n\| - \frac{1}{4} 9^{-n} \|L_n\| \\
&= \frac{1}{4} 9^{-n} \|L_n\|;
\end{aligned}$$

在第二种情况下, 左端也比 $\frac{1}{4} 9^{-n} \|L_n\|$ 大. 于是对于每个 n , 有

$$\begin{aligned}
\|L_n(f)\| &\geq \left\| L_n \left(\sum_{k=1}^n 9^{-k} \varepsilon_k f_k \right) \right\| - \left\| L_n \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 9^{-k} \varepsilon_k f_k \right) \right\| \\
&\geq \frac{1}{4} 9^{-n} \|L_n\| - \|L_n\| \sum_{k=n+1}^{\infty} 9^{-k} \\
&= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) 9^{-n} \|L_n\| \geq \frac{1}{8} \left(\frac{10}{9} \right)^n.
\end{aligned}$$

对于固定的 x , $f \in C^*$ 的 Fourier 级数的部分和 $\varepsilon_n(f, x)$ 是线性泛函 (这就是映 C^* 到 R 的线性算子). 它们的范数趋于无穷 (第一章, 定理 2). 于是有

定理 5 对于每个 $x \in K$, 存在着连续的 2π 周期函数, 其 Fourier 级数在 x 处发散.

(倘若将 $\varepsilon_n(f)$ 看作 C^* 到其自身的算子, 则应用定理 4 将获得一个稍弱的结果, 即: 存在着函数 $f \in C^*$, 其 Fourier 级数不一致收敛.)

3. 三角多项式不变的算子

所谓 n 阶三角多项式算子 L_n 属于类 $\mathfrak{T}_n$, 乃是指它对于每个 n 阶三角多项式都保持不变: $L_n(T_n) = T_n$. $\mathfrak{T}_n$ 中最简单的元素是 f 的 Fourier 级数的部分和 $\varepsilon_n(f)$. 可以证明 ε_n 是类 $\mathfrak{T}_n$ 中在下述意义下的极元素: 在所有的 $L_n \in \mathfrak{T}_n$ 中它有最小的范数. 由此导出这样的结论 (由 Faber [44], Nikolaev,

Lozinskiĭ; 见定理 8): 对于任意的算子 $L_n \in \mathfrak{L}_n$ ($n=1, 2, \dots$), 序列 $L_n(f)$ 不能在全空间 C^* 中收敛. (尽管还不知道是否保证 $x \in K, f \in O^*$ 存在, 使 $L_n(f, x)$ 发散.)

以 f_a 表示函数 $f \in O^*$ 的 a -平移 (translation): $f_a(x) = f(x+a)$. 显然, $\|f_a\| = \|f\|$, 而且 $(f+g)_a = f_a + g_a$. 又, f_a 是 a 的连续函数: 当 $a \rightarrow a_0$ 时, 对于每个 f 一致地有 $\|f_a - f_{a_0}\| \rightarrow 0$.

定理 6 对于每个算子 $L_n \in \mathfrak{L}_n$, 有公式

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L_n(f_t, x-t) dt = s_n(f, x) \quad (f \in O^*, x \in K). \quad (1)$$

这是 Faber 与 Marcinkiewicz 公式的 Berman^[34] 推广.

证明 首先说明 $L_n(f_t, x)$ 是两个变量 t 和 x 的连续函数. 设 t_0, x_0 是固定的, 则

$$\begin{aligned} |L_n(f_t, x) - L_n(f_{t_0}, x_0)| &\leq |L_n(f_{t_0}, x) - L_n(f_{t_0}, x_0)| \\ &\quad + |L_n(f_t, x) - L_n(f_{t_0}, x)|. \end{aligned}$$

因为 $L_n(f_{t_0}, x)$ 是 x 的连续函数, 右边第一项当 x 接近 x_0 时甚小, 第二项当 t 接近于 t_0 时也很小, 因为它不超过 $\|L_n\| \cdot \|f_t - f_{t_0}\|$.

可以看到, (1) 中的被积函数是 t 的连续函数, 从而积分 (1) 存在. 现在以 $A_n(f, x)$ 表示 (1) 的左边, 并且对于下列函数类证明恒等式 $A_n(f) = s_n(f)$:

(a) 设 $f = T_n$, 则 $f_t = (T_n)_t = T_{nt}$ 也是 n 阶三角多项式; 因此, $L_n(T_{nt}) = T_{nt}$, 而且 $L_n(T_{nt}, x-t) = T_{nt}(x-t) = T_n(x)$. 又因 $s_n(T_n, x) = T_n(x)$, 故得 (1).

(b) 若 p 是整数且 $p > n$, 则此关系式对于 $g(x) = \cos px$, $h(x) = \sin px$ 成立. 例如, 考察函数 g , 由于 $\cos pt$ 及 $\sin pt$ 正交于 t 的 n 阶三角多项式 $L_n(g, x-t)$ 及 $L_n(h, x-t)$, 又因

$$g_t(x) = g(x) \cos pt - h(x) \sin pt,$$

故有

$$\begin{aligned} A_n(g, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{L_n(g, x-t) \cos pt \\ &\quad - L_n(h, x-t) \sin pt\} dt = 0. \end{aligned}$$

因为两边都是零, 于是(1)成立.

(c) 由(a)和(b)可知, 对所有三角多项式 f , 无论它们的阶如何, $A_n(f) = s_n(f)$ 总是正确的, 它们构成了 C^* 中的稠密集. 为了完成证明, 只要再说明 $A_n(f)$ 及 $s_n(f)$ 在 C^* 的范数下都是连续的. $s_n(f)$ 是线性且有界的(第一章第2节), 因此也是连续的; $A_n(f)$ 是线性的, 并且

$$\begin{aligned} |A_n(f, x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |L_n(f_t, x-t)| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|L_n\| \cdot \|f_t\| \cdot dt = \|L_n\| \cdot \|f\| \quad (x \in K), \end{aligned}$$

从而

$$\|A_n\| \leq \|L_n\|. \quad (2)$$

证毕.】

由定理6和(2)可以导出若干重要的推论.

定理7 若 $L_n \in \mathfrak{L}_n$, 则 $\|L_n\| \geq \|s_n\|$.

定理8 若 $L_n \in \mathfrak{L}_n (n=1, 2, \dots)$, 则存在 $f \in C^*$, 使得 $L_n(f)$ 不收敛(并且无界).

这可由 $\|s_n\| \geq A \log n$ (第一章定理2)以及定理7和4推得.

定理9 设 L_n 是 n 阶三角多项式算子序列, 则不可能存在一个连续函数 $\phi(u) \geq 0$, $\phi(0) = 0$, 使得

$$\|f - L_n(f)\| \leq \phi(E_n^*(f)) \quad (f \in C^*, n=1, 2, \dots). \quad (3)$$

证明 由(3)推知 $L_n(T_n) = T_n$, 于是 $L_n \in \mathfrak{L}_n$. 再由(3),

对于 $f \in C^*$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $L_n(f) \rightarrow f$. 而这与定理 8 矛盾.

证毕.]

4. 三角饱和类

倘若存在着函数 $f \in C^*$ 借助 $L_n(f)$ 逼近的“最优”阶 $\psi(n)$, 使得更好的逼近仅对非常特殊的函数, 例如常数发生. 则映 C^* 到其自身中的线性算子序列 L_n 称为饱和的. 本节中仅仅常数的情况是本质性的. 下面给出一个形式的定义: 假设存在当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于零的函数 $\psi(n) > 0$ ($n=1, 2, \dots$), 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|f - L_n(f)\|}{\psi(n)} = 0 \quad (1)$$

蕴含 f 是个常数; 并且至少存在一个非常数的函数 $f \in C^*$, 使 $\|f - L_n(f)\| = O(\psi(n))$. 那末, 称函数 ψ 为最优逼近阶. 而满足后一关系式的函数 f 的集 S 是 L_n 关于 ψ 的饱和类.

例如, Fejér 和 (Fejér sums) $\sigma_n(f)$ [1.2(12)] 是对于 $\psi(n) = n^{-1}$ 饱和的. 假设对于 n 的某个子列

$$\|f - \sigma_n(f)\| = o(n^{-1}).$$

由于 f 的 Fourier 级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv \sum_0^{\infty} A_k(x) \quad (2)$$

的部分和的算术平均 σ_n 是

$$\sigma_n(x) = \sum_0^n \frac{n-k}{n} A_k(x),$$

所以

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(x) \begin{cases} \cos kx \\ \sin kx \end{cases} dx = \frac{n-k}{n} \begin{cases} a_k \\ b_k \end{cases} \quad (k \leq n). \quad (3)$$

由上式以及 1.2(8) 可得

$$\frac{k}{n} a_k = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} (f - \sigma_n) \cos kx dx, \quad \sigma = \sigma_n(f).$$

因此, 对于 n 的所述子列, $(k/n)a_k = o(n^{-1})$, 从而 $a_k = 0$. 同样, 对于 $k=1, 2, \dots$, $b_k = 0$. 于是 f 成为常数 $\frac{1}{2} a_0$. 但对于函数 $f(x) = \cos x$, 有 $\sigma_n = (1 - n^{-1}) \cos x$, 并且 $\|f - \sigma_n(f)\| = n^{-1}$. 这就证明了上述的命题. 另一方面, 易见 Fourier 和 (Fourier sums) $\sigma_n(f)$ 是非饱和的 (见问题 2).

为决定 $\sigma_n(f)$ 的饱和类, 需要共轭函数的概念. 设 (2) 是可积函数 f 的 Fourier 级数, 则

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos kx - a_k \sin kx) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} B_k(x) \quad (4)$$

被称为 f 的共轭级数. 设 $\tilde{s}_n(f, x)$ ($n=1, 2, \dots$) 表示 (4) 的部分和, $\tilde{\sigma}_n(f, x) = (\tilde{s}_1 + \dots + \tilde{s}_{n-1})/n$ ($n=2, 3, \dots$) 是它们的算术平均. 我们希望用 f 明显地表示 $\tilde{s}_n$, $\tilde{\sigma}_n$.

下列类似于 1.2(10) 及 1.2(11) 的公式是很有用的:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_n(x) &= \sin x + \dots + \sin nx = \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x}, \\ \tilde{F}_n(x) &= \frac{\tilde{D}_1(x) + \dots + \tilde{D}_{n-1}(x)}{n} \\ &= \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2}x - \frac{\sin nx}{4n \sin^2 \frac{1}{2}x}. \end{aligned} \quad (5)$$

其证明留给读者. 由于

$$B_k(x) = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sin kt dt,$$

可获得

$$\begin{aligned}\tilde{e}_n(f, x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t) - f(x-t)] \tilde{D}_n(t) dt, \\ \tilde{\sigma}_n(f, x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t) - f(x-t)] \tilde{P}_n(t) dt.\end{aligned}\quad (6)$$

设

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [f(x+t) - f(x-t)] \cot \frac{1}{2} t dt, \quad (7)$$

倘若对于所有的 $x \in K$, 积分(7)绝对收敛, 而且

$$\int_0^\pi [f(x+t) - f(x-t)] \cot \frac{1}{2} t dt$$

是可积函数, 则称(7)式为 $f \in O^*$ 的共轭函数. 这并非共轭函数的通常定义[见 6, 附记 5], 不过它可使我们立即得出饱和类的特征.

引理 1 (a) 若 $\tilde{f}$ 存在, 则级数(4)是它的 Fourier 级数; (b) 如果对于某个 $\alpha > 0$, $f \in \text{Lip } \alpha$, 则 $\tilde{f}$ 存在而且是级数(4)的和.

证明 用 $\cos kx$ 乘(7), 积分且交换积分的次序, 则得到

$$\begin{aligned}\tilde{a}_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \tilde{f}(x) \cos kx dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cot \frac{1}{2} t dt \int_{-\pi}^\pi f(u) [\cos k(u-t) - \cos k(u+t)] du \\ &= b_k \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin kt \cos \frac{1}{2} t}{\sin \frac{1}{2} t} dt \\ &= b_k \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (D_k + D_{k-1}) dt = b_k \quad (k=1, 2, \dots)\end{aligned}$$

及 $\tilde{a}_0 = 0$; 同样, $\tilde{b}_k = -a_k \quad (k=1, 2, \dots)$.

现在设 $f \in \text{Lip } \alpha$, $\tilde{f}$ 的存在性是显然的. $\tilde{f}(x)$ 与 $\tilde{e}_n(f, x)$ 的差是

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^x g(t) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt,$$

其中 $g(t)$ 是绝对可积函数 $[f(x+t) - f(x-t)] / 2 \sin \frac{1}{2}t$. 由 Riemann-Lebesgue 定理 (见 [24], 第 24 页), 对于每个 x , 有 $I_n \rightarrow 0$. 证毕.】

作了这些准备后, 我们可以确立下述结果:

定理 10 (M. Zamansky) 算子 σ_n 的饱和类 S 由所有具有共轭函数 $\tilde{f} \in \text{Lip } 1$ 的函数 $f \in C^*$ 所组成.

证明 (a) 设 $\|f - \sigma_n(f)\| \leq M n^{-1}$, 函数 $\Delta_n = f - \sigma_n(f)$ 有 Fourier 级数 $\sum_{k=0}^n (k/n) A_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k$. 对于 $N \leq n$, 把算子 σ_N 作用于 Δ_n , 得

$$\sigma_N(\Delta_n) = \sum_{k=1}^N \left(1 - \frac{k}{N}\right) \frac{k}{n} A_k.$$

因为 $\|\sigma_N\| = 1$ (第一章第 2 节), 可以看到 $\|\sigma_N(\Delta_n)\| \leq M n^{-1}$; 因此,

$$\left\| \sum_{k=1}^N \left(1 - \frac{k}{n}\right) k A_k \right\| \leq M \quad (N=1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

但是 $-k A_k = B'_k$ 是级数 (4) 的通项的导数, 所以 (8) 等价于 $\|\tilde{\sigma}_n(f)\| \leq M$ ($n=2, 3, \dots$). 对于 $\tilde{\sigma}_n$ 本身, 这个不等式蕴含 $|\tilde{\sigma}_n(x+t) - \sigma_n(x)| \leq M|t|$ ($n=2, 3, \dots$). 根据第四章定理 6, 若 $0 < \alpha < 1$, 则 $f \in \text{Lip } \alpha$, 从而 $\tilde{f}$ 存在. 由引理 1, 对每个 $x \in K$ 有 $\tilde{\sigma}_n(x) \rightarrow \tilde{f}(x)$. 于是 $|\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x)| \leq M|t|$.

(b) 反之, 假设对于某个 M , $|f(x+t) - f(x)| \leq M|t|$.

我们来证明 $f \in S$. 根据引理 1, $-f + \frac{1}{2} a_0$ 与 $\tilde{f}$ 有相同的 Fourier 级数. 这个级数的算术平均收敛于 $-f + \frac{1}{2} a_0$ (见第

10 页), 从而收敛于 $\tilde{f}$ [根据引理 1, (b)]; 因此两个函数全同. 在 (6) 和 (7) 中, 将 f 与 $\tilde{f}$ 换位, 则得

$$\begin{aligned} f(x) - \sigma_n(f, x) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x-t)] \frac{\sin nt}{4n \sin^2(t/2)} dt \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (9)$$

其中积分 I_1, I_2 分别取在区间 $(0, \pi/n)$ 和 $(\pi/n, \pi)$ 上. 由于 $|\sin nt| \leq nt$, 有

$$|I_1| \leq \frac{M}{2\pi} \int_0^{\pi/n} \frac{t^2}{\sin^2(t/2)} dt = O(n^{-1}).$$

对于 I_2 , 借助于函数

$$\psi_n(t) = \int_t^\pi \frac{\sin nu}{\sin^2(u/2)} du$$

作分部积分:

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{1}{4\pi n} \left| [\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x-t)] \psi_n(t) \right|_{t=\pi/n}^{t=\pi} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi n} \left| \int_{\pi/n}^\pi \psi_n(t) d\{\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x-t)\} \right| \\ &\leq \frac{M}{2n^2} \left| \psi_n\left(\frac{\pi}{n}\right) \right| + \frac{M}{2\pi n} \int_{\pi/n}^\pi |\psi_n(t)| dt. \end{aligned}$$

(最后的估计由 Stieltjes 积分的定义推得.) 由第二中值定理,

$$\int_a^b fg dt = g(a) \int_a^\xi f dt \quad (a \leq \xi \leq b),$$

其中 g 是递减且正的, 而 f 是连续的. 于是

$$|\psi_n(t)| \leq \frac{2}{n} \frac{1}{\sin^2(t/2)} \leq \frac{2\pi^2}{nt^2}.$$

我们得到

$$|I_2| \leq \frac{M}{n} + \frac{M\pi}{n^2} \int_{\pi/n}^\pi \frac{dt}{t^2} \leq 2 \frac{M}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

因此,

$$\|f - \sigma_n(f)\| = O(n^{-1}). \quad \text{证毕.} \blacksquare$$

5. Bernstein 多项式的饱和类

作为饱和类的另一个例子, 我们考察函数 $f \in C[0, 1]$ 借助于 Bernstein 多项式 $B_n(f)$ [见 1.2(5)] 的逼近. 第五章的结果暗示 $f(x)$ 借助 $B_n(f, x)$ 逼近的最优阶可能与 x 有关. 下面的定理 11 表明, 事实正是如此. 我们必需对第 4 节中的定义作一些变更. 最优逼近阶 $\psi(x, n) = x(1-x)/n$ 现在成了 n 和 x 的函数, 而使 $f(x) - B_n(f, x) = o(\psi(x, n))$ 的例外函数 f 是全体线性函数.

定理 11 Bernstein 多项式的饱和类 S 由所有使 $f' \in \text{Lip}1$ 的 $f \in C[0, 1]$ 组成. 最优逼近阶是 $x(1-x)/n$; 更清楚地, $f' \in \text{Lip}1$ 等价于

$$|f(x) - B_n(f, x)| \leq M \frac{x(1-x)}{2n} \quad (n=1, 2, \dots, 0 \leq x \leq 1). \quad (1)$$

倘若除 (1) 外, $|f(x) - B_n(f, x)| \leq n^{-1} \varepsilon_n x(1-x)$ ($0 \leq x \leq 1$), 其中 $\varepsilon_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, 则 f 是线性的.

将 (1) 与函数 $f \in S$ 借助于任意 n 次多项式 $P_n(x)$ 的逼近作一比较. 第五章定理 2 给出

$$|f(x) - P_n(x)| \leq O \max \left(\frac{x(1-x)}{n^2}, \frac{1}{n^4} \right).$$

可见 Bernstein 多项式收敛得是缓慢的.

证明 首先设 $f' \in \text{Lip}_\mu 1$. 对 $[0, 1]$ 的任意两个点 x, y , 有

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \int_y^x f'(t) dt \\ &= f'(x)(x-y) - \int_y^x (t-y) f'(t) dt. \end{aligned}$$

因为 $|f'(t+h) - f'(t)| \leq M|h|$, 最后积分的绝对值不超过

$M \int_0^1 (t-y) dt = \frac{1}{2} M (x-y)^2$. 置 $y=k/n$ 后, 应用这些于公式

$$f(x) - B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \left\{ f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\} p_{nk}(x),$$

并注意到 1.3(12), 于是得到

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f, x)| &\leq \frac{1}{2} M \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 p_{nk}(x) \\ &= M \frac{x(1-x)}{2n}. \end{aligned}$$

主要的难点在于证明 (1) 含有 $f' \in \text{Lip}_M 1$. 设 $G(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) 是下述类形的任意函数: $G(x)$ 在 $[0, 1]$ 上两次连续可微; 在某区间 (a, b) ($0 < a < b < 1$) 之外消失. 记

$$g(x) = \left[\frac{1}{2} x(1-x) \right]^{-1} G(x), \quad (0 < x < 1),$$

$$g(0) = g(1) = 0.$$

对于每个 G , 考察对所有 $f \in C[0, 1]$ 有定义的线性泛函序列

$$L_n(f) = \sum_{k=0}^n \left[B_n\left(f, \frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] g\left(\frac{k}{n}\right). \quad (2)$$

主要中间结果是:

引理 2 对于每个 $f \in C[0, 1]$ 和每个 G , 有

$$L_n(f) \rightarrow \int_0^1 f(x) G''(x) dx. \quad (3)$$

设 $0 < a_1 < a$, $b < b_1 < 1$. 在 (2) 中求和时, 可以限制在满足 $na_1 < k < nb_1$ 的 k 值集 I 上. 因为对于 $k \notin I$, 有 $g(k/n) = 0$. 将 $B_n(f, x)$ 的公式 1.2(5) 代入 (2), 并加以整理可得到

$$L_n(f) = \sum_{k \in I} \sum_{l=0}^n f\left(\frac{l}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right) p_{nl}\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{l=0}^n f\left(\frac{l}{n}\right) g\left(\frac{l}{n}\right).$$

(4)

因为 g'' 是连续的,

$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0) \cdot g'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 g''(x_0) + R(x, x_0),$$

其中 $|R(x, x_0)| = |x - x_0|^2 \varepsilon(x, x_0)$, 而 $\varepsilon(u, v)$ 是一个有界且当 $u - v \rightarrow 0$ 时趋于零的函数. 倘若取 $x = k/n$, $x_0 = l/n$, 则由 (4) 可得到

$$\begin{aligned} L_n(f) &= \sum_{k \in I} \sum_{l=1}^n f\left(\frac{l}{n}\right) \left\{ g\left(\frac{l}{n}\right) + \left(\frac{k}{n} - \frac{l}{n}\right) g'\left(\frac{l}{n}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{n} - \frac{l}{n}\right)^2 g''\left(\frac{l}{n}\right) \right\} p_{nl}\left(\frac{k}{n}\right) \\ &\quad - \sum_{l=0}^n f\left(\frac{l}{n}\right) g\left(\frac{l}{n}\right) + R_n, \end{aligned} \quad (5)$$

式中

$$|R_n| \leq \text{const} \sum_{k, l=0}^n \left(\frac{k}{n} - \frac{l}{n}\right)^2 \varepsilon\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}\right) p_{nl}\left(\frac{k}{n}\right). \quad (6)$$

首先证明 $R_n \rightarrow 0$. 任取 $\varepsilon > 0$, 对于所有适合 $|u - v| \leq \delta$, $\delta > 0$, 的 u, v , 有 $\varepsilon(u, v) \leq \varepsilon$. 把和数 (6) 分成相应于不等式

$$\left| \frac{k}{n} - \frac{l}{n} \right| < \delta \quad \text{和} \quad \left| \frac{k}{n} - \frac{l}{n} \right| \geq \delta$$

的两个部分 Σ_1 和 Σ_2 . 那么 (见第一章第 3 节)

$$\Sigma_1 \leq \text{const} \varepsilon \sum_{k=0}^n \frac{1}{n^2} T_{n^2}\left(\frac{k}{n}\right) \leq \text{const} \varepsilon,$$

这是因为对于 $0 \leq x \leq 1$, $T_{n^2}(x) \leq n$. 对于和数 Σ_2 , 可利用 1.3 (13): $\Sigma_2 \leq \text{const} (n+1) n^{-2} \rightarrow 0$. 于是, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $R_n \rightarrow 0$.

为了研究 (5) 中第一个和——在此用 $S_n(f)$ 表示它——利用 Euler-Maclaurin 公式. 这个公式可用来估计具有较低阶导数的函数的 Riemann 和与积分之间的差异. 可以记 $S_n(f) = \sum_{k \in I} Q(k/n)$, 其中

$$Q(x) = \sum_{l=0}^n f\left(\frac{l}{n}\right) \left\{ g\left(\frac{l}{n}\right) + \left(x - \frac{l}{n}\right) g'\left(\frac{l}{n}\right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{l}{n}\right)^2 g''\left(\frac{l}{n}\right) \right\} p_{nl}(x). \quad (7)$$

对于四次连续可微函数 Q 的 Euler-Maclaurin 公式, 有形式

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{p-1} Q\left(\frac{k}{n}\right) &= n \int_{m/n}^{p/n} Q(t) dt - \frac{1}{2} \left[Q\left(\frac{p}{n}\right) - Q\left(\frac{m}{n}\right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{12} \left[Q'\left(\frac{p}{n}\right) - Q'\left(\frac{m}{n}\right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{720n^4} \sum_{k=m}^{p-1} Q^{(4)}\left(\frac{k+\theta}{n}\right) \quad (0 \leq \theta \leq 1) \quad (8) \end{aligned}$$

(见 [29, 第 128 页]). 设 m 与 $p-1$ 是 I 中最小的及最大的 k , 则 (8) 等于 $S_n(f)$.

现在, 若 $0 \leq x \leq m/n$ 或 $p/n \leq x \leq 1$, 则函数 $Q(x)$ 是小的. 事实上, 若选取 $\delta > 0$, 使得 $\delta < a - a_1$, $\delta < b_1 - b$, 则对于所有大的 n 和在上述区间中的所有 x , 只要 $a \leq y \leq b$, 就有 $|x - y| \geq \delta$. 由于函数 $g(y)$ 在 $[a, b]$ 之外是零, 故从 (7) 可导出

$$|Q(x)| = O(1) \sum_{a \leq l/n \leq b} p_{nl}(x) = O(1) \sum_{|x - l/n| \geq \delta} p_{nl}(x) = O(n^{-2})$$

[见 1.3(13)]. 这就证明了 (8) 中右边前两项是 $n \int_0^1 Q dt + o(1)$.

其次, (8) 中的导数 Q' , $Q^{(4)}$ 与分母 n , n^4 相比是小的, 这可由下述事实推知: 对于某个与 $\delta > 0$ 有关的常数 O ,

$$|Q'(x)| \leq O\sqrt{n}, \quad |Q^{(r)}(x)| \leq On^2, \quad (\delta \leq x \leq 1 - \delta, r \leq 4). \quad (9)$$

对于 Q' , 可从 1.3(11) 导得: 若 $\delta \leq x \leq 1 - \delta$, 则

$$|p'_{nl}(x)| \leq \text{const} |l - nx| p_{nl}(x),$$

然后根据 Cauchy 不等式,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n |p'_{ni}(x)| &= O(1) \sum_{i=0}^n |l-nx| p_{ni}^{1/2} \cdot p_{ni}^{1/2} \\ &= O(1) T_{n2}(x)^{1/2} = O(\sqrt{n}).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}|Q'(x)| &= O(1) \sum_{i=0}^n [|p'_{ni}(x)| + p_{ni}(x)] = O(\sqrt{n}) \\ &\quad (\delta \leq x \leq 1-\delta).\end{aligned}$$

对于大的 r , 有公式(易由归纳法证明)

$$p_{ni}^{(r)}(x) = \sum_{\substack{i,j \\ i+2j \leq r}} (l-nx)^i n^j X_{ij}(x) p_{ni}(x), \quad (10)$$

其中函数 $X_{ij}(x)$ 在 $[\delta, 1-\delta]$ 上有一切阶导数. 设 $r \leq 4$, 可以看到 $|p_{ni}^{(r)}(x)|$ 不超过 $|l-nx|^i n^j p_{ni}(x)$ ($i+2j \leq 4$) 的常数倍的和. 在此可限定 i 是偶的, 因为若 i 是奇的, 则 $i+1+2j \leq 4$, 而且 $|l-nx|^i n^j \leq |l-nx|^{i-1} n^{j+1}$. 于是, 根据第一章第 3 节, 对于 $\delta \leq x \leq 1-\delta$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n |p_{ni}^{(r)}(x)| &= O(1) \sum_{i=0}^n \{n^2 + n(l-nx)^2 + (l-nx)^4\} p_{ni}(x) \\ &= O(1) \{n^2 + nT_{n2}(x) + T_{n4}(x)\} = O(n^2),\end{aligned}$$

这就使我们推出(9)的第二个不等式.

若 $\delta < a_1, b_1 < 1-\delta$, 则对于所有大的 n , $p/n, m/n$ 都在 $(\delta, 1-\delta)$ 中, 从而由(8)得到

$$S_n(f) = n \int_0^1 Q(x) dx + o(1), \quad (11)$$

现在来计算这个积分: 借助于 beta 函数, 有

$$\int_0^1 p_{ni}(x) dx = \binom{n}{l} B(l+1, n-l+1) = \frac{1}{n+1},$$

并且类似地有

$$\int_0^1 x p_{ni}(x) dx = \frac{l+1}{(n+1)(n+2)},$$

$$\int_0^1 x^2 p_{nl}(x) dx = \frac{(l+1)(l+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(x - \frac{l}{n}\right) p_{nl}(x) dx &= \frac{n-2l}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \left(1 - 2\frac{l}{n}\right) + O(n^{-3}), \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \left(x - \frac{l}{n}\right)^2 p_{nl}(x) dx = \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{l}{n} - \frac{l^2}{n^2}\right) + O(n^{-3}).$$

利用(5)、(11)和(7), 可以获得

$$\begin{aligned} L_n(f) &= S_n(f) - \sum_{l=0}^n f\left(\frac{l}{n}\right) g\left(\frac{l}{n}\right) + o(1) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^n f\left(\frac{l}{n}\right) \times \left\{ -g\left(\frac{l}{n}\right) + \left(1 - 2\frac{l}{n}\right) g'\left(\frac{l}{n}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{l}{n} - \frac{l^2}{n^2}\right) g''\left(\frac{l}{n}\right) \right\} + o(1) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^n f\left(\frac{l}{n}\right) G''\left(\frac{l}{n}\right) \\ &\quad + o(1) \rightarrow \int_0^1 f(x) G''(x) dx. \end{aligned} \quad \text{证毕.} \blacksquare$$

引理 2 建立之后, 定理 11 的证明是易于完成的. 对于满足 (1) 的函数 f , 关于序列 $L_n(f)$ 的极限可得到另一个公式. 由函数 $g(x)$ 的定义可推出 $L_n(f)$ 等于 Stieltjes 积分

$$L_n(f) = \int_0^1 G(x) d\lambda_n(x), \quad (12)$$

其中函数 $\lambda_n(x)$ 定义在 $[0, 1]$ 上, 在点 $x = k/n$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) 处有等于

$$\sigma_k = 2 \left[\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \right]^{-1} \left\{ B_n\left(f, \frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\}$$

的跃度, 而且在这些点之间是常数. 故可取

$$\lambda_n(x) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n-1 \\ k \leq nx}} \sigma_k.$$

根据(1), 由于 $|\sigma_k| \leq Mn^{-1}$, 故 $\lambda_n(x)$ 的全变差围于 M . 由于 $\lambda_n(0) = 0$, 故函数 $\lambda_n(x)$ 是一致有界的. 根据 Helly [26, 第 222 页] 定理, 可从 $\lambda_n(x)$ 中取出一个在 $[0, 1]$ 上处处收敛于某一函数 $\lambda(x)$ 的子序列 $\lambda_{n_p}(x)$.

对于 $[0, 1]$ 中的两个点 x, y , 差 $\lambda_n(x) - \lambda_n(y)$ 的绝对值不超过 Mn^{-1} 与 x, y 间的点 k/n 的个数的乘积. 这个点数最多是 $n|x-y| + 1$; 因此, $|\lambda_n(x) - \lambda_n(y)| \leq M|x-y| + Mn^{-1}$. 从而可推知 $|\lambda(x) - \lambda(y)| \leq M|x-y|$ 或 $\lambda \in \text{Lip}_M 1$.

由 Helly 的另一个定理 [26, 第 233 页], 有

$$\int_0^1 G(x) d\lambda_{n_p}(x) \rightarrow \int_0^1 G(x) d\lambda(x). \quad (13)$$

(3) 和 (13) 中的极限必相等; 于是, 两次分部积分可得到

$$\int_0^1 fG'' dx = \int_0^1 \Delta G'' dx, \quad (14)$$

其中 Δ 是 λ 的积分. 下面需要用到:

引理 3 若 $f \in C[a, b]$, 并且对于每个在 $[a, b]$ 上二次连续可微且在 a, b 处使 G, G', G'' 均为零的函数 G , 有

$$\int_a^b fG'' dx = 0 \quad (15)$$

成立, 则函数 f 是线性的.

这只要证明对于每个 $h > 0$, 差 $\Delta_h f(x)$ 与 x 无关. 否则, 就有 (a, b) 内的相异点 x_i ($i=1, \dots, 4$), 使得 $x_4 - x_3 = x_2 - x_1 > 0$ 且 $f(x_1) - f(x_2) - f(x_3) + f(x_4)$ 异于零, 比如说大于零. 在此取这样小的 $\delta > 0$, 使得区间 $(x_i - \delta, x_i + \delta)$ 不相交且被包含在 $[a, b]$ 中. 我们置 $h(x_1) = h(x_4) = 1$, $h(x_2) = h(x_3) = -1$, $h(a) = h(b) = h(x_i \pm \delta) = 0$, 并且设 h 在这些点之间是线性

的. 容易见到, h 有符合 G 的要求的二次积分. 此外, 当 $\delta \rightarrow 0$ 时,

$$\delta^{-1} \int_{x_i-\delta}^{x_i+\delta} f h dx \rightarrow f(x_i) h(x_i),$$

从而, 对于任意小的 $\delta > 0$, $\int_a^b f h dx > 0$, 这导致矛盾. 从而引理 3 得证.】

由 (14) 和引理 3, 可以导出 $f = A + Ax + B$; 因此, 在 $[a, b]$ 上, $f' = \lambda + A \in \text{Lip}_M 1$. 因为 a, b ($0 < a < b < 1$) 是任意的, 故在 $[0, 1]$ 上 $f' \in \text{Lip}_M 1$.

定理 11 的最后部分是易于导出的. 对于每个 $\varepsilon > 0$ 以及无穷多个 n , 我们有

$$|f(x) - B_n(f, x)| \leq \varepsilon \frac{x(1-x)}{2n}.$$

由此, 又可导得 $f' \in \text{Lip}_\varepsilon 1$. 因为 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 因而有 $f' = \text{const}$. 至此定理 11. 证毕.】

6. 附 记

1. 定理 4 的条件 2(1) 对于序列 $L_n(f)$ 在每个 $f \in X$ 的收敛性仅仅是必要的. 但它却很接近必要兼充分的条件. 更确切地说, 映 Banach 空间 X 到另一个 Banach 空间 Y 的有界线性算子的序列 $L_n(f)$ 对于每个 $f \in X$ 按范数收敛当且仅当: (a) X 的线性组合在 X 中稠密的某元素集上收敛; (b) 范数 $\|L_n\|$ 是有界的. 这个定理是有关算子序列收敛的各种特殊结果的本源.

2. 对于函数 $f \in C^*$, 自然可考虑多项式算子序列

$$L_n(f, x) = \lambda_0^{(n)} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

其中 a_k, b_k 是 f 的 Fourier 系数. 常数 $\lambda_k^{(n)}$ 决定着序列 L_n . 在 $\lambda_k^{(n)}$ 的项中加些什么条件, 才能使得对于每个 $f \in C^*$ 有 $L_n(f) \rightarrow f$ 成立? 根据附记 1 所述的定理, 可以得到如下的必要和充分条件 [15, 第 485 页]: (a) 对每个固定的 k , 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\lambda_k^{(n)} \rightarrow 1$; (b) “Lebesgue 常数”

$$A_n = \int_0^\pi \left| \frac{1}{2} \lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos kt \right| dt$$

是有界的.

3. 对于特殊的 $\lambda_k^{(n)}$ 可给出关于 $\lambda_k^{(n)}$ 的简单条件. 这里最有趣的结果是 Nikol'skii 导出的. 他证明了 [15, 第 504 页], 若二阶差 $\lambda_k^{(n)} - 2\lambda_{k+1}^{(n)} + \lambda_{k+2}^{(n)}$ (若 $k > n$, 则置 $\lambda_k^{(n)} = 0$) 全是正的或全是负的, 则下述条件是必要和充分的: 附记 2 的条件 (a);

(b) 对所有的 k, n , $|\lambda_k^{(n)}| \leq M$ 以及

(c) $\sum_{k=0}^n \lambda_k^{(n)} (n-k+1)^{-1} = O(1)$.

4. Favard [50] 给出了定理 10 的简单证明, 他几乎完全依赖于级数的一般理论, 而对于 Fourier 级数的特殊性质的依赖则降低到最低程度. 但是, 我们的证明对应用于其他算子序列是有好处的, Butzer, Sunouchi 与 Watari [92] 以及 Tureckii [99] 给出了决定饱和类的一般方法. De Leeuw 最早研究 Bernstein 多项式的饱和类. 他的结果未有计及因子 $x(1-x)$. 定理 11 是 Lorentz [76] 给出的.

5. 在第 4 节中所采用的 $\tilde{f}$ 的定义, 并非标准的. 通常说 $\tilde{f}(x)$ 有定义, 是指积分 (7) 在 Cauchy 的意义下收敛 (对所有的 $x \in K$), 也就是说, 当 $h \rightarrow 0+$ 时, $\int_h^\pi$ 的极限存在. 在这种 $\tilde{f}$ 的定义下, 定理 10 仍然是成立的, 但需要关于共轭函数的较深刻的引理.

问 题

1. 试证明不存在对于每个 $f \in C[a, b]$ 都有性质 $L_n(f) \rightarrow f$ 的代数多项式算子序列 $L_n(f)$.

2. 算子 $s_n(f)$ 并没有最优逼近阶.

3. 对于 $f \in C[a, b]$, 以 $z(f)$ 表示 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中的零点个数(有限或无限). 线性算子 $g = L(f)$ 具有性质 (Z) 是指对于每个 $f \in C$, 有 $z(g) \leq z(f)$. 倘若再假定 L 将函数 1 变成其自身, 则对于每个 $f \in C$, 有

$$\text{Var}_{a,b} L(f) \leq \text{Var}_{a,b} f.$$

(提示: 利用变差的 Banach 公式[26, 第 225 页].)

4. 对于每个 n , Bernstein 算子 $B_n(f)$ [1.2(5)] 有性质 (Z) (Schoenberg). [提示: 利用符号的 Descartes 规则.]

5. 若函数 $1, x, x^2$ 以 $1, \sin x, \cos x$ 代替, 则定理 3 对于正三角多项式算子仍成立 (Korovkin).

6. 若 $L_n (n=1, 2, \dots)$ 是 $C[a, b]$ 上的正线性泛函, 又若对于函数 $e(x) \equiv 1, g(x) = (x-c)^2 (a \leq c \leq b), L_n(e) \rightarrow 1, L_n(g) \rightarrow 0$, 则对于所有的 $f \in C[a, b]$, 有 $L_n(f) \rightarrow f(c)$ (Korovkin).

7. 证明第 6 节附记 1 中所述的定理. 作为应用, 试从 Fejér 核的性质导出第一章定理 5.

8. 证明

$$V_{m,n}(f, x) = \frac{1}{n-m} \{s_m(f, x) + \dots + s_{n-1}(f, x)\} \quad (m < n)$$

$$\text{等于积分 } \frac{1}{2\pi(n-m)} \int_{\mathbb{R}} f(x+t) \frac{\sin \frac{n+m}{2} t \sin \frac{n-m}{2} t}{\sin^2(t/2)} dt.$$

$$9. \text{ 证明 } \|V_{m,n}\| = \frac{4}{\pi^2} \log \frac{n}{n-m} + O(1).$$

若 $m = m(n) < n$, 试由此式以及问题 7 导出对于所有的 $f \in C^*$, 有 $V_{m,n}(f) \rightarrow f (n \rightarrow \infty)$ 的收敛性条件.

10. 设 $\lambda_k^n (n, k=1, 2, \dots)$ 是使 $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^n| < +\infty (n=1, 2, \dots)$ 的二

重序列, 又设 $L_n(f, x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, 其中 a_k, b_k 是 $f \in C^*$ 的 Fourier 系数. 如果对于某个 $r > 0, \phi(k) > 0$,

$$(*) \lim_{n \rightarrow \infty} n^r (1 - \lambda_k^{(n)}) = \phi(k) \quad (k=1, 2, \dots),$$

则 $\|f - L_n(f)\| = o(n^{-r})$ 蕴含 f 是个常数.

11. 若条件 $(*)$ 被满足, 则 $\|f - L_n(f)\| = O(n^{-r})$ 蕴含级数

$$f_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^r (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

的算术平均在 $N \rightarrow \infty$ 时, 满足 $\|\sigma_N(f_r)\| = O(1)$ (Sunouchi 与 Watari).

[提示: 考察 $\sigma_N(f - L_n(f))$.]

12. Jackson 积分 4.2(3) 具有形式

$$J_n(f, x) = \sum_{k=0}^{2n-2} \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

其中 $\lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{3}{2}(k/n)^2 + O(n^{-3})$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 对每个 k 都成立.

13. 算子 $J_n(f, x)$ 的饱和类由所有具有 $f' \in \text{Lip} 1$ 的函数 $f \in C^*$ 所组成, 最优逼近阶为 $\psi(n) = n^{-2}$. [提示: 利用问题 10-12 以及第三章的问题 4.]

第八章

函数类的逼近

1. 引言

对于某些函数类中的函数 f , 我们在第四章和第五章中已经得到了 f 借助三角或代数多项式逼近阶的上界. 所有这些结果都包含着一个未被确定的常数 M . 但是, 只要对证明稍加深入, 每次都容易求出 M 的具体数值. 现在我们就来求最佳可能常数 M .

要想对于任意的 f 回答上述问题是不可能的. 因此, 需要考虑函数类. 设 $\mathfrak{R}$ 是 C^* 的子集. 在此以公式

$$E_n^*(\mathfrak{R}) = \sup_{f \in \mathfrak{R}} E_n^*(f) \quad (1)$$

来定义 $\mathfrak{R}$ 借助 n 阶三角多项式逼近的阶. 可以见到, $\mathfrak{R}$ 中“最坏的函数”决定着 $E_n^*(\mathfrak{R})$. 再拓广一点, 设 $\mathfrak{R}$ 和 $\mathfrak{R}'$ 是某度量空间的两个子集, 那么

$$E_{\mathfrak{R}'}(f) = \inf_{g \in \mathfrak{R}'} \rho(f, g)$$

是 f 借助元素 $g \in \mathfrak{R}'$ 逼近的阶, 而

$$E_{\mathfrak{R}'}(\mathfrak{R}) = \sup_{f \in \mathfrak{R}} E_{\mathfrak{R}'}(f)$$

是 $\mathfrak{R}$ 借助 $\mathfrak{R}'$ 逼近的阶, 或 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{R}'$ 的偏离. 显然, 若 $\mathfrak{R}'$ 是所有 n 阶三角多项式的空间, 而 $\mathfrak{R}$ 是 C^* 的子集, 则 $E_n^*(\mathfrak{R})$ 等于 $E_{\mathfrak{R}'}(\mathfrak{R})$.

本章的目的是对类 $W_p^*(p=1, 2, \dots)$ (见第三章第 7 节),

类 $\text{Lip } \alpha (0 < \alpha \leq 1)$ 以及某些解析函数类确定 $E_n^*(\mathfrak{R})$ 的精确值. 为此, 先来考察一下一致逼近与 L^1 范数下的逼近之间的联系.

空间 $L^1[A]$, 其中 $A = [a, b]$ 或 $A = K$, 由所有在 A 上的 Lebesgue 可积实函数 f 所组成, 其范数为 $\|f\|_1 = \int_A |f(x)| dx$.

若 $A = K$, $f \in L^1$, 那么在此范数下 f 借助三角多项式逼近的阶记作 $E_n^*(f)_1$. L_1 逼近对于这里议题的应用, 主要根据是下述对于一切 $f \in W_p^*$ 都成立的卷积公式 [见 3(13)],

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \int_K G(x-t) h(t) dt.$$

这里, G 是某个固定的函数, 而 h 依赖于 f 且满足 $|h(t)| \leq 1$. L^1 -和 C^* -逼近具有如下的对偶关系: 若 $S_n(u)$ 是在 L^1 范数下以 $\leq \varepsilon$ 的误差逼近 $G(u)$ 的三角多项式, 即 $\int_K |G - S_n| du \leq \varepsilon$, 则

$$T_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \int_K S_n(x-t) h(t) dt$$

是一致逼近于 $f(x)$ 的另一个三角多项式: $|f(x) - T_n(x)| \leq \varepsilon$.

这里所有的结果都是关于三角逼近的; 而对于代数逼近还没有相应的结果 (某些解析函数类例外).

2. 空间 L^1 中的逼近

本节的定理可用来处理 (在 L^1 范数下的) 最佳逼近多项式能通过简单的代数运算以及积分而明显地被决定的特殊情形.

定理 1 设 $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$ 是 $A = [a, b]$ 或 $A = K$ 上的可积函数组, 又设 $f(x)$ 也是一可积函数. 那么当

$$\int_A \phi_k(x) \operatorname{sign}[f(x) - P(x)] dx = 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad (1)$$

时, $P(x) = \sum_1^n a_k \phi_k(x)$ 是 f 的最佳逼近多项式. 假如 $f(x) - P(x)$ 仅在零测度集上等于零, 那么上述条件也是必要的.

证明 设条件 (1) 是满足的. 若 Q 是 ϕ_k 的多项式, 则 $\int_A (Q - P) \operatorname{sign}(f - P) dx = 0$; 因此,

$$\begin{aligned} \int_A |f - Q| dx &\geq \int_A (f - Q) \operatorname{sign}(f - P) dx \\ &= \int_A (f - P) \operatorname{sign}(f - P) dx = \int_A |f - P| dx. \end{aligned}$$

所以条件 (1) 是充分的. 条件必要性的证明稍难 (而且不大有用). 假设对于某个 k ($1 \leq k \leq n$), 有

$$\int_A \phi_k \operatorname{sign}(f - P) dx = \rho \neq 0.$$

在使 $f(x) - P(x) \neq 0$ 的点 x 处 (几乎处处), 若 $\lambda \rightarrow 0$, 则有

$$\operatorname{sign}[f(x) - P(x) - \lambda \phi_k(x)] \rightarrow \operatorname{sign}[f(x) - P(x)].$$

因此, 根据 Lebesgue 收敛定理, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 有

$$\int_A \phi_k \operatorname{sign}[f - P - \lambda \phi_k] dx \rightarrow \rho.$$

于是, 有可能取到 λ , 使得

$$\lambda \int_A \phi_k \operatorname{sign}[f - P - \lambda \phi_k] dx > 0.$$

如果设 $Q = P + \lambda \phi_k$, 则有

$$\begin{aligned} \int_A |f - P| dx &\geq \int_A (f - P) \operatorname{sign}(f - Q) dx \\ &> \int_A (f - P - \lambda \phi_k) \operatorname{sign}(f - Q) dx \\ &= \int_A |f - Q| dx. \end{aligned}$$

由是, P 不是最佳逼近多项式.

证毕.】

定理 1 往往用于这样的情形: 假设已经找到了 A 的点 $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ 以及具有下列性质的多项式 P :

(a) 差 $f(x) - P(x)$ 在 x_k 处变号, 并且在这些点之间保持常号;

(b) 若 $\Phi(x)$ 是这样的函数: 在 A 上 $\Phi(x) = \pm 1$, 并且恰在点 x_k 处变号, 则

$$\int_A \phi_k \Phi dx = 0 \quad (k=1, \dots, m). \quad (2)$$

那么, P 是 f 在 L^1 范数下的最佳逼近多项式, 并且 f 借助 ϕ_k 的多项式逼近的阶是

$$E_n(f)_1 = \left| \int_A f(x) \Phi(x) dx \right|. \quad (3)$$

证明是显然的: 因为 $\Phi(x) = \varepsilon \operatorname{sign}[f(x) - P(x)]$ a.e., 其中 $\varepsilon = 1$ 或 $\varepsilon = -1$; 故 (2) 蕴含条件 (1). 进一步, 有

$$\begin{aligned} \int_A |f - P| dx &= \int_A (f - P) \operatorname{sign}(f - P) dx \\ &= \int_A f \operatorname{sign}(f - P) dx \\ &= \left| \int_A f \Phi dx \right|. \end{aligned}$$

在此把它应用于三角逼近. 下面的定理有两个变式: 对于偶函数 G 和奇函数 H . 如果它们在 K 上可积且连续, 并且在 K 上除 $x=0$ 外无限次可微; 又设对于每次选取的实系数 $\lambda_k (k=0, 1, \dots, n-1)$, 差

$$G(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \cos kx \quad \left[\text{或 } H(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \sin kx \right]$$

在开区间 $(0, \pi)$ 内至多有 n [或 $n-1$] 个零点 (计及它们的重数). 那么我们就称偶 (或奇) 函数 G (或 H) 在 K 上满足条

件 A_n .

定理 2 设 G (或 H) 是 K 上满足条件 A_n 的函数. 又设 $T_{n-1}(x)$ 是 $n-1$ 阶偶 (或奇) 三角多项式, 它在开区间 $(0, \pi)$ 内 $\cos nx$ (或 $\sin nx$) 的 n (或 $n-1$) 个零点处插值 G (或 H), 则 T_{n-1} 是在 L^1 范数下对于 G (或 H) 的最佳逼近多项式, 并且

$$\begin{aligned} E_{n-1}^*(G)_1 &= \left| \int_K G(x) \operatorname{sign} \cos nx \, dx \right|, \\ E_{n-1}^*(H)_1 &= \left| \int_K H(x) \operatorname{sign} \sin nx \, dx \right|. \end{aligned} \quad (4)$$

证明 若 $\tilde{T}_{n-1}(x)$ 是 $G(x)$ 在 K 上的最佳逼近多项式, 则 $\tilde{T}_{n-1}(-x)$ 和 $T_{n-1}(x) = \frac{1}{2} [\tilde{T}_{n-1}(x) + \tilde{T}_{n-1}(-x)]$ 也有此性质. 因此, G 有偶的最佳逼近多项式 [事实上 (参看第 8 节, 附记 1) G 有唯一的最佳逼近多项式]; 类似地, H 有奇的最佳逼近多项式. 于是, 我们可以研究 G (或 H) 借助偶的 (或奇的) 三角多项式的逼近.

假设定理 1 中的组 $\phi_1, \dots, \phi_n$ 是 $1, \cos x, \dots, \cos(n-1)x$ (或 $\sin x, \dots, \sin(n-1)x$). 设 $x_k [k=1, \dots, n$ (或 $k=1, \dots, n-1$)] 是 $\cos nx$ (或 $\sin nx$) 在 $(0, \pi)$ 中的零点. 内插多项式 $T_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \cos kx$ (或 $= \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \sin kx$) 存在. 由条件 A_n , 差 $G - T_{n-1}$ (或 $H - T_n$) 仅以诸 x_k 为零点, 并且每个 x_k 都是单重零点. 于是条件 (a) 满足了. 在条件 (b) 中取 $\Phi(x) = \operatorname{sign} \cos nx$ (或 $= \operatorname{sign} \sin nx$), 关系式 (2) 可由

$$\int_K \Phi(x) \cos kx \, dx = \int_K \Phi(x) \sin kx \, dx = 0 \quad (k=0, \dots, n-1) \quad (5)$$

导出. 若 $k=0$, 它是显而易见的; 对于 $1 \leq k \leq n$, 则可见

4.3(9).

证毕.】

下面是一个非常相似的定理.

定理 3 [Bernstein (2, 第 I 卷, 第 330~332 页)] 假设在 $(-1, +1)$ 中 $f^{(n+1)}(x) > 0$, 那么 $f(x)$ 在 L^1 范数下的最佳逼近代数多项式是在 $n+1$ 个点 $x_k = \cos(k\pi/(n+2))$ ($k=1, \dots, n+1$) 上内插 $f(x)$ 的多项式 $P_n(x)$.

证明 设 $P_n(x)$ 在诸点 x_k 处内插 f . 又设 $f(x) - P_n(x) = g(x)$ 有 $n+2$ 个零点 (计及它们的重数). 那么, 根据 Rolle 定理, $g^{(n+1)}(x)$ 在 $(-1, +1)$ 内有零点. 但

$$g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) > 0.$$

于是, g 在 x_k 处有 $n+1$ 个单重零点并且恰在这些点上变号. 条件 (2) 取形式

$$\int_{-1}^{+1} x^m \Phi(x) dx = 0 \quad (m=0, 1, \dots, n)$$

或作代换 $x = \cos t$, 得

$$\int_0^\pi \cos^m t \sin t \Psi(t) dt = 0, \quad (6)$$

其中 $\Psi(t) = \pm 1$ 是恰在诸点 $t_k = k\pi/(n+2)$ ($k=1, \dots, n+1$) 处变号的函数. 这等价于

$$\int_K \cos^m t \sin t \Psi(t) dt = 0, \quad \Psi(t) = \text{sign} \sin(n+2)t.$$

但是, 对于 $m=0, 1, \dots, n$, $\cos^m t \sin t$ 是阶 $\leq n+1$ 的三角多项式. 于是, 根据 4.3(9) 可知, (6) 是满足的. 证毕.】

假如在 $[-1, +1]$ 上函数 $f(x)$ 的一切导数 $f^{(n)}(x)$ 存在并且都有相同的符号, 则称 $f(x)$ 在 $[-1, +1]$ 内是绝对单调的. 可以见到, 对于绝对单调函数, 所有最佳 L^1 逼近的多项式都是容易描述的.

3. 类 W_p^* 的逼近阶

下面讨论一致逼近. 主要定理有

定理 4 (Favard [49]) 类 W_p^* ($p=1, 2, \dots$) 的逼近阶由下式表示:

$$E_{n-1}^*(W_p^*) = K_p \frac{1}{n^p} \quad (n=1, 2, \dots),$$

其中

$$K_p = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{p+1}}, & \text{若 } p \text{ 是奇数,} \\ \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{p+1}}, & \text{若 } p \text{ 是偶数.} \end{cases} \quad (2)$$

对于每个 $n, p=1, 2, \dots$, 存在着由 (16) 给出的极函数 $f_{np} \in W_p^*$, 使得

$$E_{n-1}^*(W_p^*) = \|f_{np}\| = |f_{np}(0)|. \quad (3)$$

该函数在 K 上有 $2n$ 个极大和极小值的点, 在这些点上函数变号地取值 $\pm K_p n^{-p}$.

具有奇下标 p 的 K_p 可以表为 π 的有理式. 例如, 利用已知的公式, 有

$$K_1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2} \pi. \quad (4)$$

为方便起见, 下面证明一个略为广一点的定理:

定理 5 设 G (或 H) 是 K 上满足条件 A_n 的给定函数, 以 $\mathfrak{N}(G)$ (或 $\mathfrak{N}(H)$) 表示所有可表为形式

$$f(x) = \int_K G(x-t)h(t)dt \quad \left[\text{或 } f(x) = \int_K H(x-t)h(t)dt \right] \quad (5)$$

的函数 f 的类, 其中 $h(t)$ 是某个满足 $|h(t)| \leq 1$ a. e. 的可测函数. 设

$$\left. \begin{aligned} f_{nG}(x) &= \int_K G(x-t) \operatorname{sign} \cos nt \, dt \\ f_{nH}(x) &= \int_K H(x-t) \operatorname{sign} \sin nt \, dt \end{aligned} \right\} \quad (n=1, 2, \dots). \quad (6)$$

那么, 对于一致逼近,

$$\begin{aligned} E_{n-1}^*(\mathfrak{N}(G)) &= \|f_{nG}\| = |f_{nG}(0)|, \\ E_{n-1}^*(\mathfrak{N}(H)) &= \|f_{nH}\| = |f_{nH}(0)|. \end{aligned} \quad (7)$$

定理 5 的证明 在此仅对函数 G 给出证明; 函数 H 的情形是完全类似的. 显然, $f_n = f_{nG} \in \mathfrak{N}(G)$. 于是有

$$f_n\left(x + \frac{\pi}{n}\right) = \int_K G(t) \operatorname{sign} \cos n\left(x + \frac{\pi}{n} - t\right) dt = -f_n(x).$$

假如 $|f_n(x)|$ 在某点 x_0 处达到它的极大值, 那么所有的点 $x_k = x_0 + k\pi/n$ ($k=0, \pm 1, \dots$) 也使 $|f_n(x)|$ 取到极大值, 并且在 x_k 处 $f_n(x)$ 的符号交错 (可取 $x_0=0$). 在 K 上有 $2n$ 个相异的点 x_k . 因此, 根据 Chebyshev 定理, 常数零是 f_n 的 $n-1$ 阶最佳逼近三角多项式, 于是

$$E_{n-1}^*(\mathfrak{N}(G)) \geq E_{n-1}^*(f_n) = \|f_n\| > |f_n(0)|. \quad (8)$$

下面来估计 $E_{n-1}^*(\mathfrak{N}(G))$ 的上界. 设 S_{n-1} 是 G 在 L^1 范数下的最佳逼近多项式, 又设 $f \in \mathfrak{N}(G)$ 是形如 (5) 的任一函数. 那么

$$T_{n-1}(x) = \int_K S_{n-1}(x-t) h(t) dt$$

也是 $n-1$ 阶三角多项式. 利用 2(4), 可以得到

$$E_{n-1}^*(f) \leq \|f - T_{n-1}\| = \max_x |f(x) - T_{n-1}(x)|$$

$$\leq \max_x \int_K |G(x-t) - S_{n-1}(x-t)| \cdot |h(t)| dt$$

$$\leq E_{n-1}^*(G)_1$$

$$= \left| \int_K G(t) \operatorname{sign} \cos nt \, dt \right| = |f_n(0)|.$$

这就证明了 $E_{n-1}^*(\mathfrak{R}(G)) \leq |f_p(0)|$.

证毕.】

定理 4 的证明 首先考察函数

$$D_p(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx - p\pi/2)}{k^p} \quad (p=1, 2, \dots), \quad (10)$$

对于 $p \geq 2$, 级数 (10) 在 K 上一致收敛; 若 $p=1$, 则 (10) 在 K 上有界收敛 [见 (24, 第 29 页)] 而在 $\varepsilon < x < \pi - \varepsilon$ 内一致收敛, 其中 $0 < \varepsilon < \pi/2$. 在这种情况下, (10) 是初等函数的 Fourier 级数:

$$D_1(x) = \frac{\pi - x}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad (0 < x < 2\pi).$$

假如我们定义 $D_0(x) = -(1/2\pi)$, 则有关系式

$$D'_p(x) = D_{p-1}(x) \quad (11)$$

[$p=1, 2, 3, \dots, x \in K$ (若 $p=1, 2$, 则 $x \neq 0$)].

可以见到, 除 $x=0$ 可能例外, D_p 在 K 上是连续且可微的. 函数 D_p 是偶的或是奇的决定于 p 是偶数或是奇数.

引理 1 对于 $p, n=1, 2, \dots$, 函数 D_p 满足条件 A_n .

首先证明, 若 $D_p (p \geq 2)$ 不满足条件 A_n , 则 D_{p-1} 也不满足. 事实上, 若 p 是偶数, 则在假设前提下存在偶的三角多项式 T_{n-1} , 使得 $D_p - T_{n-1}$ 在 $(0, \pi)$ 上有多于 n 个零点 (计及其重数). 根据 Rolle 定理和 (11), $D_{p-1} - T'_{n-1}$ 在 $(0, \pi)$ 上有多于 $n-1$ 个零点; 也即, D_{p-1} 不满足 A_n . 同样的论证适合于 p 是奇数 (从而 $p \geq 3$) 的情形. 这只要注意 K 上的每个奇的连续函数有零点 0 和 π 就够了.

于是, 若 $D_p (p \geq 1)$ 不满足 A_n , 则 D_1 也不满足. 但是这蕴含着对于某个奇三角多项式 T_{n-1} , $D_1 - T_{n-1}$ 在 $(0, \pi)$ 内至少有 n 个零点. 但 π 也是零点. 根据 Rolle 定理, 导数 $-(1/2\pi) - T'_{n-1}$ 在 $(0, \pi)$ 内至少有 n 个零点; 因此它在 K 上

有 $2n$ 个零点, 但这是不可能的.

证毕. $\square$

对于函数 $f \in W_p^*$, 设

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

是 f 的 (收敛的) Fourier 级数. 以 W_{p0}^* 表示平均值为零 (即 $a_0=0$) 的所有 $f \in W_p^*$ 的集. f 与 $f - (a_0/2)$ 的逼近阶是相同的. 因此 $E_{n-1}^*(W_p^*) = E_{n-1}^*(W_{p0}^*)$ ($n=1, 2, \dots$), 并且在定理 4 的命题中可以用 W_{p0}^* 代替 W_p^* .

现在来证明, 诸函数 $f \in W_{p0}^*$ 有形如 (5) 的表示式. 由分部积分, 可以得到

$$\begin{aligned} a_k \cos kx + b_k \sin kx &= \frac{1}{\pi} \int_K f(t) \cos k(x-t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_K f'(t) \frac{\cos(k(x-t) - \pi/2)}{k} dt, \end{aligned}$$

依次类推, 有

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{\pi} \int_K f^{(p)}(t) \frac{\cos(k(x-t) - p\pi/2)}{k^p} dt. \quad (12)$$

根据级数 (10) 的一致或有界收敛性, 可以得到

$$f(x) = \int_K D_p(x-t) h(t) dt \quad (f \in W_{p0}^*), \quad (13)$$

其中 $h(t) = f^{(p)}(t)$ 并且 $|h(t)| \leq 1$ a.e. 可以见到 $W_{p0}^* \subset \mathfrak{R}(D_p)$.

反之, 假如给定一个均值为零的有界函数 h , 则它在 K 上有唯一的均值为零的 p 次不定积分 (第一章, 第 1 节). 显然, 这个积分是由 (13) 给出的.

特别, 设 $f_{n,p}$ 是 $\mathfrak{R}(D_p)$ 的极函数. 它由 (6) 给出, 其中 G [或 H] 等于 D_p ; 这也即 (13), 其中

$$h(x) = \begin{cases} \text{sign} \sin nx, & \text{若 } p \text{ 是奇数,} \\ \text{sign} \cos nx, & \text{若 } p \text{ 是偶数.} \end{cases} \quad (14)$$

因此, (3) 可以由 (7) 以及包含关系 $W_{p0}^* \subset \mathfrak{M}(D_p)$ 推出来.

余下要计算 $f_{np}(x)$ 和 $|f_{np}(0)|$. 先来考察 Fourier 级数展开式

$$\frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)x}{2m+1} = \begin{cases} +1, & \text{若 } 0 < x < \pi, \\ -1, & \text{若 } -1 < x < 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0, \pi. \end{cases}$$

右边在 K 上等于 $\text{sign} \sin x$. 分别以 nx 或 $nx + \frac{1}{2}\pi$ 代替 x , 对于函数 (14), 在 K 上相应地有

$$h(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin n(2m+1)x}{2m+1}, & \text{若 } p \text{ 是奇数,} \\ \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos n(2m+1)x}{2m+1}, & \text{若 } p \text{ 是偶数.} \end{cases} \quad (15)$$

关系式 (12) 告诉我们, 对于 $f \in W_{p0}^*$, f 的 Fourier 系数 a_k, b_k 以及 $f^{(p)}$ 的系数 α_k, β_k 由

$$\left. \begin{aligned} a_k &= (-1)^{(p+1)/2} k^{-p} \beta_k \\ b_k &= (-1)^{(p-1)/2} k^{-p} \alpha_k \end{aligned} \right\} \quad \text{若 } p \text{ 是奇数,}$$

$$\text{以及} \quad \left. \begin{aligned} a_k &= (-1)^{p/2} k^{-p} \alpha_k \\ b_k &= (-1)^{p/2} k^{-p} \beta_k \end{aligned} \right\} \quad \text{若 } p \text{ 是偶数,}$$

相联系. 于是

$$f_{np}(x) = \begin{cases} (-1)^{(p+1)/2} \frac{4}{\pi n^p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos n(2m+1)x}{(2m+1)^{p+1}}, & \text{若 } p \text{ 是奇数,} \\ (-1)^{p/2} \frac{4}{\pi n^p} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos n(2m+1)x}{(2m+1)^{p+1}}, & \text{若 } p \text{ 是偶数.} \end{cases} \quad (16)$$

由此得到数值 (1).

证毕.】

由 Favard 定理可推得

$$E_{n-1}^*(W_p^*) \leq \frac{\pi}{2} n^{-p} \quad (n=1, 2, \dots), \quad (17)$$

由 Jackson 定理只能推知右边不超过 $C_p n^{-p}$, 其中 C_p 是与 p 有关的某个数. 事实上, 对于奇数 p , $K_p \leq K_1 = \frac{1}{2}\pi$; 对于偶数 p , $K_p \leq 4/\pi$.

若 L 是映 O^* 到其自身的线性算子并且 $\mathfrak{R} \subset O^*$, 则称

$$E(\mathfrak{R}; L) = \sup_{f \in \mathfrak{R}} \|f - L(f)\| \quad (18)$$

为 $\mathfrak{R}$ 借功算子 L 逼近的阶. 下述问题是值得考虑的: 若集 $\mathfrak{R} \subset O^*$ 与整数 $n=0, 1, \dots$ 给定了, 则是否存在 n 阶线性多项式算子 L_n 使得 $E(\mathfrak{R}; L_n) = E_n^*(\mathfrak{R})$? 这种算子称为关于 $\mathfrak{R}$ 的最优算子.

定理 6 对于每个 $n=0, 1, \dots$, 类 $W_p^*(p=1, 2, \dots)$ 有最优算子.

证明 设 S_{n-1} (第 148 页) 是在 L^1 范数下的最佳逼近于 D_p 的多项式. 置

$$\begin{aligned} L_{n-1}(f, x) &= \frac{1}{2} a_0 + \int_K S_{n-1}(x-t) f^{(p)}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \int_K S_{n-1}^{(p)}(x-t) f(t) dt. \end{aligned} \quad (19)$$

不等式(9)蕴含

$$\|f - L_{n-1}(f)\| \leq E_{n-1}^*(W_p^*) \quad (f \in W_p^*). \quad \text{证毕.} \blacksquare$$

4. 距离矩阵

设 $\omega(h)$ 是连续模, 也即: 一个定义在 $0 \leq h \leq l$ 上满足 $\omega(0)=0$, $\omega(h) \geq 0$ 并且连续、递增和半可加 (见第三章第 5 节) 的函数. 那么 A_ω 是定义在 $[a, b]$ 或 K 上, 对于 $0 \leq h \leq l$ (取 $l=b-a$, 或者相应地, $l=\pi$) 满足 $\omega(f, h) \leq \omega(h)$ 的所有

实函数 f 的集. 在下一节中, 对于当 ω 为凹的情形, 求出集 Δ_ω 借助 n 阶三角多项式逼近阶的精确值 $E_n^*(\Delta_\omega)$. 它包含了所有的函数 $\omega(h) = Mh^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$). 主要结果——定理 9、10 以及 11 是 Korneičuk [66, 68, 69] 建立的, 而通过定理 7 来证明定理 9 的方法是 Timan [97] 给出的.

设 $X = (x_1, \dots, x_n)$ 是一个度量空间点的 n -列, 它们未必是相异的. 以 $a_{ij} = \rho(x_i, x_j)$ 为元素的矩阵 $A = (a_{ij})$ 有下列性质:

$$a_{ij} \geq 0 \quad \text{而} \quad a_{ii} = 0 \quad (1)$$

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (2)$$

$$a_{ik} \leq a_{ij} + a_{jk} \quad (3)$$

因此, 有

$$|a_{ik} - a_{jk}| \leq a_{ij}. \quad (4)$$

满足条件(1)到(3)的矩阵 A 称为距离矩阵 (这一名称是以下述不难证明的事实为依据的: 对于每个距离矩阵 A , 存在着包含点 x_i 的 n -列的度量空间, 使得 $\rho(x_i, x_j) \leq a_{ij}$). 对于 $i, j = 1, \dots, n$, 如果 $\rho(x_i, x_j) \leq a_{ij}$, 则称 n -列 X 被距离矩阵 A 所优控 (dominated).

值得注意的是: 当 $x_1, \dots, x_n$ 为实直线 R 上的点的情形: 对于 R 上的 n -列 $X = (x_1, \dots, x_n)$ 和 $Y = (y_1, \dots, y_n)$, 以公式

$$d(X, Y) = \max_i |x_i - y_i| \quad (5)$$

来定义距离. 需要考虑的问题是: 用被给定的距离矩阵 B 所优控的 n -列来逼近任意的 n -列 X , 其中 x_i 在 R 中. 以 B' 表示被 B 优控的所有 Y 的集. 对于 X 的用 B' 逼近的阶 (见第 1 节) 有

定理 7 若 X 被距离矩阵 A 优控, 则

$$E_{B'}(X) \leq \frac{1}{2} \max_{i,j} (a_{ij} - b_{ij}). \quad (6)$$

证明 设 (6) 式右边为 d . 现在求一个 n -列 $Y \in B'$ 使 $d(X, Y) \leq d$.

可以假设 $x_1 \leq \dots \leq x_n$ (不然的话, 重排 X 以及矩阵 A 和 B). 以

$$z_i = \min_{k \leq i} \{x_k + b_{ki}\} \quad (7)$$

定义一个 n -列 Z , 则 Z 被 B 所优控: $|z_i - z_j| \leq b_{ij}$. 这可证明如下: 设 $j < i$, 则

$$\begin{aligned} z_i &\leq \min_{k \leq j} \{x_k + b_{ik}\} \\ &\leq \min_{k \leq j} \{x_k + b_{jk} + b_{ij}\} = z_j + b_{ij}, \\ z_i &\geq \min_{k \leq i} \{x_k + b_{kj} - b_{ij}\} = \min_{k \leq i} \{x_k + b_{kj}\} - b_{ij} \\ &= \min_{k \leq j} \{x_k + b_{kj}\} - b_{ij} = z_j - b_{ij}. \end{aligned}$$

其次证明:

$$0 \leq x_i - z_i \leq 2d. \quad (8)$$

因为 $z_i \leq x_i$, 故左边的不等式成立. 另一方面, 对于某个 $1 \leq k \leq i$, 有 $z_i = x_k + b_{ik}$. 因此

$$x_i - z_i = x_i - x_k - b_{ik} \leq a_{ik} - b_{ik} \leq 2d.$$

设 $y_i = z_i - d$ ($i=1, \dots, n$); 则 n -列 $Y = (y_1, \dots, y_n)$ 被 B 优控, 从而 $d(X, Y) \leq d$. 证毕.]

5. 类 A_ω 的逼近

作为定理 7 的应用, 有下述结果:

定理 8 若 $A = [a, b]$ 或 $A = K$, 相应地, $l = b - a$ 或 $l = \pi$, 又若 $\omega(h)$ 与 $w(h)$ 是定义在 $0 \leq h \leq l$ 上的两个连续模, 则

$$E_{\Delta_\omega}(\Delta_\omega) = \frac{1}{2} \max_{0 \leq h \leq l} [\omega(h) - w(h)]. \quad (1)$$

证明 (a) 设 d 是(1)的右边. 我们先来证明 $E_{\Delta_\omega}(\Delta_\omega) \leq d$. 为此, 对于给定的函数 $f \in \Delta_\omega$ 寻求一个函数 $g \in \Delta_\omega$, 使得 $\|f - g\| \leq d$.

设 $D = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ 是 A 中可列且稠密的集, 又设 $D_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ ($n=1, 2, \dots$), n -列 $X = (f(x_1), \dots, f(x_n))$ 被矩阵 $(\omega(|x_i - x_j|))$ 所优控. 设 B 是以 $w(|x_i - x_j|)$ 为元素的距离矩阵. 根据定理 7, 存在一个 n -列

$$Y = (y_1, \dots, y_n) \in B'$$

以不超过 d 的误差逼近 X : $|f(x_i) - y_i| \leq d$ ($i=1, \dots, n$). 根据取 $g_n(x_i) = y_i$ ($i=1, \dots, n$) 在 D_n 上定义一个函数 g_n . 诸函数 g_n 是一致有界的: 对于每个使 g_n 有定义的 x 有 $|g_n(x)| \leq \|f\| + d$ 成立. 因此, 可以选取一个在 D 的每个点 x_i 上收敛的子列 g_{n_k} ($k=1, 2, \dots$): $\lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(x_i) = g(x_i)$ ($i=1, \dots, n$). 在 D 上的函数 g 显然满足 $|g(x_i) - g(x_j)| \leq w(|x_i - x_j|)$ ($i, j=1, 2, \dots$). 又, $|f(x_i) - g(x_i)| \leq d$ ($i=1, 2, \dots$). 因为 g 在稠密集 D 上一致连续, 故可以把它拓广成在 A 上连续的函数 g , 使之具有所需的一切性质.

(b) 为了完成证明, 还需要作一个函数 $f_0 \in \Delta_\omega$, 对于它借助 $g \in \Delta_\omega$ 的逼近不可能有 $< d$ 的误差.

对于 $A = [a, b]$, 设 $f_0(x) = \omega(x - a)$. 若 $A = K$, 则取 $f_0(x) = \omega(|x|)$, 其中 $-\pi \leq x \leq \pi$. 那么 (参见第 55 页) $f_0 \in \Delta_\omega$.

现在取 h ($0 \leq h \leq l$) 使得 $d = \frac{1}{2} [\omega(h) - w(h)]$. 对于每个 $g \in \Delta_\omega$, 有 (若 $A = K$, 则置 $a = 0$)

$$\begin{aligned}
2\|f_0 - g\| &\geq |f_0(a+h) - g(a+h) + g(a)| \\
&\geq f_0(a+h) - |g(a+h) - g(a)| \\
&\geq \omega(h) - w(h) = 2d. \quad \text{证毕.}
\end{aligned}$$

引理 2 设 ω 是凹连续模. 那么对于每于 $h(0 < h \leq l)$, 存在 $M \geq 0$, 使得

$$\max_{0 \leq x \leq h} [\omega(x) - Mx] = \omega(h) - Mh. \quad (2)$$

证明 在此要用到关于递增凹函数 $\omega(x)$ 的下列事实(见 [23, 第 94 页]). 在每一点 $h(0 < h \leq l)$, 函数 ω 有一个有限的右导数 $\omega'_+(h)$ 和有限的左导数 $\omega'_-(h)$, 并且 $\omega'_+(h) \leq \omega'_-(h)$. 此外, 若 M 介于上述两数之间, 则曲线 $y = \omega(x)$ 位于以 M 为斜率并且通过点 $(h, \omega(h))$ 的直线之下.

从而可推知:

$$\omega(x) \leq M(x-h) + \omega(h) \quad (0 \leq x \leq l). \quad \text{证毕.} \quad \square$$

本节主要结果是下述的

定理 9 设 ω 是凹连续模, 则

$$E_{n-1}^*(A_\omega) = \max_{f \in A_\omega} E_{n-1}^*(f) = \frac{1}{2} \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (n=1, 2, \dots). \quad (3)$$

(3) 中的极大值被由下面 (6) 式给出的函数 $f_n \in A_\omega$ 所达到.

证明 以 $M = M(n) \geq 0$ 表示对于 $h = \pi/n$ 使 (2) 成立的 M 值. 根据定理 8 以及引理 2, 对于每个 $f \in A_\omega$ 存在函数 $g \in \text{Lip}_M 1$, 使得

$$\|f - g\| \leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq u \leq \pi} [\omega(u) - Mu] = \frac{1}{2} \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) - \frac{\pi M}{2n}. \quad (4)$$

根据定理 4 和 3(4), 类 $W_1^* = \text{Lip}_1 1$ 中的每个函数可被 $n-1$ 阶三角多项式逼近到误差不超过 $\frac{1}{2} \pi/n$. 因为 $(g/M) \in W_1^*$, 故有某个 T_{n-1} , 使得

$$\|g - T_{n-1}\| \leq \frac{\pi M}{2n}. \quad (5)$$

由(4)和(5), $\|f - T_{n-1}\| \leq \frac{1}{2} \omega(\pi/n)$. 可推知 $E_{n-1}^*(A_\omega)$ 有同样的上界.

设 f_n 是由

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \omega(2x), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2n}, \\ \frac{1}{2} \omega\left(\frac{2\pi}{n} - 2x\right), & \frac{\pi}{2n} \leq x \leq \frac{\pi}{n}. \end{cases} \quad (6)$$

给出的 K 上的周期为 $\frac{1}{2} \pi/n$ 的奇函数. 由 3.5(9), 知 $f_n \in A_\omega$. 在 K 上 f_n 恰有 $2n$ 个极大和极小值的点, 在这些点上取符号交错的值 $\pm \frac{1}{2} \omega(\pi/n)$. 由 Chebyshev 定理, 常数零是 f_n 的 $n-1$ 阶最佳逼近三角多项式. 因此,

$$E_{n-1}^*(A_\omega) \geq E_{n-1}^*(f_n) \geq \frac{1}{2} \omega\left(\frac{\pi}{n}\right). \text{ 证毕. } \blacksquare$$

6. 任意连续模; 借助算子逼近

对于非凹连续模 ω , 定理 9 未必成立. 事实上有

引理 3 对于每个 $n=1, 2, \dots$ 和每个 $\varepsilon > 0$, 存在函数 $g \in O^*$, 适合

$$E_{n-1}^*(g) \geq \left(\frac{2n-1}{2n} - \varepsilon\right) \omega\left(g, \frac{\pi}{n}\right). \quad (1)$$

证明 点 $x_k = \frac{k\pi}{n}$ ($k=0, 1, \dots, n$) 在 $[0, \pi]$ 中相隔 π/n , 而点 $y_k = \frac{k\pi}{n} - (n-k)\delta$ ($k=1, \dots, n$) 相隔 $\left(\frac{\pi}{n}\right) + \delta$. 我们取一个很小的 $\delta > 0$, 那么 $0 < y_1 - \delta < y_1 < \dots < y_n = \pi$. 现在

$$T_{n-1}(x) = \frac{1}{n} D_{n-1}(x) = \frac{1}{n} \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

为偶三角多项式, 并且

$$T_{n-1}(0) = \frac{2n-1}{2n}, \quad T_{n-1}(x_k) = \frac{(-1)^{k+1}}{2n} \quad (k=1, \dots, n). \quad (2)$$

假如取的 δ 充分小, 则有

$$T_{n-1}(y_k) = \left(\frac{1}{2n} + \mu_k\right)(-1)^{k+1}, \quad |\mu_k| < \varepsilon \quad (k=1, \dots, n). \quad (3)$$

现在构造一个定义在 $[0, \pi]$ 上的偶函数 $g \in C^*$ 如下: 置 $g(y_k) = (-1)^{k+1}$ ($k=1, \dots, n$), 在每个区间 $[0, y_1 - \delta]$, $[y_1 + \delta, y_2 - \delta]$, $\dots$, $[y_{n-1} + \delta, y_n - \delta]$ 上 $g(y) = 0$; 而在余下的诸区间上使 $g(y)$ 为线性. 容易推断 $\omega(g, \pi/n) = 1$. 另一方面, 由 (3) 和 g 的定义:

$$g(0) - T_{n-1}(0) = -\frac{2n-1}{2n},$$

$$g(y_k) - T_{n-1}(y_k) = \left(\frac{2n-1}{2n} - \mu_k\right)(-1)^{k+1} \quad (k=1, \dots, n).$$

由于 g 和 T_{n-1} 是偶的, 可以见到, 存在着 K 的 $2n$ 个点, 使得 $g(x) - T_{n-1}(x)$ 在这些点上取符号交错并且绝对值 $\geq (2n-1)/(2n-\varepsilon)$ 的值. 根据第二章定理 10 知: $E_{n-1}^*(g) \geq (2n-1)/(2n-\varepsilon)$, 而这与 (1) 是等价的. 证毕.】

对于任意的 ω , 在此不能找到使关系式

$$E_{n-1}^*(A_\omega) \leq C\omega(\pi/n)$$

成立的最小常数 C . 然而, 却能求得对所有的 ω 同时适用的最优常数 C .

定理 10 (Korneičuk [69]) 对于所有的 $f \in O^*$,

$$E_{n-1}^*(f) \leq \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \quad (n=1, 2, \dots). \quad (4)$$

若 $M < 1$, 则 $E_{n-1}^*(f) \leq M\omega(f, \pi/n)$ 不能对于所有的 $f \in O^*$ 及所有的 $n=1, 2, \dots$ 成立.

证明 证明可由定理 9 以及下述事实 (第三章定理 8) 推出来, 对于每个连续模 ω , 存在一个凹连续模 ω_1 , 满足 $\omega(h) \leq \omega_1(h) \leq 2\omega(h)$. 定理的后一部分可由引理 3 推出.

证毕.]

异于 W_p^* (见定理 6) 的类 Δ_ω 没有最优多项式算子.

定理 11 设 ω 是区间 $[0, \delta]$ 上的非线性凹连续模, 其中对于某个 $n=1, 2, \dots$, $\delta = \pi/n$. 那么, 对于每个 $n-1$ 阶线性多项式算子 L_{n-1} , 有

$$E(\Delta_\omega; L_{n-1}) > E_{n-1}^*(\Delta_\omega). \quad (5)$$

证明 因为 ω 在 $[0, \delta]$ 上是非线性的, 故

$$\frac{\omega(t)}{t} > \frac{\omega(\delta)}{\delta} \quad (0 < t < \delta). \quad (6)$$

(参见第 56 页.) 假设在 (5) 中有等式成立. 以 F 表示 O^* 中所有这样的函数构成的类, 它们在 $[-\frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2}\delta]$ 之外等于 5(6) 的 f_n , 而在该区间上为递增且有不超过 ω 的连续模. 显然 $F \subset \Delta_\omega$, 并且由 Chebyshev 定理, 零是每个函数 $f \in F$ 的 $n-1$ 阶最佳逼近多项式. 另一方面,

$$\|L_{n-1}(f) - f\| \leq E(\Delta_\omega; L_{n-1}) = E_{n-1}^*(\Delta_\omega) = \|f\|,$$

又因最佳逼近多项式是唯一的, 故

$$L_{n-1}(f) = 0, \quad f \in F. \quad (7)$$

特别, 设 g 是 f_n 在 $[-\frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2}\delta]$ 上的线性插值, 又设 h 在诸

点 $-\frac{1}{2}\delta$ 、0 以及 $\frac{1}{2}\delta$ 之间是线性的, 且在這些点上取值

$$h\left(-\frac{1}{2}\delta\right)=f_n\left(-\frac{1}{2}\delta\right)=-\frac{1}{2}\omega(\delta),$$

$$h\left(\frac{1}{2}\delta\right)=f_n\left(\frac{1}{2}\delta\right)=\frac{1}{2}\omega(\delta),$$

$$h(0)=\omega\left(\frac{1}{2}\delta\right)-\frac{1}{2}\omega(\delta)>0$$

(見(6)). 在 $\left[-\frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2}\delta\right]$ 之外, $g(x)=h(x)=f_n(x)$. 那么 $g, h \in F$. 事实上, 只要证明函数 g, h 在 $\left[-\frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2}\delta\right]$ 上的连续模不超过 ω . 根据 ω 的凹性, 可由

$$\omega(h, t) = \frac{2\omega\left(\frac{1}{2}\delta\right)}{\delta} t \leq \omega(t), \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\delta,$$

$$\omega(h, t) = \omega\left(\frac{1}{2}\delta\right) + \frac{\omega(\delta) - \omega\left(\frac{1}{2}\delta\right)}{\frac{1}{2}\delta} \left(t - \frac{1}{2}\delta\right) \leq \omega(t),$$

$$\frac{1}{2}\delta \leq t \leq \delta$$

推出.

根据 (7), $L_{n-1}(f)=0$, 其中 $f=M(h-g)$ ($M>0$) 是一个在 $\left[-\frac{1}{2}\delta, 0\right]$ 和 $\left[0, \frac{1}{2}\delta\right]$ 上为线性并在 $\left[-\frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2}\delta\right]$ 外等于零且满足 $f(0)=M\left[\omega\left(\frac{1}{2}\delta\right)-\frac{1}{2}\omega(\delta)\right]>0$ 的函数. 调整 M , 可以设 $f(0)=\omega\left(\frac{1}{2}\delta\right)$. 那么 $f \in A_\omega$. 这样, 根据定理 9, 则有

$$\|L_{n-1}(f) - f\| = \|f\| = \omega\left(\frac{1}{2}\delta\right) > \frac{1}{2}\omega(\delta) = E_{n-1}^*(A_\omega).$$

这与原假设相矛盾.

证毕.】

7. 解析函数

设 $p=0, 1, \dots$ 是整数, 又设 $\rho>1$. 以 $A_p(\rho)$ 表示所有对于 $|z|<\rho$ 解析, 且满足 $|f^{(p)}(z)|\leq 1$, $|z|<\rho$ 的函数 $f(z)$ 的集. 置

$$\|f\| = \max_{|z|<1} |f(z)|. \quad (1)$$

并且以 $E_n(f)$ 表示在范数 (1) 下 f 借助 n 阶多项式逼近的阶.

定理 12 (Babenko [32]) 对于类 $A_p(\rho)$, 有

$$E_{n-1}(A_p(\rho)) = \frac{\rho^{p-n}}{n(n-1)\cdots(n-p+1)} \quad (n \geq p). \quad (2)$$

使 $E_{n-1}(f) = E_{n-1}(A_p(\rho))$ 的极函数 $f \in A_p(\rho)$ 是 $f(z) = Oz^p$, 其中 O 是某一个适当的常数.

下面所要介绍的是 Babenko 的证明的一个简化方法, 它是由 Scheick 给出的, 与此同时还给出了更进一步的结果(下面定理 13).

每个对于 $|z|<\rho$, $\rho>1$, 解析的函数 $f(z)$ 都有展开式 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, 其中 $c_k = f^{(k)}(0)/k!$; 对于 $k \geq p$, 还有 $c_k = a_k b_k$, 其中

$$a_k = \frac{1}{k(k-1)\cdots(k-p+1)} \quad (k \geq p). \quad (3)$$

系数 b_k 由 $h(z) = z^p f^{(p)}(z) = \sum_{k=p}^{\infty} b_k z^k$

给出, 对于这些 a_k, b_k , 有

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k + \sum_{k=n}^{\infty} a_k b_k z^k \quad (n \geq p, |z| < \rho). \quad (4)$$

为方便起见, 现在来考虑函数 h 的更一般的变换. 设 $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 为当 $|z| < 1$ 时的解析函数, 又当 $0 \leq r < 1$ 时, 对于一切实数 θ , 有

$$G(r, \theta) = \frac{1}{2} a_n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} r^k \cos k\theta \geq 0. \quad (5)$$

若 $M > 0$, 则以 $B_\rho(\rho, M)$ 表示可以表为形如

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k b_k z^k, \quad |z| < \rho \quad (6)$$

的所有函数 $f(z)$ ($|z| < \rho$) 的类, 其中 $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ 是 $|z| < \rho$ 内的任意函数, 它满足 $|h(z)| \leq M, |z| < \rho$. 因为对于每个 $z, |z| < \rho$, 有某个 q ($0 < q < 1$), 使 $b_k z^k = O(q^k)$, 故级数 (6) 收敛. 我们希望求出类 $B_\rho(\rho, M)$ 借助多项式逼近的阶.

定理 13 (Schick [87]) 若函数 g 满足 (5), 则

$$E_{n-1}(B_\rho) = M a_n \rho^{-n} \quad (n=0, 1, \dots), \quad (7)$$

$f(z) = M a_n \rho^{-n} z^n$ 是一个极函数.

引理 4 设对于一切 θ , 有

$$G(\theta) = \frac{1}{2} a_n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} \cos k\theta \geq 0, \quad \sum |a_k| < +\infty.$$

在此定义

$$\Phi(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} \xi_k \theta^{-ik\theta} + \sum_{k=n}^{\infty} a_k \theta^{-ik\theta}, \quad \sum |\xi_k| < +\infty, \quad (8)$$

则对于一切使 $\sum |\xi_k| < +\infty$ 的 ξ_k , 积分 $\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi| d\theta$ 的极小值等于 $2\pi a_n$; 当

$$\xi_k = a_{2n-k} \quad (k \leq n-1) \quad (9)$$

时, 极小值被达到.

证明 一方面

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi| d\theta \geq \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} \Phi(\theta) d\theta \right| = 2 \int_{-\pi}^{\pi} G(\theta) d\theta = 2\pi a_n,$$

另一方面, 对于选择的(9)式, 有

$$\Phi(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} a_{2n-k} e^{-ik\theta} + \sum_{k=n}^{\infty} a_k e^{-ik\theta} = 2e^{-in\theta} G(\theta),$$

于是这时有

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi| d\theta = 2 \int_{-\pi}^{\pi} G d\theta = 2\pi a_n. \quad \text{证毕.}]$$

定理 13 的证明 设 $f \in B_\rho$, $1 < \rho_1 < \rho$, 又设 $|z| = 1$. 有

$$\int_{|t|=\rho_1} h(t) \bar{t}^k \frac{dt}{t} = \rho_1^{2k} \int_{|t|=\rho_1} h(t) t^{-k-1} dt = 0 \quad (10)$$

$$(k = -1, -2, \dots).$$

设 $\xi_k (-\infty < k \leq n-1)$ 是任意使 $\sum |\xi_k| < +\infty$ 的数. 根据(6)和(10), 作代换 $t = z\rho_1 e^{i\theta}$ 后, 有

$$\begin{aligned} f(z) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \xi_k \rho_1^k z^k &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho_1} h(t) \left\{ \sum_{k=-\infty}^{-1} \xi_k \rho_1^{-k} \left(\frac{z}{t} \right)^{-k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \rho_1^k \left(\frac{z}{t} \right)^k + \sum_{k=n}^{\infty} a_k \left(\frac{z}{t} \right)^k \right\} \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(z\rho_1 e^{i\theta}) \left\{ \sum_{k=-\infty}^{n-1} \xi_k e^{-ik\theta} + \sum_{k=n}^{\infty} a_k \rho_1^{-k} e^{-ik\theta} \right\} d\theta. \end{aligned} \quad (11)$$

若 $\Phi(\theta)$ 是最后花括号中的表达式, 则

$$\left| f(z) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \xi_k \rho_1^k z^k \right| \leq \frac{M}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi(\theta)| d\theta.$$

特别, 取

$$\xi_k = a_{2n-k} \rho_1^{(2n-k)} \quad (-\infty < k \leq n-1). \quad (12)$$

则根据引理 4, 对于上述固定的 ρ_1 , 有

$$\left| f(z) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{2n-k} \rho_1^{-2(n-k)} z^k \right| \leq M a_n \rho_1^{-n}, \quad |z|=1. \quad (13)$$

现在令 $\rho_1 \rightarrow \rho$, 可得到

$$|f(z) - P_{n-1}(z)| \leq M a_n \rho^{-n}, \quad |z|=1, \quad (14)$$

其中 $P_{n-1}(z)$ 是多项式 $-\sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{2n-k} \rho^{-2(n-k)} z^k$. 由极大模原理,

不等式(14)对于 $|z| \leq 1$ 也成立. 于是

$$E_{n-1}(f) \leq M a_n \rho^{-n} \quad (f \in B_g).$$

余下只要注意函数 $f(z) = M a_n \rho^{-n} z^n$ (它对应于(6)中的 $h(z) = M \rho^{-n} z^n$) 属于 B_g , 并且它的 $n-1$ 阶最佳逼近多项式是零(见第41页). 证毕.】

定理 12 的证明 先来给出一个使函数

$$G(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

对于所有的 x 皆取正值的充分条件. 假如诸系数 a_k 是正的、凸的, 也即满足 $\Delta^2 a_k = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} \geq 0$ ($k=0, 1, \dots$), 又若 $\sum a_k < +\infty$, 那么这是正确的. 证明系由两次分部求和组成. 利用核 D_n [1.2(10)] 以及

$$\tilde{D}_n(x) = D_0(x) + \dots + D_n(x) = \frac{1 - \cos nx}{4 \sin^2(x/2)} \geq 0$$

[参见 1.2(11)] 可求得(记 $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx &= \sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_k D_k(x) + a_n D_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 a_k \tilde{D}_k(x) + \Delta a_{n-1} \tilde{D}_{n-1}(x) + a_n D_n(x) \\ &\quad (0 < x < 2\pi). \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 最后两项趋于零, 故对于一切 x , 有

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^2 a_k \tilde{D}_k(x) \geq 0.$$

现在设 a_n 是满足

$$a_n \geq 0, \Delta a_n \geq 0, \Delta^2 a_n \geq 0 \quad (n=0, 1, \dots) \quad (15)$$

的序列. 在这种情况下, 对于 $0 \leq r < 1$ 和一切 x , 有

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \cos kx \geq 0,$$

这是因为

$$\Delta^2 (r^n a_n) = r^n \Delta^2 a_n - 2r^n (1-r) \Delta a_{n+1} + r^n (1-r)^2 a_{n+2} \geq 0.$$

设 $f \in A_p(\rho)$, 由 (3) 推知, 对于某个多项式 P_{n-1} , 有 $f - P_{n-1} \in B_g(\rho, \rho^p)$, 其中 $g(z)$ 是系数如 (3) 的级数 $\sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$. 诸系数 a_n 满足 (15), 于是从 (7) 可得到

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{\rho^{p-n}}{n(n-1) \cdots (n-p+1)} \quad (n \geq p). \quad (16)$$

余下的只要注意函数 $f(z) = \rho^{p-n} z^n / [n \cdots (n-p+1)]$ 属于 $A_p(\rho)$, 并且它的逼近阶 $E_{n-1}(f)$ 等于 (16) 的右边.

证毕.】

8. 附 记

1. 由定理 1 容易推得 [15, 第 38 页] 下述重要的 Jackson 定理:

关于定义在 $[a, b]$ 或 K 上的 Chebyshev 组 $\phi_1, \dots, \phi_n$, 对每个连续函数, 在 L^1 范数下的最佳逼近多项式是唯一的.

2. Korneičuk [67, 70] 得到了当 $p=1, 2, 3$, 而 ω 是凹连续模时 $E_{n-1}^*(A_{p\omega})$ 的表示式. 在这三种情形, $E_{n-1}^*(A_{p\omega}) = \|f_{n,p}\|$, 其中 f_n 为函数 5(6), 而 g_p 表示函数 g 在 K 上具有平均值零的 p 次积分. 不知道对于 $p>3$ 是否也成立.

问 题

1. 求一多项式 P_n 、函数 $f \in C[a, b]$ 以及 Chebyshev 组 $\phi_1, \dots$,

ϕ_n , 使之不具有性质:

$$\int_a^b \phi_k \operatorname{sign}(f - P_n) dx = 0 \quad (k=1, \dots, n)$$

的例子. 但 P_n 是最佳 L^1 逼近多项式.

2. 试证在 4(6) 中等号确实能成立.

3. 设 ω 是凹连续模, 又设 f 是 $A=[a, b]$ 或 $A=K$ 上属于 Δ_ω 的函数. 次设 $(\alpha, \beta) \subset A$, 又 f_1 是在 (α, β) 之外等于 f 而在 (α, β) 上为线性的连续函数, 那么 $f_1 \in \Delta_\omega$.

4. 若 L_n 是对于一切 T_n 保持不变的 n 阶线性三角算子, 那么对于凹的非线性 ω , 有

$$E(\Delta_\omega, L_{n-1}) \geq \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \omega(t) dt > E_{n-1}^*(\Delta_\omega).$$

5. 若以 $z^p f^{(p)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-p+1)} c_k z^k$

定义函数 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ 的 p 次导数, 则公式 7(2) 对于非整数 $p > 0$ 也成立.

6. 设 T 是由 $T(f, z) = zf'(z)$ 定义的分算子, 它映在圆 $|z| < 1$ 中的解析函数 $f(z)$ 的空间 H 到其自身中. 若 $G(x)$ 对于 $x > n$ 有定义并且满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} |G(k)| = 1$, 那么我们置

$$G(T)(f, z) = \sum_{k=n}^{\infty} G(k) c_k z^k, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in H.$$

假如还有

$$G(x) > 0, \quad G'(x) > 0, \quad 2G'(x)^2 - G(x)G''(x) > 0, \quad x > n,$$

则 $E_{n-1}(S_G, r) = r^n / G(n) (0 < r \leq 1)$, 其中 S_G 是使 $G(T)$ 变换满足 $|G(T)(f, z)| \leq 1, |z| \leq 1$ 的所有函数 $f \in H$ 的类 (Scheick).

第九章

宽度

1. 定义和基本性质

从抽象的观点来看,借助多项式或借助三角多项式逼近只是一种很特殊的方法.自然还要研究借助其它函数系的逼近.对于给定的函数类 A ,还可考虑寻找“最优”逼近系.不过应该指出,若 A 是单个函数,则最后的问题一般不提,这是因为当 f 自身含于该系中时,函数 f 的逼近阶便是零.

下列诸定义比较能确切地反映出我们的想法:设 X 是 Banach 空间,而 A 和 A' 是 X 的两个子集. A 与 A' 的偏差 [见 8.1(2)] 为数

$$E_{A'}(A) = \sup_{f \in A} \{ \inf_{g \in A'} \|f - g\| \}. \quad (1)$$

特别,设 $A' = X_n$ 是 X 中由元素 $\phi_1, \dots, \phi_n$ 张成的 n -维子空间. $E_{X_n}(A)$ 是类 A 借助线性组合 $a_1\phi_1 + \dots + a_n\phi_n$ 逼近的阶. Kolmogorov [60] 研究了对于 X 的所有 n -维子空间 X_n 的下确界:

$$d_n(A) = \inf_{X_n} E_{X_n}(A) \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (2)$$

根据(2),若 X 是 n 维的,则对于每个 A ,有 $d_n(A) = 0$. 若 n 超过了 X 的维数,我们就规定 $d_n(A) = 0$. 数 $d_n(A) = d_n^X(A)$ 称为 A 在 X 中的第 n 宽度. 当 X 中的原点在某种意义下为 A 的中心时,定义(2)是合理的;否则,在定义(2)中,

子空间 X_n 应以 n -维子空间的一切可能的平移来代换. 例如, $d_0(A)$ 是中心在原点且包含 A 的最小闭球的半径. 若考虑子空间 X_0 的所有平移, 则 $d_0(A)$ 便变成包含 A 的任意中心的最小闭球的半径.

显然, 若 $A \subset A'$, 则有 $d_n(A) \leq d_n(A')$. 又,

$$d_0(A) \geq d_1(A) \geq d_2(A) \geq \dots \quad (3)$$

若 A 是紧致的, 则 $d_n(A) \rightarrow 0$. 事实上, 对于每个 $\varepsilon > 0$, A 有有限的 ε -网. 若该网由 n 个元素组成, 则由它们张成的子空间 Y 的维数 $k \leq n$, 从而 $d_n(A) \leq E_Y(A) \leq \varepsilon$. 若 U 是 X 中以原点为中心的闭单位球, 而 X 的维数大于 n , 则

$$d_n(U) = 1. \quad (4)$$

这可证明如下: 设 X_n 是 X 的某个 n -维子空间, 又设 y 是 X 中不属于 X_n 的一点. 则存在着 (第二章定理 1) 一个点 $x \in X_n$, 使得

$$\|y - x\| = \rho(y, X_n) = a > 0.$$

置 $z = (y - x)/a$. 显然, $\|z\| = 1$, 并且 $\rho(z, X_n) = 1$. 因此, 对于每个子空间 X_n , 有 $E_{X_n}(U) = 1$.

假如 (2) 中的下确界为某个 X_n 所达到, 则称该子空间为极子空间. Kolmogorov 强调 $d_n(A)$ 的精确值的计算是十分重要的, 因为这可引导我们去发现极子空间, 并且从而发现新的较好的逼近方法.

本章中将讨论几种确定 $d_n(A)$ 的精确值或近似值的方法. 下面从最简单的问题着手.

2. 连续与可微函数集

为了估计类 $A \subset O[B]$ 的宽度, 可采用这样的方法: $d_n(A)$ 的上界往往可从经典结果导出来. 对于某些具体的空间 X_n ,

例如多项式空间或三角多项式空间, 往往可以知道 A 的逼近阶 $E_{X_n}(A)$. 这就给出了宽度的上界: $d_n(A) \leq E_{X_n}(A)$ ($n=0, 1, \dots$). 下述引理给出了得到下界的一个简单途径.

引理 1 设 B 是紧致 Hausdorff 空间. 假如存在着 B 的 $n+1$ 个点 x_i ($i=0, \dots, n$) 以及数 $\varepsilon \geq 0$ 具有下述性质: 对于每组符号 $\lambda_i = \pm 1$ ($i=0, \dots, n$), 存在函数 $f_0 \in A$, 适合

$$\operatorname{sign} f_0(x_i) = \lambda_i, \quad |f_0(x_i)| \geq \varepsilon \quad (i=0, \dots, n), \quad (1)$$

那么在空间 $C[B]$ 中, 有

$$d_n(A) \geq \varepsilon. \quad (2)$$

证明 设 X_n 是 C 中由 $\phi_1, \dots, \phi_n$ 张成的子空间. 含有 $n+1$ 个未知数的 n 个线性方程的组

$$\sum_{i=0}^n c_i \phi_k(x_i) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

有非平凡解 $c_0, c_1, \dots, c_n$ 适合 $\sum_{i=0}^n |c_i| = 1$. 选取 λ_i 使得 $\lambda_i c_i \geq 0$ ($i=0, \dots, n$); 然后取 $f_0 \in A$ 满足 (1). 那么, 不论 a_k ($k=1, 2, \dots, n$) 是如何选取的, 总有

$$\begin{aligned} \left\| f_0 - \sum_{k=1}^n a_k \phi_k \right\| &\geq \sum_{i=0}^n |c_i| \left| f_0(x_i) - \sum_{k=1}^n a_k \phi_k(x_i) \right| \\ &\geq \left| \sum_{i=0}^n c_i f_0(x_i) - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{i=0}^n c_i \phi_k(x_i) \right| \\ &\geq \varepsilon \sum_{i=0}^n |c_i| = \varepsilon. \end{aligned}$$

证毕. $\square$

特别, 以后将把引理 1 应用于 s -维长方体 B 或 s -维环 (见第三章第 7 节) 上的函数 $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ 的类 $\Delta_{p\omega}^s = \Delta_{p\omega}^s(M_0, \dots, M_{p+1}; B)$. 下述引理是关于一元函数的.

引理 2 设给定一个正整数 p 以及连续模 $\omega(h)$ ($0 \leq h \leq l$), 存在着具有下述性质的常数 $C_p > 0, C'_p > 0$: 对于每个 $0 < \delta \leq l$, 存在具有 p 次连续导数的函数 $q(x) = g_p(x)$ ($-\infty$

$< x < \infty$), 使得在 $(-\delta, \delta)$ 之外等于零; 在 $(-\delta, 0)$ 内递增, 在 $(0, \delta)$ 内递减, 并且满足

$$\|g_p^{(k)}\| \leq C_p \delta^{p-k} \omega(\delta) \quad (k=0, \dots, p); \quad (3)$$

$$\omega(g_p^{(k)}, t) \leq C_p \delta^{p-k} \omega(t) \quad (k=0, \dots, p); \quad (4)$$

$$\|g_p\| = g_p(0) \geq C'_p \delta^p \omega(\delta). \quad (5)$$

证明 在此证明比 (5) 更强的结果, 即

$$g_p\left(-\frac{1}{2}\delta\right) \geq C'_p \delta^p \omega(\delta). \quad (6)$$

函数 g_p 以及常数 C_p, C'_p 可按 p 归纳地确定. 对于 $p=0$, 可取 $g_0(x) = \omega(x+\delta)$, $-\delta \leq x \leq 0$; $g_0(x) = \omega(\delta-x)$, $0 \leq x \leq \delta$; 在其他地方, 取 $g_0(x) = 0$. 则 (3)、(4) 和 (6) 对于 $C_0=1, C'_0 = \frac{1}{2}$ 成立 [对于 (6), 用到 3.5(3)].

假如 $p > 0$, 且 g_{p-1} 已知, 则定义

$$h(x) = \begin{cases} g_{p-1}(2x+\delta), & (-\delta \leq x \leq 0); \\ -g_{p-1}(2x-\delta), & (0 \leq x \leq \delta); \\ 0, & (\text{其它地方}). \end{cases}$$

因为 $g_{p-1}(x)$ 有 $p-1$ 阶连续导数, 它在 $x = \pm\delta$ 处都等于零, 故 h 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有 $p-1$ 阶连续导数. 置

$$g_p(x) = \int_{-\delta}^x h(t) dt. \quad (7)$$

则 g_p 有在 $(-\delta, +\delta)$ 外都为零的 p 阶连续导数. 由 (7) 可导出

$$\begin{aligned} g_p\left(-\frac{1}{2}\delta\right) &\geq \int_{-(3/4)\delta}^{-(1/2)\delta} h(t) dt \geq \frac{1}{4} \delta h\left(-\frac{3}{4}\delta\right) \\ &= \frac{1}{4} \delta g_{p-1}\left(-\frac{1}{2}\delta\right) \geq \frac{1}{4} C'_{p-1} \delta^p \omega(\delta), \end{aligned}$$

于是 (6) 成立, 其中 $C'_p = \frac{1}{4} C'_{p-1}$.

由类似的计算可知: $g_p(0) \leq \delta g_{p-1}(0)$, 于是

$$g_p(0) = \|g_p\| \leq \delta^p \omega(\delta).$$

由微分(7), 可以得到 $g_p^{(k)}(x) = \pm 2^{k-1} g_{p-1}^{(k-1)}(2x \pm \delta)$ 或 0; 于是 $g_p^{(k)}(x)$ 有形式 $\pm c g_{p-k}(2^k(x+b))$ 或 0. 因此, 只要 C_p 足够大, 就有(3).

对于 $k=p$, 可以看到, $g_p^{(p)}(x)$ 除去在有限个区间 I_i 上有形式 $\pm c g_0(2^p(x+b_i))$ 之外, 都为零. 因此, 回顾 g_0 的定义便知: $g_p^{(p)}$ 是函数 3.5(7) 之一, 其中 $\omega(x)$ 被 $\omega(2^p x)$ 代替. 应用 3.5(8) 即得 $\omega(g_p^{(p)}, h) \leq c \omega(2^p h) \leq 2^p c \omega(h)$.

上面已对 $k=p$ 证明了(4). 现在设 $k < p$, 并设对于某个 C_p , (3) 式成立. 现在来证明 $\omega(g_p^{(k)}, t) \leq 3C_p \delta^{p-k} \omega(t)$. 因为在 $(-\delta, \delta)$ 之外 $g_p^{(k)}$ 等于零, 故只要对 $0 \leq t \leq 2\delta$ 作证明就够了. 由 3.5(4), 有

$$\begin{aligned} |g_p^{(k)}(x+t) - g_p^{(k)}(x)| &\leq t \|g_p^{(k+1)}\| \leq C_p t \delta^{p-k-1} \omega(\delta) \\ &\leq C_p \delta^{p-k} \left(1 + \frac{t}{\delta}\right) \omega(t) \leq 3C_p \delta^{p-k} \omega(t). \quad \text{证毕.} \end{aligned}$$

定理 1 类 $\Lambda_{p\omega}^s$ 的宽度是

$$d_n(\Lambda_{p\omega}^s) \approx n^{-s/s} \omega(n^{-1/s}). \quad (8)$$

证明 关于 $d_n(\Lambda)$ 的上界的估计可由第六章的定理 7 和 8 推出来.

设 B 是长方体, 以 l 表示 B 的最短边长—— $l = \min(b_k - a_k)$; 当 $B = K^{(s)}$ 时, $l = 2\pi$. 对于 $n = 1, 2, \dots$, 每条边都包含 $\geq n^{1/s}$ 个长度为 4δ 的不相交的开区间, 其中

$$\delta = \frac{1}{4} l ([n^{1/s}] + 1)^{-1} \geq C n^{-1/s}. \quad (9)$$

其中 $C > 0$ 是个常数. 于是 B 包含 $n = (n^{1/s})^s$ 个不相交的立方体, 它们的各边长为 4δ , 且平行于坐标轴. 设 $z_1, \dots, z_n$ 是

它们的中心, 而 U_i 是以 z_i 为中心、半径为 δ 的球. 又设 $s = \delta^p \omega(\delta)$, 并且

$$G(x) = s^{1-s} \prod_{i=1}^s g_p(x_i) \quad (x = (x_1, \dots, x_s)), \quad (10)$$

其中 g_p 由引理 2 给出; 函数 G 有 $k \leq p$ 阶的连续偏导数:

$$D^k G(x) = s^{1-s} \prod_{i=1}^s g_p^{\alpha_i}(x_i), \quad \sum_1^s k_i = k. \quad (11)$$

对于每个乘积因子, 只要 $M \geq C_p^s l^{p-k} \omega(l)$, 应用引理 2 的 (3), 可以得到

$$\|D^k G\| \leq M \quad (k \leq p). \quad (12)$$

于是找到了与 p, s 和 ω 有关、但与 n 或 δ 无关的 M .

在 (11) 中, 若 $k=p$, 则 $\sum k_i = p$, 从而得到 [由 3.6(5), (3) 以及 (4)]:

$$\begin{aligned} \omega(D^p G, h) &\leq s^{1-s} \sum_{i=1}^s C_p^s \delta^{sp-p} \omega(\delta)^{s-1} \omega(h) \\ &= s C_p^s \omega(h) \leq M \omega(h) \end{aligned} \quad (13)$$

(只要 $M \geq s C_p^s$). 最后由 (5) 可以导出

$$G(0) \geq M' \delta^p \omega(\delta) = M' s. \quad (14)$$

其中 $M' = C_p^s$. 从不等式 (12) 到 (14) 说明了: 对于充分小的 $\alpha > 0$, 及 $m > 0$, 函数 $H(x) = \alpha G(x)$ 有性质:

$$\|D^k H\| \leq M_k \quad (k=0, \dots, p);$$

$$\omega(D^p H, h) \leq \frac{1}{2} \omega(h), \quad (15)$$

$$H(0) \geq m s.$$

现在考察函数

$$f_0(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i H(x - z_i) \quad (\lambda_i = \pm 1). \quad (16)$$

不难见到 [参照 3.6(9)]: $\omega(f_0, h) \leq 2\omega(H, h) \leq M_{p+1}\omega(h)$. 此式及 (15) 的第一个关系式表明, 所有函数 f_0 都属于类 A_{p+1}^* .

由此, 可以应用引理 1, 并且从而得到

$$d_n(A) \geq me \geq \text{const} n^{-p/s} \omega(n^{-1/s}). \quad \text{证毕.} \blacksquare$$

3. 球的宽度

下述定理是经常用到的.

定理 2 (Gohberg 和 Kreĭn [53]). 设 X_{n+1} 是 Banach 空间 X 的 $(n+1)$ -维子空间, 又设 U_{n+1} 是 X_{n+1} 的闭单位球. 则

$$d_n^*(U_{n+1}) = 1. \quad (1)$$

在 $X = X_{n+1}$ 的情况下, 上式可从 1(4) 推出, 其证明是简单的. 一般情形是较深奥的, 它的证明以 Borsuk 的拓扑定理为基础.

设 $\Sigma_n: x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1$ 表示 $(n+1)$ -维欧氏空间 E_{n+1} 的单位球面. 现在考察 Σ_n 上的 n -维向量域, 每个这样的向量域由函数 $P(y)$ 给出, 其中 $y \in \Sigma_n$. 它的值是固定的 n -维线性空间 X_n 中的向量. 可以按照许多不同的方式在 X_n 中引入范数, 使 X_n 成为 Banach 空间. 例如, 可取

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

其中 x_k 是 $x \in X_n$ 关于某一组基的坐标. 但是, 根据熟知的定理 (它可以从第二章引理 1 导出), 所有这些 Banach 空间是彼此同胚的. 故可选取这些范数之一作为 X_n 的范数.

Borsuk 定理 若 $P(y)$ 是在 Σ_n 上连续的 n -维向量域, 当 $P(y)$ 是奇的, 也即对于所有的 $y \in \Sigma_n$, 有 $P(-y) = -P(y)$ 时, 则 $P(y)$ 在 Σ_n 的某点等于零.

我们不能在这里给出这一定理的证明. 读者可参见 Tucke [98] 和 Whittlesey [104, 第 815 页].

定理 2 的证明 在此首先指出: 倘若以 $(n+1)$ -维 Banach

空间 X_{n+1} 的球面 S_n : $\|y\|=1$ 代替 Σ_n , 则 Borsuk 定理仍然成立.

欲证明上述论断, 考察 X_{n+1} 到 E_{n+1} 上的同构映照. 它把 S_n 映成 E_{n+1} 的子集 S'_n , 变换 S_n 上的函数 P 为 S'_n 上的 P' , 它也是奇的并且连续. 易见, 集 S'_n 恰有一个点 $(x_1, \dots, x_{n+1})$ 落在由原点出发的每条射线上. 借助对应

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow \frac{(x_1, \dots, x_{n+1})}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2}}$$

连续地把 S'_n 映到 Σ_n 上. 则 P' 便变成 Σ_n 上奇的、连续的、 n -维向量域 π . 应用 Borsuk 定理于 π , 可以见到, 该定理对于 S_n 上的 P 也成立.

因为 $d_n(U_{n+1}) \leq d_0(U_{n+1}) = 1$, 故为证明命题(1), 只需证明: 对于 X 的每个 n -维子空间 X_n , 存在着元素 y , 使得

$$y \in X_{n+1}, \|y\|=1, \rho(y, X_n)=1. \quad (2)$$

证明(2)时, 假设 X 是有限维的, 这并不失一般性, 因为可用包含 X_n 和 X_{n+1} 的最小子空间 (其维数至多为 $2n+1$) 去代替 X . 现在考察两种情形:

(a) 空间 X 的范数是严格凸的, 也即 X 中的球面 $\|x\|=1$ 不包含线段. 这也可用下述方式来描述:

$$\left. \begin{aligned} x \neq y, \|x\| = \|y\| = 1, \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1 \\ \text{蕴含 } \|\alpha x + \beta y\| < 1. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

在这种情形下, 我们知道(第二章第1节): 对于每个 $y \in X$ 存在唯一的最佳逼近于它的 $x \in X_n$, 使得

$$\|y - x\| = \rho(y, X_n).$$

在此用 $P(y)$ 表示这个 x .

可以证明, 函数 $P(y)$ 是连续的. 事实上, 设 $P(y) = x$ 并且 $y_n \rightarrow y$. 但是 $P(y_n) \nrightarrow x$. 由于 X_n 是局部紧致的, 故可假

设(必要的话, 用子序列代替 y_n) $P(y_n) \rightarrow x' \neq x$. 但这样 $\|y_n - x\| \rightarrow \|y - x\|$ 和 $\|y_n - P(y_n)\| \rightarrow \|y - x'\| > \|y - x\|$ 就蕴含着对于充分大的 n 有 $\|y_n - x\| < \|y_n - P(y_n)\|$ 成立. 这与 P 的定义相矛盾.

其次, $P(y)$ 是奇的. 设 $P(y_0) = x_0$; 那么

$$\begin{aligned} \|(-y_0) - (-x_0)\| &= \|y_0 - x_0\| = \inf_{x \in X_n} \|y_0 - x\| \\ &= \inf_{x \in X_n} \|(-y_0) - x\| = \rho(-y_0, X_n), \end{aligned}$$

从而 $P(-y_0) = -x_0$.

现在应用 Borsuk 定理于 X_{n+1} 中的球面 $S_n: \|y\| = 1$. 存在着 $y \in S_n$, 使得 $P(y) = 0$, 从而得到 (2):

$$\rho(y, X_n) = \rho(y, P(y)) = \rho(y, 0) = \|y\| = 1.$$

(b) 若 X 的范数不是严格凸的, 则对它稍作变更. 严格凸性条件 (3) 等价于下述性质:

$$\left. \begin{aligned} &\text{若向量 } x', y' \in X \text{ 都异于零, 并且一} \\ &\text{个不是另一个的正数倍, 则} \\ &\|x' + y'\| < \|x'\| + \|y'\|. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

显然, (4) 蕴含 (3). 这是因为在 (3) 的假设下, αx 和 βy 都不是互为正数倍 ($\alpha x = c\beta y$, $c \geq 0$ 蕴含 $\alpha = c\beta$ 和 $x = y$). 反过来, 又 (3) 蕴含 (4). 这可以由在 (4) 中取

$$x = \frac{x'}{\|x'\|}, \quad y = \frac{y'}{\|y'\|}$$

和

$$\alpha = \frac{\|x'\|}{\|x'\| + \|y'\|}, \quad \beta = \frac{\|y'\|}{\|x'\| + \|y'\|}$$

见到.

下面, 用严格凸的范数来逼近 X 的范数. 设 $\varepsilon > 0$ 是给定的. 因为 X 是有限维的, 故在 X 中存在着严格凸的范数 $\|x\|_1$, 例如, 关于任意基的欧氏范数. 因为 $\|x\|_1$ 关于 $\|x\|$ 是连

续的, 故根据第 173 页上所述的定理, 它在紧致集 $\|x\| \leq 1$ 上是有界的, 比如说 $\|x\|_1 \leq M$. 必要的话, 用常数因子去改变 $\|x\|_1$, 我们总可使得 $\|x\|_1 \leq \varepsilon \|x\|$, $x \in X$. 然后, 取

$$\|x\|_0 = \|x\| + \|x\|_1. \quad (5)$$

范数 $\|x\|_0$ 满足 (4), 从而是严格凸的. 又

$$\|x\| \leq \|x\|_0 \leq (1 + \varepsilon) \|x\|, \quad x \in X.$$

将 (a) 应用于赋有范数 $\|x\|_0$ 的 X , 可以看到, 存在元素 $y_n \in X_{n+1}$ 适合 $(1 + \varepsilon)^{-1} \|y_n\| \leq 1$, $(1 + \varepsilon)^{-1} \leq \rho(y_n, X_n) \leq 1$. 使 $\varepsilon \rightarrow 0$ 并且利用 X 的局部紧致性, 即可得到满足 (2) 的元素 y . 证毕.】

4. 定理 2 的应用

设 X 是 Banach 空间, 又设 $\Phi: \phi_1, \dots, \phi_n, \dots$, 是 X 中线性无关的元素序列. 假定 Δ 是一个序列 $\delta_0 \geq \dots \geq \delta_n \geq \dots$, 满足 $\delta_n > 0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\delta_n \rightarrow 0$. 这里允许某些 δ_n 是 $+\infty$. 以 X_n 表示由 $\phi_1, \dots, \phi_n$ 张成的 n -维子空间.

我们定义 $A = A(\Phi, \Delta)$ 为适合

$$E_{X_n}(x) \leq \delta_n \quad (n=0, 1, \dots) \quad (1)$$

的所有元素 $x \in X$ 组成的集. 这里, $E_{X_n}(x) = \rho(x, X_n)$ 是 x 借助 $\phi_1, \dots, \phi_n$ 的线性组合逼近的阶; 特别, $E_{X_0}(x) = \|x\|$. 这种类型的集 A 称为全逼近集.

定理 3 对于全逼近集 $A(\Phi, \Delta)$, 有

$$d_n(A) = \delta_n \quad (n=0, 1, \dots). \quad (2)$$

对于每个 n , 子空间 X_n 是极子空间.

证明 根据 (1), 有 $d_n(A) \leq E_{X_n}(A) \leq \delta_n$. 另一方面, 设 U 是 X_{n+1} 中的球 $\|x\| \leq \delta_n$. 那么, 对于 $x \in U$, 有 $E_{X_k}(x) \leq \delta_k \leq \delta_n$ ($k=0, \dots, n$); 并且 $E_{X_k}(x) = 0$ ($k=n+1, \dots$). 于是

$U \subset A$, 并且根据定理 2, 有

$$d_n^X(A) \geq d_n^X(U) = \delta_n.$$

这证明了(2). 此外, 还有

$$E_{X_n}(A) = d_n(A) \quad (n=0, 1, \dots). \quad \text{证毕.} \blacksquare$$

这个证明基于这样的事实: 对于每个 $x \in A$, (1) 都成立; 并且 X_{n+1} 的球 $\|x\| \leq \delta_n$ 含在 A 中. 此外, 还存在着另一些满足这些条件的重要的集.

空间 l^2 是由具有实坐标 a_k ($k=1, 2, \dots$) 的一切点 $x = \{a_k\}$ 组成的, 它们满足

$$\|x\| = \sqrt{\sum_1^\infty a_k^2} < +\infty.$$

在 l^2 中椭圆 $D = D(\Delta)$ 由不等式

$$\sum_{k=1}^\infty \delta_k^{-2} a_k^2 \leq 1 \quad (3)$$

确定, 其中 Δ 是序列 $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots$, $0 < \delta_k \leq +\infty$ ($k=1, 2, \dots$).

定理 4

$$d_n(D) = \delta_{n+1} \quad (n=0, 1, \dots). \quad (4)$$

证明 设 ϕ_n ($n=1, 2, \dots$) 的第 n 个坐标等于 1, 而所有其它的坐标都等于零. 若 $x \in D$, 则有

$$\rho(x, X_n)^2 \leq \sum_{k=n+1}^\infty a_k^2 \leq \delta_{n+1}^2 \sum_{k=n+1}^\infty \delta_k^{-2} a_k^2 \leq \delta_{n+1}^2;$$

因此 $E_{X_n}(x) \leq \delta_{n+1}$. 若 $x \in X_{n+1}$, 则 $a_{n+2} = \dots = 0$; 又若还有 $\|x\| \leq \delta_{n+1}$, 则

$$\sum_{k=1}^\infty \delta_k^{-2} a_k^2 \leq \delta_{n+1}^{-2} \sum_{k=1}^\infty a_k^2 \leq 1,$$

从而 $x \in D$.

证毕. $\blacksquare$

回过头来, 我们考察函数类 $\mathfrak{M}$, 特别是周期函数类. 在这

里, 定理 2 还常可用米精确地决定宽度. $\mathfrak{M}$ 的极函数 F 也就是使逼近阶达到极大的函数是非常有用的.

设 $F(x)$ 是 K 上的有界且可测的函数, 但未必是连续的, 在下述意义下类似于 $\sin nx$: 它是 $(2\pi/n)$ -周期的、奇的、关于 $x = \frac{1}{2}\pi/n$ 对称的, 在 $(0, \frac{1}{2}\pi/n)$ 上是正的且递增. 显然, 在区间

$$I_i = \left(\frac{(i-1)\pi}{n}, \frac{i\pi}{n} \right) \quad (i=1, \dots, 2n)$$

上 $F(x)$ 的符号为 $(-1)^{i-1}$; 在 K 上 $|F(x)|$ 可取得 $2n$ 次极大值 $F\left(\frac{1}{2}\pi/n\right)$.

因为 $\int_K F dx = 0$, 故 F 有平均值为零的不定积分 (见第一章第 1 节), 它由

$$F_1(x) = \int_{\pi/(2n)}^x F(t) dt$$

给出. 函数 F_1 有类似于将 F 右移 $\frac{1}{2}\pi/n$ 后的特征: 它是 $(2\pi/n)$ -周期的; 关于 $\frac{1}{2}\pi/n$ 为奇的; 关于 π/n 对称的; 在 $(\frac{1}{2}\pi/n, \pi/n)$ 内它是正的且递增. 具有平均值为零的第 p 次不定积分 $F_p(x)$ 可由同样方法得到. 特别, F_p 在 K 上可以取到 $2n$ 个符号交错的具有相同绝对值的极值.

假设当 $x \in I_i$ 时, $g_i(x) = |F(x)|$, 当 $x \notin I_i$ 时, $g_i(x) = 0$ ($i=1, \dots, 2n$). 形如 $f = \sum_{i=1}^{2n} a_i g_i$ 的函数在 K 上有不定积分 f_1 当且仅当

$$\sum_{i=1}^{2n} a_i = 0. \quad (5)$$

对于给定的整数 $p=0, 1, \dots$, 以 X_{2n} 表示 O^* 中由函数 f 的所有 p 次不定积分 f_p (具有任意平均值) 组成的子空间 (对于 $p=0$, $f_p=f$). 分别考虑情形 $p=0$, $p>1$, 可以见到, X_{2n} 是 $2n$ 维的.

引理 3 假定 p 是正整数. 若类 $\mathfrak{M} \subset O^*$ 包含所有的由满足 $|a_i| \leq 1$ ($i=1, \dots, 2n$) 的值 a_i 产生的 $f_p \in X_{2n}$, 则

$$d_{2n-1}(\mathfrak{M}) \geq \|F_p\|. \quad (6)$$

证明 先来证明:

$f_p \in X_{2n}$, $\|f_p\| \leq \|F_p\|$ 蕴含 $|a_i| \leq 1$ ($i=1, \dots, 2n$). (7)
可假设 $p>0$. 若 (7) 不成立, 则存在函数 $f_p \in X_{2n}$, 使得 $\|f_p\| \leq \|F_p\|$, 且对于某个 k , $|a_k| > 1$. 用某个常数 q ($|q| < 1$) 乘以 f_p 后得到另一个 $f_p \in X_{2n}$, 它是函数 $f = \sum_1^{2n} a_i g_i$ 的 p 次不定积分. 对于 f_p 有 $\|f_p\| < \|F_p\|$, $|a_i| \leq 1$ ($i=1, \dots, 2n$), 并且有某个 k , 使 $a_k=1$.

根据 F_p 和 f_p 的性质, 差 $h(x) = F_p(x) - f_p(x)$ 在 K 上至少变号 $2n$ 次. 但是, $h^{(p)}(x)$ 在 I_k 上等于零, 而在 I_i 上等于 $F(x)(1 \pm a_i)$, 它是保号的. 由此可推知, 函数 $h^{(p-1)}, \dots, h$ 在 K 上至多变号 $2n-1$ 次. 这是矛盾的, 于是得到 (7).

我们见到, $\mathfrak{M}$ 包含空间 X_{2n} 中半径是 $\|F_p\|$ 、中心在原点的球. 于是, 关系式 (6) 可从定理 2 推出. **证毕.】**

特别, 设 $\omega(h)$ ($0 \leq h \leq \pi$) 是凹连续模, 且设 $F(x)$ 是由 8.5(6) 给出的 $(2\pi/n)$ -周期奇函数. 由 3.5(9) 可知, 函数 F 和 $f = \sum a_i g_i$ 属于 Λ_ω , 其中 $|a_i| \leq 1$. 于是

$$d_{2n-1}(\Lambda_{p\omega}) \geq \|F_p\|. \quad (8)$$

对于 $p=0$, 有 $\|F_0\| = \frac{1}{2} \omega(\pi/n)$, 并且由不等式 8.5(3) 可得到:

定理 5 三角函数 $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos(n-1)x, \sin(n-1)x$ 是关于类 $A_\omega[K]$ 的极函数组, 并且

$$d_{2n-1}(A_\omega) = \frac{1}{2} \omega\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad (9)$$

其中 ω 是凹连续模.

若 $F(x)$ 是由 $F(x) = 1 (0 \leq x \leq \pi/n)$ 确定的周期为 $(2\pi/n)$ 的奇函数, 则 $F_p \in W_p^*$, 并且所有函数 $f = \sum a_i g_i$, $|a_i| \leq 1$, 也有属于 W_p^* 的 p 次积分 f_p . 由第八章定理 4 和 5, 可以得到:

定理 6 (Tihomirov [93]) 函数 $1, \dots, \sin(n-1)x, \cos(n-1)x$ 是关于 W_p^* 的极函数组, 并且

$$d_{2n-1}(W_p^*) = K_p n^{-p} \quad (p=1, 2, \dots), \quad (10)$$

其中常数 K_p 是由 8.3(2) 给出的.

下面两个定理对某些应当考虑的问题, 给出了部分的回答.

设 $A' = A'(\rho)$, $\rho > 1$, 是由 $[-1, +1]$ 上所有这样的函数所组成的 $O[-1, +1]$ 的子集, 它们有在椭圆 E_ρ 内模不超过 1 的解析延拓.

定理 7

$$\rho^{-n} \leq d_n(A') \leq 2(\rho-1)^{-1} \rho^{-n}. \quad (11)$$

证明 设 $X_{n+1} \subset O[-1, +1]$ 由所有 n 次多项式 P_n 组成. 若 $\|P_n\| \leq \rho^{-n}$, 则由第三章定理 7, 在 E_ρ 中有 $|P_n(z)| \leq 1$. 可以见到, 以 ρ^{-n} 为半径、以 X_{n+1} 中的原点为中心的球包含在 A' 中. 这就得到 (11) 的左半个不等式. 右半个不等式可以根据在第五章定理 7 的证明中所建立的关于 $E_n(f)$, $f \in A'$ 的估计式 5.5(6) 导出. 证毕.】

由类似的讨论 (利用第八章定理 12 以及第三章的不等式

3.2(6)和问题2的不等式)可知,对于在第八章第7节中定义
的类 $A_p(\rho)$ ($p=0, 1, \dots, \rho>1$), 有

$$d_n(A_p(\rho)) = \frac{\rho^{p-n}}{n(n-1)\cdots(n-p+1)}, \quad n \geq p. \quad (12)$$

定理8 若 $p=1, 3, \dots$ 是奇的, 则对于 $W_p[-\pi, \pi]$, 有
$$d_{2n-1}(W_p) = K_p n^{-p}(1+O(n^{-1})). \quad (13)$$

证明 这里需要用第八章定理4的部分推广. 考察 K
上具有绝对连续的 $f^{(p-1)}(x)$ 、且有某常数 b , 使得

$$|f^{(p)}(x) + b| \leq 1 \quad (14)$$

几乎处处成立的连续函数 $f(x)$, 对于所有这样的 f , 有
 $E_{n-1}^*(f) \leq K_p n^{-p}$.

回顾第八章定理4和定理5的证明, 可以见到, 若 $p=1, 3, \dots$, 则函数 $H = D_p[8.3(10)]$ 及其最佳 L^1 -逼近多项式 S_{n-1} (见第八章定理2) 都是奇的. 利用关系式8.2(6)和8.3(8)以及函数 $f_{nH}[8.3(6)]$, 类似于8.3(9), 可得

$$\begin{aligned} E_{n-1}^*(f) &\leq \max_x \left| \int_K [H(x-t) - S_{n-1}(x-t)] f^{(p)}(t) dt \right| \\ &= \max_x \left| \int_K [H(t) - S_{n-1}(t)] [f^{(p)}(x-t) + b] dt \right| \\ &\leq \int_K |H(t) - S_{n-1}(t)| dt \leq \left| \int_K H(t) \operatorname{sign} \sin nt dt \right| \\ &= |f_{nH}(0)| \leq E_{n-1}^*(W_p^*). \end{aligned}$$

现在设 g 是类 $W_p[-\pi, \pi]$ 的函数, 它未必是周期的; 有
 $|g^{(p)}(x)| \leq 1$ a.o., 若 $b = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} g^{(p)} dx$, 则差 $g^{(p)} - b$ 有周
期性的 p 阶积分 f , 并且函数 f 满足 (14). 因此, $E_{n-1}^*(f) \leq K_p n^{-p}$. 另一方面, $g - f$ 是 p 次代数多项式. 由此推知: 函
数 g 可以被 $p+2n-1$ 个函数 $1, x, \dots, x^p, \cos x, \sin x, \dots$,

$\cos(n-1)x, \sin(n-1)x$ 的线性组合逼近到误差不超过 $K_p n^{-p}$. 因此, $d_{p+2n-1}(W_p) \leq K_p n^{-p}$, 并且

$$d_{2n-1}(W_p) \leq K_p n^{-p} (1 + O(n^{-1})).$$

但 W_p^* 可看作 W_p 的子集, 故

$$d_{2n-1}(W_p) \geq d_{2n-1}(W_p^*) = K_p n^{-p}. \quad \text{证毕.}]$$

5. 微分算子

在本节中基本上不加证明地介绍一下在下节中要用到的若干有关线性微分算子的基本知识(读者可以在 [27] 中找到证明). 设 $L^2 = L^2[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上的平方可积的实函数 f 依范数

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

组成的空间. 设 $L^{2,*}$ 表示 L^2 的子空间, 它由一切具有绝对连续导数 $f^{(n-1)}$ 并且 $f^{(n)} \in L^2$ 的函数 f 所组成.

考察 $n \geq 1$ 阶的线性微分表达式

$$l(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y, \quad (1)$$

这里 $p_k(x)$ ($k=0, \dots, n$) 是定义在 $[a, b]$ 上的连续实函数, 并且 $p_0(x)$ 不等于零. 假如有

$$\int_a^b l(y)z dx = V(y, z) + \int_a^b y l^*(z) dx, \quad y, z \in L^{2,*}, \quad (2)$$

则称微分式 $l^*(z)$ 伴随 (adjoint) 于 $l(y)$, 其中 $V(y, z)$ 是 y 和 z 的 $k=0, \dots, n-1$ 阶导数在 a 和 b 处值的双线性型. 更确切地说: $V(y, z)$ 应有 $V(b) - V(a)$ 的形式, 其中

$$V(x) = \sum_{k+l < n} \alpha_{kl} y^{(k)}(x) z^{(l)}(x),$$

而 α_{kl} 是常数. 若伴随式存在, 则它是唯一的. 若 $p_k(x)$ 有 $n-k$ ($k=0, \dots, n$) 阶连续导数, 则 l^* 存在并且可由分部积分

法求出. 由

$$\begin{aligned} \int_a^b p_{n-k} z y^{(k)} dx &= [p_{n-k} z y^{(k-1)} - (p_{n-k} z)' y^{(k-2)} \\ &\quad + \cdots + (-1)^{k-1} (p_{n-k} z)^{(k-1)} y]_{a=b} \\ &\quad + (-1)^k \int_a^b y (p_{n-k} z)^{(k)} dx, \end{aligned}$$

对于 $k=0, \dots, n$ 求和后可得到(2), (2)中 V 有所求的形式, 且

$$l^*(z) = (-1)^n (p_0 z)^{(n)} + (-1)^{n-1} (p_1 z)^{(n-1)} + \cdots + p_n z. \quad (3)$$

公式(2)的特殊情形是

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b l(y) z dx &= \int_a^b y l^*(z) dx, \quad \text{其中 } y, z \in L^{2,n}, \\ \text{且对于 } x=a, b, \text{ 有} \\ z(x) &= z'(x) = \cdots = z^{(n-1)}(x) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

假如 $l^*(y)$ 与 $l(y)$ 恒等, 则称微分式 $l(y)$ 为自伴随的.

由现在起, 假设(1)中的函数 p_k 有 n 阶连续导数. 在这种情况下, 可以作出 $2n$ 阶微分式:

$$L(y) = l^*(l(y)). \quad (5)$$

现在证明, L 是自伴随的. 由两次利用(2)可知: 若 $y, z \in L^{2,2n}$, 则

$$\begin{aligned} \int_a^b L(y) z dx &= V_1(y, z) + \int_a^b l(y) l(z) dx \\ &= V_1 + V_2(y, z) + \int_a^b y L(z) dx. \end{aligned} \quad (6)$$

这里, V_1 是 z 和 $l(y)$ 在 a 和 b 处的 $0, \dots, n-1$ 阶导数的双线性型; 而 V_2 是 z 和 y 更换后相类似的型. 因此, $V_1 + V_2$ 是 y 和 z 在 a 和 b 处的 $0, \dots, 2n-1$ 阶导数的双线性型.

若 $y_0 \in L^n$ 给定, 则 $l(y) = y_0$ 是 n 阶微分方程. 对于每个

$y_0 \in L^2$, 它有解 $y \in L^{2,n}$. 若 $y_0 = 0$, 则每个解 y 属于 $L^{2,2n}$. 这可由对于 $y^{(n)}$ 解方程 $l(y) = 0$ 并且微分其结果 $n-1$ 次而得到.

我们来考察(1)式和边界值条件:

$$B_k(y) = \alpha_{k0}y^{(n-1)}(a) + \dots + \alpha_{k,n-1}y(a) + \beta_{k0}y^{(n-1)}(b) + \dots + \beta_{k,n-1}y(b) = 0 \quad (k=0, \dots, n-1). \quad (7)$$

$l(y)$ 与条件 (7) 定义了一个微分算子 $A(y)$, 它有值 $l(y)$ 并且对于所有满足 (7) 的 $y \in L^{2,n}$ 是有定义的.

A 的定义域 $\mathfrak{D}(A)$ 由所有这样的函数 y 所组成. 假如微分式 $l(y)$ 是自伴随的, 并且当

$$\int_a^b A(y)z \, dx = \int_a^b yA(z) \, dx \quad (y, z \in \mathfrak{D}(A)) \quad (8)$$

时, 则称微分算子 A 是自伴随的.

引理 4 与微分式 (5) 以及边界值条件: 对于 $x=a, b$, 有

$$l(y) = [l(y)]' = \dots = [l(y)]^{(n-1)} = 0, \quad (9)$$

相对应的微分算子 A 是自伴随的.

这可由公式 (6) 的证明推知. 若函数 y 和 z 都满足 (9), 则 $V_1 = V_2 = 0$. 证毕.】

假如 $f \neq 0$, 并且对于某复数 λ 有 $Af = \lambda f$, 则称函数 $f \in \mathfrak{D}(A)$ 是算子 A 的本征函数; 这个 λ 称为 A 的 (对应于 f 的) 本征值. 同属于一个本征值 λ 的线性无关函数 f 的个数称为 λ 的重数. 我们需要关于自伴随微分算子 A 的本征值的深刻而重要的定理 (参见 [27]). 算子 A 有可数多个本征值 λ_n , 并且 $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$; 所有的本征值都是实的并且有有限的重数. A 的本征函数可构成 $L^2[a, b]$ 中的完备标准正交系.

本征值能够直接精确地求得的情形是很少的. 通常对 λ ,

有渐近公式. 在这方面 Birkhoff [36] 有许多很好的定理 (这些定理在 [27] 中也有转载). 下述特殊情形是我们所需要的.

设 $L(y)$ 是一个 $2n$ 阶的微分式, 其边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{k0} y^{(n+k)}(a) + \alpha_{k1} y^{(n+k-1)}(a) + \dots + \alpha_{k, n+k} y(a) &= 0 \\ \beta_{k0} y^{(n+k)}(b) + \beta_{k1} y^{(n+k-1)}(b) + \dots + \beta_{k, n+k} y(b) &= 0 \end{aligned} \right\} \\ (k=0, \dots, n-1). \quad (10)$$

其中 $\alpha_{k0} \neq 0$, $\beta_{k0} \neq 0$ (特别, 条件 (9) 便是这种形式的). 那么算子 A 有无限多个本征值, 但除其中有限个外都是单重的, 并且当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi}{b-a} \right)^{2n} k^{2n} (1 + O(k^{-1})). \quad (11)$$

6. 集 $\mathfrak{R}_1$ 的宽度

现在来讨论一个为 Kolmogorov ([60], 他论述了 $l(y) = y^{(n)}$ 的情形) 所解决的问题. 设 $l(y)$ 是 5(1) 形式的微分式. 若 $\mathfrak{R}_1$ 为使 $\|l(f)\|_2 \leq 1$ 的 $f \in L^{2,n}$ 所成的集, 那么 $\mathfrak{R}_1$ 在 L^2 中的宽度是什么? (拓广的) Kolmogorov 定理如下:

定理 9 若 λ_k 是由表达式 $L(y) = l^*(l(y))$ 与边界值条件 5(9) 所确定的微分算子 A 的本征值, 则 $\lambda_k \geq 0$. 若 λ_k 按数值递增的次序排列, 并且每个都按照其重数而重复, 则

$$d_k(\mathfrak{R}_1) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}}} \quad (k=0, 1, \dots). \quad (1)$$

特别, 对于 $k=0, \dots, n-1$, 有 $d_k(\mathfrak{R}_1) = +\infty$, 并且当 $k \geq n$ 时, 有

$$d_k(\mathfrak{R}_1) = \left(\frac{b-a}{\pi} \right)^n k^{-n} [1 + O(k^{-1})].$$

证明 若 y 是 $l(y) = 0$ 的解, 则 $y \in L^{2,2n}$, 且 y 满足 5(9)

以及 $A(y)=0$. 反之, 若 $L(y)=0$ 且对于 $x=a$, y 满足 5(9), 则由关于微分方程 $l^*(z)=0$ 的唯一性定理可推得 $z=l(y)=0$. 这就证明了 A 对应于 $\lambda=0$ 的本征函数恰好是 $l(y)=0$ 的解, 从而 $\lambda=0$ 的重数为 n .

设 $\lambda_k (\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0; k=1, 2, \dots)$ 是 A 的全部本征值, 又设 $\psi_k \in L^{2,*}$ 为对应的本征函数, 它们构成 L^2 中一个完备的标准正交系. 每个 $f \in L^2$ 有展开式 $f = \sum_1^\infty a_k \psi_k$, $\sum a_k^2 < +\infty$.

设 $\phi_k = l(\psi_k)$. 那么 $\phi_1 = \cdots = \phi_n = 0$. 由 5(4) 可导出

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi_k \phi_l dx &= \int_a^b l(\psi_k) l(\psi_l) dx = \int_a^b \psi_k L(\psi_l) dx \\ &= \lambda_l \int_a^b \psi_k \psi_l dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{若 } k \neq l; \\ \lambda_k, & \text{若 } k = l. \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

这证明了 $\lambda_k \geq 0 (k=1, 2, \dots)$, 由此还可推知: $\phi_k / \sqrt{\lambda_k} (k=n+1, \dots)$ 是 $[a, b]$ 上的标准正交系.

关于 $f \in L^{2,*}$, 由 5(4) 可得

$$\int_a^b l(f) \phi_k dx = \int_a^b f L(\psi_k) dx = \lambda_k \int_a^b f \psi_k dx \quad (k=1, 2, \dots). \quad (3)$$

设 $g \in L^2$ 是给定的, 又设 f 是 $l(f)=g$ 的解. 假设 $\int_a^b g \phi_k dx = 0 (k > n)$, 那么由 (3) 得到 $\int_a^b f \psi_k dx = 0 (k > n)$, 从而 f 是 $\psi_1, \dots, \psi_n$ 的线性组合. 于是 $g = l(f) = 0$. 这表明系 $\phi_k / \sqrt{\lambda_k}$ 是完备的.

现在证明 $f = \sum a_k \psi_k \in L^2$ 属于 $\mathfrak{R}$, 当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k^2 \leq 1. \quad (4)$$

首先, $f \in \mathfrak{R}_1$ 蕴含 $l(f) = \sum_{n+1}^{\infty} b_n \phi_n / \sqrt{\lambda_n}$, 其中 $\sum b_n^2 \leq 1$, 并且由 (3): $b_n = \sqrt{\lambda_n} a_n$. 因此, (4) 必定成立. 另一方面, 若 (4) 成立, 则函数 $g = \sum_{n+1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} a_n (\phi_n / \sqrt{\lambda_n})$ 属于 L^2 , 并且 $\|g\| \leq 1$. 设 $f_0 = \sum_{k=1}^n a'_k \psi_k \in L^{2,*}$ 是 $l(f_0) = g$ 的某个解. 由 (3): $a_k = a'_k$ ($k > n$). 于是 $l(f - f_0) = 0$; 因此, $l(f) = g$, $f \in \mathfrak{R}_1$.

空间 $L^2[a, b]$ 与 Fourier 系数 a_k 的空间 l^2 是等距的, 而 l^2 中的集 $\mathfrak{R}_1$ 与由 4(3) 取 $\delta_n = 1/\sqrt{\lambda_n}$ 给出的椭球 D 是等距的. 于是 (1) 是定理 4 的一个推论. 证毕.】

7. 附 记

1. 定理 8 是由 Tihomirov [93] 得出的. 他论述了关于 $p=1, 2, \dots$ 的情形, 不过, 其证明仅对奇数 p 适用. 在 Tihomirov [95] 中发表了对所有 $p=1, 2, \dots$, $d_n(W_p)$ 的精确公式.

2. 从下述观点来看: 定理 8 是很有意义的. Bernstein [2, 第 II 卷第 413~415 页] 得出了类 $W_p[-\pi, \pi]$ ($p=1, 2, 3, \dots$) 借助代数多项式的逼近阶的渐近展开式: $E_n(W_p) \sim \pi^p K_p n^{-p}$ (这与 Favard 的精确公式 $E_n(W_p^*) = K_p n^{-p}$ 相对应). 另一方面, 定理 8 的 4(13) 给出了 $d_n(W_p) \sim 2^p K_p n^{-p}$. 这表明, 对于 $p=1, 3, \dots$, 代数多项式并不是逼近类 W_p 的最好工具, 因为存在着大约 $(\pi/2)^p$ 倍更好地逼近于它的系.

3. 定理 9 也适用于复值微分式 $l(y)$. 在这种情况下, 函数 ψ_n 与 ϕ_n 是复的, 而 $d_n(\mathfrak{R}_1)$ 表示 $\mathfrak{R}_1$ 在复空间 L^2 中的第 n 宽度.

Mitjagin [81] 利用了一种有趣的新方法求得了多变量周期函数类的宽度.

问 题

1. 若 $\bar{A}$ 是 A 的闭包而 a 是实数, 则 $d_n(\bar{A}) = d_n(A)$, $d_n(aA) = |a|d_n(A)$.

2. 若 A 是 X 中关于原点对称的子集, 也即, 若 $x \in A$ 蕴含 $-x \in A$, 则

$$d_n(A) = \inf_{Y_n} E_{Y_n}(A).$$

这里, Y_n 是 X 的所有 n -维流形, 也即, X 的所有 n -维子空间 X_n 的所有平移.

3. 借助阶梯函数逼近函数 $f \in A_\omega^*$, 证明: $d_n^M(A_\omega^*) \leq \omega(\pi/n)$. (M 是所有 K 上有界可测函数组成的 Banach 空间.)

4. 假如空间 $C[B]$ 被 K 上所有有界函数的空间 M 代替, 则引理 1 仍成立.

5. 利用问题 4 以及问题 3 的方法, 证明: $d_n(A_\omega^*[B]) = \omega(1/n)$, 其中 $B = [0, 1]$.

6. 证明: 若 X 是 Banach 空间 X' 的子空间, 则 $d_n^{X'}(A) \leq d_n^X(A)$.

7. 在问题 6 中, $d_n^{X'}(A) < d_n^X(A)$ 有可能成立. 问题 3 和定理 5 提供了例子. 此外, 还存在着有限维空间 X' 的例子 (Tihomirov).

8. 利用定理 8 的证明方法, 证明:

$$d_{2n-1}(W_p) \leq 2K_p n^{-p} \quad (p=1, 2, \dots).$$

9. 定理 9 (除本征值的单重性外) 对周期情形也保持成立, 这里 $\mathfrak{M}_l^*$ 是 $L^{2,n}[K]$ 的子集, 它由所有在 K 上满足 $\|l(f)\|_2 \leq 1$ 的函数所组成, 而 λ_k 是微分方程 $l^*(l(y)) = \lambda y$ 的本征值 (没有边界值条件).

10. 若在问题 9 中 $l(y) = y^{(n)}$, 则

$$d_0(\mathfrak{M}_l^*) = +\infty, \quad d_{2k-1}(\mathfrak{M}_l^*) = d_{2k}(\mathfrak{M}_l^*) = k^{-n} \quad (k=1, 2, \dots).$$

试直接证明它.

第十章

熵

1. 熵和容量

对于 Banach 空间 X 中给定的子集 A , 在第九章中曾讨论过它的宽度的序列 $d_n(A)$. 对于紧致集 A , 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $d_n(A) \rightarrow 0$ (第九章第 1 节), 而 $d_n(A)$ 趋于零的速度在一定程度上描绘了 A 的“大小”. 若 A 与 X 的某些有限维子集偏离较小, 则宽度 $d_n(A)$ 也是小的. 现在来研究另一个不变量, 即集 A 的熵. 它同样刻划着 A 的“大小”或“粗细”. 但对于 A 的形状的依赖程度较 $d_n(A)$ 为小.

先来回忆几个熟知的定义. 设 A 为度量空间 X 的子集, 又设 $\varepsilon > 0$ 是给定的.

(a) X 的子集族 $U_1, \dots, U_n$ 称为 A 的 ε -覆盖, 倘若每个 U_k 的直径不超过 2ε , 并且诸集 U_k 覆盖 A : $A \subset \bigcup_{k=1}^n U_k$.

(b) X 的有限个点 $x_1, \dots, x_p$ 的集称为 A 的 ε -网, 倘若对于每个点 $x \in A$ 在网中至少存在着一个与 x 相距不超过 ε 的点 x_k : $\rho(x, x_k) \leq \varepsilon$.

(c) A 的点 $y_1, \dots, y_m$ 称为 ε -分离的, 倘若它们中每两点间的距离超过 ε : 对于一切 $i \neq k$, $\rho(y_i, y_k) > \varepsilon$.

这些定义之间有着一定的联系: 若 $x_1, \dots, x_p$ 是 A 的 ε -网, 则根据 (a)、(b), 也存在着由 p 个集组成的 A 的 ε -覆盖.

因为我们可取以 x_k 为中心而 ε 为半径的闭球作为 U_k . 由拓扑学基本定理 [28, 第 123 页] 知: 每个紧致集 A 对于每个 $\varepsilon > 0$ 都含有有限个 ε -网. 因此, 对于每个 $\varepsilon > 0$, 也存在着有限个 ε -覆盖. 此外, 紧致集 A 只能包含有限多个 ε -分离的点. 今后我们假设 A 是紧致的.

当然, 对于给定的 $\varepsilon > 0$, 在覆盖族 (a) 中, 集 U_k 的个数 n 与族有关. 但 n 的最小值 $N_\varepsilon(A) = \min n$ 是集 A 的一个不变量, 它仅与 $\varepsilon > 0$ 有关. 其对数

$$H_\varepsilon(A) = \log N_\varepsilon(A) \quad (1)$$

是集 A 的熵 (entropy) [或称为度量熵 (metric entropy) 以区别于概率熵]. 利用函数 (1) 来刻画集 A “粗细”特征的思想是 Kolmogorov 引出的 ([62]; 也可参见 Kolmogorov 和 Tihomirov [65]). 当然, 我们所关心的是当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时 $H_\varepsilon(A)$ 的渐近性质. 一般地说, $H_\varepsilon(A)$ 急剧地递增趋于无穷. 我们在 (1) 中取对数的部分原因也正是因为 $N_\varepsilon(A)$ 往往很大, 不便处理.

同样, 对于给定的 $\varepsilon > 0$, 在 (b) 和 (c) 中的数 p 与 m 取决于点的取法. 但 $P_\varepsilon(A) = \min p$ 和 $M_\varepsilon(A) = \max m$ 是集 A 的不变量 (我们可以见到, $M_\varepsilon(A)$ 是存在的). 表示式

$$H_\varepsilon^X(A) = \log P_\varepsilon(A) \quad \text{与} \quad O_\varepsilon(A) = \log M_\varepsilon(A) \quad (2)$$

分别称为 A 关于 X 的熵和 A 的容量. 易知, $H_\varepsilon(A)$ 与 $O_\varepsilon(A)$ 仅取决于紧致度量空间 A 本身 (而不依赖于包含 A 的大空间 X). 但 $H_\varepsilon^X(A)$ 可以与 X 有关. 所有这些函数关于 A 单调递增而关于 ε 单调递减.

有关熵的主要一般性结果是简单的.

定理 1 对于每个 $\varepsilon > 0$ 与每个紧致集 A , 有

$$O_{2\varepsilon}(A) \leq H_\varepsilon(A) \leq H_\varepsilon^X(A) \leq O_\varepsilon(A).$$

证明 (b) 的每个 p 也是 (a) 的一个 n , 因此 $N_\varepsilon(A) \leq P_\varepsilon(A)$. 进而, 若 $y_1, \dots, y_m$ 是 A 的某些 2ε -分离点, 而 $U_1, \dots, U_n$ 是 A 的一个 ε -覆盖, 则 $m \leq n$. 因为不然的话, 两个不同的点 y_i 将含于同一个集 U_k 中. 因此, $M_{2\varepsilon}(A) \leq N_\varepsilon(A)$. 由此也可见到: 对于每个 $\delta > 0$, $M_\delta(A)$ 是确定的. 最后, 若 $y_1, \dots, y_m$ 为 A 的 ε -分离的点, 个数为 $m = M_\varepsilon(A)$, 则这些点也构成 A 的 ε -网. 因此 $P_\varepsilon(A) \leq M_\varepsilon(A)$. 取对数后即可导出 (3). 证毕.】

例如, 若 A 是区间 $[a, b]$, 具有通常定义的距离, 则 $N_\varepsilon(A)$ 是 $n \geq l/(2\varepsilon)$ 的最小 n , 其中 $l = b - a$, 而 $M_\varepsilon(A)$ 是使 $m \leq l/\varepsilon$ 的最大 m . 因此

$$N_\varepsilon(A) = \frac{l}{2\varepsilon} + O(1), \quad M_\varepsilon(A) = \frac{l}{\varepsilon} + O(1). \quad (4)$$

这就给出了 $H_\varepsilon(A)$ 与 $C_\varepsilon(A)$. 在此对不能精确地确定 A 的熵的情形应特别注意. 这时可仅仅限于求出它的强的或弱的等价关系来: $H_\varepsilon(A) \sim \phi(\varepsilon)$ 或是 $H_\varepsilon(A) \approx \phi(\varepsilon)$, 其中 $\phi(\varepsilon)$ 是已知函数. 为此目的, 可这样来应用 (3): 求出 $H_\varepsilon(A)$ (或 $H_\varepsilon^X(A)$) 的上界和 $C_{2\varepsilon}(A)$ 的下界; 倘若此两个界值彼此接近的话, 则可得到熵和容量的良好估计.

直径为 2ε 的集 $U \subset X$ 称为 (在 X 中) 有心的 (centerable), 倘若 U 中有中心 x_0 , 也即存在点 $x_0 \in X$, 使对于一切 $x \in U$, 有 $\rho(x, x_0) \leq \varepsilon$ 成立. 若 (a) 中所有的集 U_ε 都是有心的, 则它们的中心组成 A 的 ε -网. 下面主要讨论关于连续函数空间 $X = C[B]$ 中子集的熵的确定, 其中 B 是紧致度量空间. 在这方面, 下述事实值得注意: $C[B]$ 的每个紧致子集 A 是有心的.

事实上, 根据 Arzelà 定理, 存在着随 δ 趋于零的函数

$\omega(\delta) > 0$, 使得对于 $\rho(x, x') \leq \delta$, $f \in A$, 有

$$|f(x) - f(x')| \leq \omega(\delta). \quad (5)$$

又, 函数 $\bar{f}(x) = \sup_{f \in A} f(x)$, $\underline{f}(x) = \inf_{f \in A} f(x)$ 也满足 (5), 从而也属于 $C[B]$. 函数 $f_0(x) = \frac{1}{2} \{\underline{f}(x) + \bar{f}(x)\}$ 是 A 的中心.

在定义 (a) 中, 可设集 U_k 是 A 的闭子集. 因而它们是紧致的. 由此推知: 若 A 是 $X = C[B]$ 的紧致子集, 那么当

$$A \subset X = C[B] \quad \text{时}, \quad H_\varepsilon^X(A) = H_\varepsilon(A). \quad (6)$$

笛卡尔乘积的熵也可估计, 只要知道它的所有因子的熵.

例如: 设 $A = \prod_1^s A_k$ 是 s -维欧氏空间 R_s 的子集, 并且每个 A_k 是第 k 个坐标轴上的紧致子集. 设 $\varepsilon > 0$ 给定, 又设 $\varepsilon_1 = \varepsilon / \sqrt{s}$. 对于每个 k , 设 $U_{ik} (i=1, \dots)$, $N_{\varepsilon_1}(A_k)$ 是 A_k 的极小 ε_1 -覆盖, 那么所有可能的乘积 $\prod_{k=1}^s U_{i_k}$ 的个数为 $\prod_1^s N_{\varepsilon_1}(A_k)$, 其中 $1 \leq i_k \leq N_{\varepsilon_1}(A_k)$. 它们的直径 $\leq 2\varepsilon$, 并且组成 A 的 ε -覆盖. 因此, $N_\varepsilon(A)$ 不超过最后的乘积, 并且

$$H_\varepsilon(A) \leq \sum_{k=1}^s H_{\varepsilon/\sqrt{s}}(A_k). \quad (7)$$

同样可得

$$C_\varepsilon(A) \geq \sum_{k=1}^s C_\varepsilon(A_k). \quad (8)$$

特别, 若每个 A_k 都是一个区间, 则由 (4) 知: $C_\varepsilon(A_k)$ 与 $H_\varepsilon(A_k)$ 两者都等于 $\log \frac{1}{\varepsilon} + O(1)$, 从而对于 R_s 中的 s -维长方体 A 可得到

$$C_\varepsilon(A) \quad \text{和} \quad H_\varepsilon(A) = s \log \frac{1}{\varepsilon} + O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (9)$$

根据集函数的单调性, 更一般地有

定理2 对于 R_s 中每个含有内点的有界子集 A , 关系式(9)成立.

对于满足某些起码的附有正则性假设的集 $A \subset R_s$, 还可证明比(9)更强的结论(见[65]), 即

$$N_s(A) \sim \lambda_s |A| s^{-s}, \quad (10)$$

$$M_s(A) \sim \mu_s |A| s^{-s}.$$

这里 $|A|$ 为 A 的 s -维体积, 而 λ_s, μ_s 是正的常数(它们与 s 有关, 但与 A 无关). 可是, 当 $s \geq 3$ 时, λ_s 与 μ_s 的确切数值还不知道. 确定 λ_s, μ_s 等价于求半径为 1 的球对于空间 R_s 的最经济覆盖的问题以及将球最紧密地置于 R_s 中的问题.

2. 连续与可微函数集

设 B 为欧氏空间 R_s 中的 s -维长方体, ω 是连续模, $p = 0, 1, \dots$ 是整数. 那么

$$\Delta = \Delta_{p,\omega}^s(M_0, \dots, M_{p+1}; B)$$

是 B 上所有这样的连续函数 $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ 的集. 它们在 B 上具有阶 $\leq p$ 的连续偏导数; k 阶偏导数必定满足 $|D^k f(x)| \leq M_k$ ($k = 0, \dots, p$); 另外, 假设 p 阶导数有不超过 $M_{p+1}\omega(h)$ 的连续模(见第三章第7节).

设 $\delta = \delta(\varepsilon)$ 由方程

$$\delta^p \omega(\delta) = \varepsilon \quad (1)$$

确定. [若对于某个 $\varepsilon > 0$, (1) 有若干根 δ , 则可将它们中的任一个看作为 $\delta(\varepsilon)$].

定理3 对于每个 Δ , 存在常数 K, L, β, γ , 使得对于充分小的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\frac{K}{\delta(\beta\varepsilon)^s} \leq C_{2s}(\Delta) \leq H_s(\Delta) \leq \frac{L}{\delta(\gamma\varepsilon)^s}. \quad (2)$$

特别, 若 $\omega(h) = h^\alpha (0 < \alpha \leq 1)$, 则 $\delta(\varepsilon) = \text{const } \varepsilon^{1/(p+\alpha)}$, 并且

$$C_s(A) \approx H_s(A) \approx \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{s/(p+\alpha)}. \quad (3)$$

证明 (a) 我们从上面来估计 $H_s(A)$. 在此仅详细考察 $s=1$ 的情形: B 是长度为 $l=b-a$ 的闭区间 $[a, b]$. 用来处理函数 $f \in A$ 的主要工具是 Taylor 公式

$$\left. \begin{aligned} f^{(k)}(x') &= f^{(k)}(x) + \frac{x'-x}{1!} f^{(k+1)}(x) + \dots \\ &\quad + \frac{(x'-x)^{p-k}}{(p-k)!} f^{(p)}(x) + R_k(f), \\ R_k(f) &= \frac{(x'-x)^{p-k}}{(p-k)!} [f^{(p)}(\xi) - f^{(p)}(x)] \\ &\quad (k=0, \dots, p), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 ξ 在 x 和 x' 之间. 设 $x'-x$ 很小. 假如想用 (4) 式计算值 $f(x'), \dots, f^{(p)}(x')$ 到预定的精确度. 那么应当允许每个值 $f(x), \dots, f^{(p)}(x)$ 有怎样的误差范围呢? 显然, 对于高阶导数, 可以允许有较大的误差范围: 它将被 (4) 中相应项内 $x'-x$ 的高次幂所抵销.

对于给定的 $\varepsilon > 0$, 伴随于 $f^{(k)}$, 定义数

$$\varepsilon_k = \delta^{p-k} \omega(\delta) \quad (k=0, \dots, p). \quad (5)$$

引理 1 设 f_1, f_2 是定义在 $[a, b]$ 上属于类 A 的两个函数. 假如它们在点 x 处的导数满足不等式:

$$|f_1^{(l)}(x) - f_2^{(l)}(x)| \leq \varepsilon_l \quad (l=k, \dots, p),$$

那么对于 $|x'-x| \leq \delta \quad (k=0, \dots, p)$, 有

$$|f_1^{(k)}(x') - f_2^{(k)}(x')| \leq 4\varepsilon_k. \quad (6)$$

欲证明此引理, 将 (4) 应用于函数 $g = f_1 - f_2$:

$$|R_k(g)| \leq \frac{2\delta^q}{q!} \omega(\delta) = \frac{2}{q!} \varepsilon_k \quad (q=p-k),$$

$$\left| \frac{(x'-x)^m}{m!} g^{(k+m)}(x) \right| \leq \frac{\delta^m}{m!} s_{k+m} = \frac{1}{m!} s_k$$

$$(m=0, \dots, q),$$

于是, $|g^{(k)}(x')| \leq \left\{ \sum_{m=0}^q \frac{1}{m!} + \frac{2}{q!} \right\} s_k \leq 4s_k$. 证毕.】

对于给定的 $\varepsilon > 0$ 以及由 (1) 所定义的 $\delta = \delta(\varepsilon)$, 我们构造诸集 U 对于 A 的经济 2ε -覆盖. $N+1$ 个点 $x_0 = a$, $x_1 = a + \delta$, $\dots$, $x_N = a + N\delta$ ($N = [l/\delta]$), 把区间 $[a, b]$ 划分成长度 $\leq \delta$ 的区间. 每个 U 由这样的函数 $f \in A$ 组成, 它们的导数 $f^{(k)}$ 在点 x_i 处的值固定在不超 s_k 的误差范围内. 具体地说, 每个 U 可通过具有整数表值 m_{ki} 的矩阵 (m_{ki}) 来给出, 其中 $k=0, \dots, p$; $i=0, \dots, N$; 函数 $f \in A$ 属于 U , 当且仅当

$$m_{ki}s_k \leq f^{(k)}(x_i) < (m_{ki}+1)s_k$$

$$(k=0, \dots, p; i=0, \dots, N). \quad (7)$$

每个点 $x \in B$ 与诸点 x_i 之一的距离 $< \delta$. 对于 $k=0$, 由引理 1 可推知: 若两个函数 f_1, f_2 属于同一个 U , 则 $|f_1 - f_2| \leq 4\varepsilon$. 于是, 诸集 U 组成 A 的 2ε -覆盖.

余下估计非空的 U (即包含着 A 的点) 的个数. 首先计算所述矩阵中所有可能的第一列 m_{k0} ($k=0, \dots, p$) 的个数. 使 k 固定, 因为所有的值 $f^{(k)}(x_0)$ 都在区间 $[-M_k, M_k]$ 中, 故至多可能存在 $2(M_k/s_k + 1) \leq \text{const } s^{-1}$ 个非空的区间 $[m_{k0}s_k, (m_{k0}+1)s_k]$, 从而至多有这么多的表值 m_{k0} . 总之, 至多有 $\text{const } s^{-p-1}$ 个可能的第一列 $\{m_{k0}\}$. 另一方面, 引理 1 告诉我们: 若 m_{k0} ($k=0, \dots, p$) 给定, 则对于每个 k , 至多有五个可能的 m_{k1} 值. 因此, 对于给定的第一列, 至多有 5^{p+1} 个可能的第二列 $\{m_{k1}\}$. 依次类推, 可以看到, 非空集 U 的总数至多为 $\text{const } s^{-p-1} (5^{p+1})^N$. 于是, 若 $\varepsilon > 0$ 很小, 则

$$\begin{aligned} H_{2\epsilon}(\Delta) &\leq \text{const} \left(\log \frac{1}{\epsilon} + N \right) \\ &= \text{const} \left(\log \frac{1}{\epsilon} + \delta(\epsilon)^{-1} \right) \leq L\delta(\epsilon)^{-1}. \end{aligned}$$

这证明了 $H_s(\Delta) \leq L\delta \left(\frac{1}{2} \epsilon \right)^{-1}$.

在 $s > 1$ 的情形, 证明是类似的, 故不作详细论述了. 我们再次应用 Δ 中函数 $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ 的 Taylor 展开式, 其偏导数满足引理 1, 其中 ϵ_k 相同, 但 (6) 式中的 4 被某常数 γ 所代替. 这时我们可以找到 B 中的 $N \approx \delta^{-s}$ 个点 $x_0, \dots, x_N$, 它们组成 δ -网, 并且具有下述性质: 每个点 $x_i (i > 0)$ 到某点 $x_j (j < i)$ 的距离 $\leq \delta$. 覆盖集 U 的构造方法与上面相同, 使 f 在诸点 x_i 的一切 k 阶偏导数的值具有误差 ϵ_k .

(b) 为了从下面估计 $O_s(\Delta)$, 在此仍按 (1) 定义 $\delta = \delta(\epsilon)$. 对于这个 δ , 由 9.2(16) 给出的函数 $f_0(x)$ 属于类 Δ . 对于其中两个相异的 f_0 与 f'_0 , 至少有一个值 i , 使 $f_0(z_i)$ 和 $f'_0(z_i)$ 异号. 于是, $\|f_0 - f'_0\| \geq 2H(0) \geq 2m\epsilon (m > 0)$. 这样, 我们得到了 2^n 个 Δ 的元素, 它们是 $m\epsilon$ -分离的. 由 $n \sim \delta^{-s}$, 可得

$$O_{m\epsilon}(\Delta) \geq n \log 2 \geq \text{const} \delta(s)^{-s};$$

因此,

$$O_s(\Delta) \geq \text{const} \delta(m^{-1}\epsilon)^{-s}. \quad \text{定理 3 证毕.} \quad \square$$

3. 解析函数类的熵

现在来考察一个或多个复变量的单值解析函数 (定义和性质见 [25]). 设 G 是 s -维复空间中的有界区域, $z = (z_1, \dots, z_s) \in G$ 是 G 中具有复坐标 z_j 的点. 以 $A^s(G)$ 表示所有在 G 上有定义且解析的函数 $f(z)$ 的集. 显然, $A^s(G)$ 是复数上的向量空间. 若 F 是 G 的紧致子集, 则以 $A = A^s(F, G; M)$ 表

示对于 $z \in G$ 满足 $|f(z)| \leq M$ 的一切函数 $f \in A^s(G)$ 组成的度量空间; A 的度量借助 F 上的上确界范数来确定. 由解析函数的基本知识知道: 所有 $f \in A^s(F, G; M)$ 在 F 上有一致有界的导数. 因此, 根据 Arzelà 定理, 集 $A^s(F, G; M)$ 是紧致的.

本节中要沿用下述记号: 以 $r = (r_1, \dots, r_s)$, $k = (k_1, \dots, k_s)$ 表示 R_s 中适合 $r_j > 0$, $k_j = 0, 1, \dots (j=1, \dots, s)$ 的点. 若 $x_j > 0 (j=1, \dots, s)$, 则记为 $x > 0$; 若 $x_j < r_j (j=1, \dots, s)$, 则记为 $x < r$; 并记 $|z| = (|z_1|, \dots, |z_s|)$, $z^k = \prod_1^s z_j^{k_j}$, $z^k = \prod_1^s z_j^{k_j}$ (其中 k 是整数), 而 $(x, y) = \sum_1^s x_j y_j$ 为标积. 于是, $|z - a| < r$ 表示柱体 (polyoylinder) D : $|z_j - a_j| < r_j (j=1, \dots, s)$.

在柱体 D : $|z| < r$ 内解析的函数 $f(z)$ 有绝对收敛的 Taylor 展开式:

$$f(z) = \sum_k a_k z^k = \sum_{k_1, \dots, k_s=0}^{\infty} a_{k_1, \dots, k_s} z_1^{k_1} \dots z_s^{k_s}, \quad z \in D. \quad (1)$$

关于 Taylor 级数 (1), 我们注意下述事实:

$$\sup_{|z| < r} |f(z)| \leq \sum_k |a_k| r^k, \quad (2)$$

又若 f 满足 $|f(z)| \leq M$, $z \in D$, 则

$$|a_k| \leq \frac{M}{r^k}, \quad (3)$$

后一个等式对于所有的 s -列

$$k = (k_1, \dots, k_s) \quad (k_j = 0, 1, \dots, j=1, \dots, s)$$

成立.

若 F 和 G 是两个同心柱体, F : $|z| \leq r$, G : $|z| < r'$, $r_j < r'_j (j=1, \dots, s)$, 则记族 $A^s(F, G; M)$ 为 $A^s(r, r'; M)$. 在这里, 比值 $q_j = r'_j / r_j$ 和数 $h_j = \log q_j (j=1, \dots, s)$ 是本

质的. Kolmogorov [62] 证明, 每个集 $A^s(F, G; M)$ 的熵 $\approx \log^{s+1}(1/\varepsilon)$ (见定理 6). 本节中, 将讨论特殊的集 $A^s(r, r'; M)$, Vituškin [17] 对它建立了更精确的结果.

定理 4 对于一元解析函数族 $A = A^s(r, r'; M)$, 有

$$O_s(A) \text{ 和 } H_s(A) = \frac{1}{\log q} \log^2 \frac{1}{\varepsilon} + O\left(\log \frac{1}{\varepsilon} \log \log \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (4)$$

其中 $q = r'/r$.

更一般地有:

定理 5 对于集 $A = A^s(r, r'; M)$, 有

$$O_s(A) \text{ 和 } H_s(A) = \frac{2}{(s+1)! \prod_{j=1}^s \log q_j} \log^{s+1} \frac{1}{\varepsilon} + O\left(\log^s \frac{1}{\varepsilon} \log \log \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (5)$$

定理 5 的证明 (a) 从上面来估计 $H_s(A)$. 为此, 求集 U 对于 A 的经济 ε -覆盖. 作法大致如下: 对于函数 $f \in A$, 用零代替 (1) 中具有较大 k 的项, 而用某些很小数的整数倍去逼近余下的系数 a_k . 诸集 U 由对 a_k 逼近度相同的函数 f 所组成.

现在需要一条有关重积分的简单引理. 设 $\Delta(a, b)$ ($0 \leq a < b \leq +\infty$) 表示 s -维 (实) 欧氏空间中由 $x_j \geq 0$ ($j=1, \dots, s$), $a \leq x_1 + \dots + x_s \leq b$ 所确定的区域. 多面体 $\Delta(0, b)$ 也记作 $\Delta(b)$.

引理 2

$$\int \dots \int_{\Delta(a)} dx_1 \dots dx_s = \frac{a^s}{s!}, \quad (6)$$

$$\int \dots \int_{\Delta(a, b)} f(x_1 + \dots + x_s) dx_1 \dots dx_s = \int_a^b f(y) \frac{y^{s-1}}{(s-1)!} dy. \quad (7)$$

公式(6)给出了 $\Delta(a)$ 的体积, 它可以通过对 s 作归纳得到. 公式(7)可由(6)通过代换 $y = x_1 + \dots + x_s$, $y_2 = x_2, \dots$, $y_s = x_s$ 得到. 因为点 $(x_1, \dots, x_s)$ 在 $\Delta(a, b)$ 内当且仅当 $a \leq y \leq b$, 并且点 $(y_2, \dots, y_s)$ 在 $(s-1)$ -维多面体 $\Delta(y)$ 中. 设

$$N = \log \frac{1}{\varepsilon} + (s-1) \log \log \frac{1}{\varepsilon} + L, \quad (8)$$

其中 L 为正的常数, 其值以后再确定. 在此用不等式 $(h, k) = h_1 k_1 + \dots + h_s k_s \leq N$ 来定义 k 值的区域 $T = T(N)$, 其中 $h = (h_1, \dots, h_s)$, $h_j = \log q_j$ ($j=1, \dots, s$). 设

$$s_N(f) = s_N(f, z) = \sum_{k \in T} a_k z^k, \quad f \in A. \quad (9)$$

首先证明, 适当选取 L , 可使

$$\|f - s_N(f)\| \leq \frac{1}{2} \varepsilon, \quad f \in A. \quad (10)$$

事实上, 对于 $|z| \leq r$,

$$|f(z) - s_N(f, z)| \leq \sum_{k \notin T} |a_k| r^k.$$

因此, 若在(3)中以 r' 代替 r 而 $q = (q_1, \dots, q_s)$, 则

$$\|f - s_N(f)\| \leq M \sum_{k \notin T} q^{-k} = M \sum_{k \notin T} e^{-(h, k)}. \quad (11)$$

这类和可以利用积分(7)来估计. 每个 $k \notin T$ 对应着立方体 $k_j \leq x_j \leq k_j + 1$ ($j=1, \dots, s$), 在此立方体上, $e^{-(h, k)} \leq B_1 e^{-(h, x)}$, 其中 $B_1 = e^{h_1 + \dots + h_s}$. 于是 $e^{-(h, k)}$ 不超过上述函数在立方体上的积分. 由此可推知: (11)式中的和不超过 $B_1 e^{-(h, x)}$ 在区域 $x_j \geq 0$ ($j=1, \dots, s$)、 $(h, x) \geq N$ 上的积分. 作代换 $y_j = h_j x_j$ ($j=1, \dots, s$), 由(7)可推知: 对于某常数 B_2, B_3 , 有

$$\begin{aligned} \sum_{k \notin T} e^{-(h, k)} &\leq \frac{B_1}{h_1 \dots h_s} \int \dots \int_{\Delta(N, \infty)} e^{-(y_1 + \dots + y_s)} dy_1 \dots dy_s \\ &= B_2 \int_N^\infty e^{-y} y^{s-1} dy \leq B_3 N^{s-1} e^{-N}, \end{aligned} \quad (12)$$

若 N 由 (8) 给出, 则对于所有充分小的 $\varepsilon > 0$, 有

$$N^{\varepsilon-1} \leq \text{const} \log^{\varepsilon-1}(1/\varepsilon).$$

对于充分大的 L , 根据 (11) 和 (12), 有

$$\|f - s_N(f)\| \leq \text{const} e^{-L} \varepsilon \leq \frac{1}{2} \varepsilon, \quad f \in A.$$

此时需要估计 $T(N)$ 的元素 k 的个数 P_N 以及和数 (14). 当 k 跑遍 $T(N)$ 时, 所有立方体 $k_j \leq x_j \leq k_j + 1$ ($j=1, \dots, s$) 的并含于区域 $(h, x) \leq N + \alpha$ ($\alpha = h_1 + \dots + h_s, x \geq 0$) 中, 但包含区域 $(h, x) \leq N, x \geq 0$. 因此,

$$\begin{aligned} \int \dots \int_{\substack{(h, x) \leq N \\ x \geq 0}} dx_1 \dots dx_s &\leq P_N = \sum_{k \in T(N)} 1 \\ &\leq \int \dots \int_{\substack{(h, x) \leq N + \alpha \\ x \geq 0}} dx_1 \dots dx_s. \end{aligned}$$

利用 (6), 得到

$$P_N = \frac{N^s}{s! h_1 \dots h_s} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right). \quad (13)$$

同样地,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in T} \log q^k &= \sum_{k \in T} (h_1 k_1 + \dots + h_s k_s) \\ &= \frac{s N^{s+1}}{(s+1)! h_1 \dots h_s} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right). \end{aligned} \quad (14)$$

为了构造覆盖集 U , 设 $\delta = \varepsilon / (2P_N)$. 每个集 U 由这样的函数 $f \in A$ 组成, 它的 Taylor 系数 a_k ($k \in T(N)$) 固定在不超 δr^{-k} 的误差范围内. 详言之, 每个 U 由两个具有整数值 m_k, m'_k 的集 $\{m_k\}, \{m'_k\}$ ($k \in T$) 给出, 函数 $f \in A$ 属于 U 当且仅当

$$\left. \begin{aligned} m_k &\leq \frac{r^k}{\delta} \operatorname{Re} a_k < m_k + 1 \\ m'_k &\leq \frac{r^k}{\delta} \operatorname{Im} a_k < m'_k + 1 \end{aligned} \right\} \quad k \in T(N). \quad (15)$$

若两函数 f_1, f_2 属于同一个 U , 则由 (2), 有

$$\|s_N(f_1) - s_N(f_2)\| \leq \sum_{k \in T} 2\delta = 2\delta P_N = \varepsilon,$$

从而由 (10) 推得 $\|f_1 - f_2\| \leq 2\varepsilon$. 于是诸集 U 确实构成 A 的 ε -覆盖.

余下还要估计非空集 U 的个数. 对于 $f \in A$, 根据 r 代 r 后的 (3), 有 $|a_k| r^k \leq M q^{-k}$. 因此, 对应于使区间 (15) 为非空的 m_k 和 m'_k 的值的个数 $\leq 2(M q^{-1} \delta^{-1} + 1)$, 从而非空集 U 的总数至多是

$$\prod_{k \in T} 4 \left(\frac{2MP_N}{\varepsilon q^k} + 1 \right)^2. \quad (16)$$

因为 $H_\varepsilon(A)$ 不超过 (16) 的对数, 所以利用 (13)、(14) 和 (8) 可得

$$\begin{aligned} H_\varepsilon(A) &\leq 2 \sum_{k \in T} \left(\log \frac{1}{\varepsilon} - \log q^k + \log P_N + O(1) \right) \\ &= 2P_N \log \frac{1}{\varepsilon} - 2 \sum_{k \in T} \log q^k + O(P_N \log P_N) \\ &= \frac{2}{(s+1)! h_1 \cdots h_s} \log^{s+1} \frac{1}{\varepsilon} \\ &\quad + O\left(\log^s \frac{1}{\varepsilon} \log \log \frac{1}{\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

(b) 任取一个 $\varepsilon > 0$. 我们来求一个 A 中 ε -分离元素的集, 使其元素数较大. 由 (2), 可以见到, 若

$$\sum_k |a_k| r^k \leq M, \quad (18)$$

则函数 $f(z) = \sum a_k z^k$ 属于 A . 关系式 (18) 可由取

$$|a_k| r^{k'} \leq \frac{M}{2^s} \frac{1}{k'^s}, \quad k' = (k_1 + 1, \dots, k_s + 1), \quad (19)$$

而获证, 这是因为

$$\sum \frac{1}{k'^s} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^s \leq 2^s.$$

这时,以

$$N = \log \frac{1}{\varepsilon} - 2s \log \log \frac{1}{\varepsilon} - L \quad (20)$$

来定义 N , 其中 L 是常数, 稍后确定它. 如前, $T(N)$ 是所有使 $(h, k) \leq N$ 的 k 的集.

函数 f 是由它们的 Taylor 系数确定的. 设

$$\begin{aligned} a_k &= 0 & (\text{若 } k \notin T), \\ a_k &= (m_k + im'_k) r^{-k} \sqrt{2} \varepsilon & (\text{若 } k \in T), \end{aligned} \quad (21)$$

其中 m_k 和 m'_k 是任意绝对值不超过 $A_k = M(2^{s+1} \varepsilon k'^2 q^k)^{-1}$ 的整数.

$$\text{于是} \quad |a_k| \leq 2\varepsilon r^{-k} A_k = \frac{M}{2^s k'^2 r^k},$$

故(19)满足, 从而所有这样的函数 f 属于 A . 设 f_1, f_2 是这类函数中任意两个相异者. 那么至少有一个 $f_1 - f_2$ 的系数 a_k 不为零. 假如应用(3)于 $f_1 - f_2$ 并且回顾范数的定义, 可得到

$$\|f_1 - f_2\| \geq |a_k| r^k \geq \sqrt{2} \varepsilon.$$

于是所有函数 f 是 $\sqrt{2} \varepsilon$ -分离的.

余下计算相异函数 f 的个数. 可选取界值 A_k , 使

$$A_k \geq 1, \text{ 其中 } k \in T. \quad (22)$$

事实上, $q^{-k} \geq \varepsilon^{-N} = e^L \varepsilon \log^{2s}(1/\varepsilon)$, 而 $k'^2 \leq \text{const } N^{2s}$, 故只要 L 充分大, 就有 $A_k \geq \text{const } e^L \geq 1$.

对于给定的 $k \in T$, m_k 或 m'_k 的可能值个数至少是 $2[A_k] + 1$; 根据(22), 它 $\geq A_k$. 总之, 我们至少得到 $\prod_{k \in T} A_k^2$ 个相异的函数 f . 因此,

$$C_s(A) \geq 2 \sum_{k \in T} \log A_k = 2 \sum_{k \in T} \left\{ \log \frac{1}{\varepsilon} - \log q^k - \log k'^2 + O(1) \right\}.$$

但 $\log k'^2 = O(\log N) = O(\log P_N)$. 利用与(17)相同的计算, 可以得到

$$O_s(A) \geq \frac{2}{(s+1)! h_1 \cdots h_s} \log^{s+1} \frac{1}{s} + O\left(\log^s \frac{1}{s} \log \log \frac{1}{s}\right). \quad (23)$$

证毕.]

4. 一般解析函数集

类似于定理 4 和定理 5 的结论也对许多其它的函数集 $A^s(F, G; M)$ 成立. 其证明本质上是相同的. 但必须用与区域偶 F, G 的几何相适应的其它展开式来代替 Taylor 展开式 3(1). 例如, 展成 Chebyshev 多项式级数 (倘若 $F = [-1, +1]$ 而 $G = E_p$)、Faber 多项式级数等. 对于 $s=1$, 最一般的结果 (Erohin [46]) 是: 对于每个集 $A = A^1(F, G; M)$ 有

$$O_s(A) \sim H_s(A) \sim \lambda \log^2 \frac{1}{s} \quad (1)$$

成立, 其中 F 是闭连通集, 它既异于一点, 又不是全平面, 而 G 是包含 F 的“适当”区域. 常数 λ 取决于偶 G, F 的某些共形不变量. 下面证明关于任意 s 的一个定理.

定理 6 (Kolmogorov [62]) 若 $A = A^s(F, G; M)$, 又若 F 有内点并且 G 是有界的, 则

$$O_s(A) \approx H_s(A) \approx \log^{s+1} \frac{1}{s}. \quad (2)$$

证明 我们可找到两个同心的柱体 $B: |z_j - a_j| \leq r$ ($j = 1, \dots, s$) 和 $B': |z_j - a_j| < r'$ ($j = 1, \dots, s, 0 < r < r'$), 使得 $B \subset F \subset G \subset B'$. 那么 $A' = A^s(B, B'; M)$ 作为一个点集被包含在 A 中, 并且有较小的距离; 故 $O_s(A) \geq O_s(A')$. 根据定

理 5:

$$O_s(A) \geq a \log^{s+1} \frac{1}{\varepsilon} \quad (a > 0). \quad (3)$$

为方便起见, 要用到:

引理 3 设 F 是紧致 Hausdorff 空间, 它是其紧致子集 F_k ($k=1, \dots, m$) 的并. 设 $C[F]$ 是所有 F 上的复连续函数的空间, 又设 A 是 $C[F]$ 的紧致子集. 若 A_k ($k=1, \dots, m$) 为 A 中所有函数到 F_k ($k=1, \dots, m$) 上的限制的集, 其距离由 F_k 上的一致范数导出, 则

$$H_s(A) \approx \max_k H_s(A_k). \quad (4)$$

证明 每个集 A_k 可以被 $n_k = N_s(A_k)$ 个直径 $\leq 2\varepsilon$ 的集 U_{lk} ($l=1, \dots, n_k$) 所覆盖. 现在用下述方法定义诸集 U : 每个 U 为数 l_k 的取法所确定, $1 \leq l_k \leq n_k$ ($k=1, \dots, m$). 函数 $f \in A$ 属于 U , 当且仅当对于每个 k , 它在 F_k 上的限制属于 $U_{l_k k}$.

诸集 U 构成 A 的 ε -覆盖, 其个数为 $\prod_1^m n_k$. 这就推得 $N_s(A) \leq \prod_1^m N_s(A_k)$. 另一方面有 $N_s(A_k) \leq N_s(A)$.

引理证毕.】

为了完成定理的证明, 在此用半径 $r_k > 0$ ($k=1, \dots, m$) 的球 B_k 覆盖 F , 并且找出半径 $r'_k > r_k$, 且使 $B_k \subset B'_k \subset G$ 的同心柱体 B'_k . 应用引理 3, 以 A_k 表示所有函数 $f \in A$ 在集 $F_k = F \cap B_k$ 上的限制的集. 比较两个集 A_k 与 $A^s(B_k, B'_k; M)$, 第二个包含着第一个 (更确切地说, 第一个集中每个函数有属于第二个集的延拓), 并且在第二个集中距离较大. 根据 (4) 和定理 5, 对于某个 $b > 0$, 有

$$H_s(A) \leq \text{const} \max_k H_s(A^s(B_k, B'_k; M)) \leq b \log^{s+1} \frac{1}{\varepsilon}. \quad (5)$$

于是定理证毕.】

熵的概念可应用到线性拓扑空间的理论中(这里仅需要这一理论的下述基本概念). 在 s -维复空间的域 G 内解析的函数所成的空间 $A^s(G)$ 是这类空间的一个例子. 它的拓扑由下述原点的邻域基 $\mathfrak{U} = \{U\}$ 所产生; 每个 $U = U(F, b)$ 由 G 的一个紧致子集 F 和一个数 $b > 0$ 所确定; U 由对于一切 $z \in F$ 满足 $|f(z)| \leq b$ 的所有 $f \in A^s(G)$ 组成. 这就在 $A^s(G)$ 上确定了一个线性拓扑(紧致集上一致收敛的拓扑).

设 X 是线性拓扑空间, 倘若对于原点的每个邻域 U , 存在着 $a > 0$, 使 $V \subset aU$, 则称 X 的子集 V 在 X 中是有界的. 显然, 可以假设 U 是基 $\mathfrak{U}$ 的元素. 由定义推知, $A^s(G)$ 的子集 V 是有界的, 当且仅当 V 中函数 f 在每个紧致集 $F \subset G$ 上是一致有界的.

下面来定义线性拓扑空间 X 的逼近维. 对于 X 中原点的每个邻域 U , 我们定义(对照第1节的函数 $P_s(A)$)一个依赖于 $V \subset X$ 和 $\varepsilon > 0$ 的数 $P_s(V, U)$. 它是使 εU 的 p 个平移能够覆盖 V 的最小整数 p : $V \subset \bigcup_{k=1}^p (x_k + \varepsilon U)$; 若这种 p 不存在, 则置 $P_s(U, V) = \infty$.

定义^[1] 线性拓扑空间 X 的逼近维是所有对于 $\varepsilon > 0$ 有定义且有下列性质的正值函数 $\phi(\varepsilon)$ 的类 $\Phi(X)$: 对于每个有界集 $V \subset X$ 和每个原点的邻域 U , 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得

$$P_s(V, U) \leq \phi(\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0. \quad (6)$$

必须注意: 当类 $\Phi(X)$ 较小时, 空间 X 较大. 包含在定义中

[1] 此定义有一变形: 有界集 $V \subset X$ 被紧致集 $V \subset X$ 所代替. 对于空间 $A^s(G)$ 来说, 这两个定义是一致的. 因为根据 Montel 的一个定理可知: $A^s(G)$ 的紧致子集与有界闭子集是相同的.

的全部概念在线性拓扑空间 X 的同构映照下(即不仅同胚而且代数同构)保持不变. 于是, 逼近维是同构映照下的不变量.

作为例子, 我们来确定 s -维欧氏空间 R_s 的逼近维. 对于 R_s 的每个有界子集 V 和原点的每个邻域 U , $P_s(V, U) \leq \text{const } \varepsilon^{-s}$ [见 9.1(9)], 并且存在 V 和 U 使 $P_s(V, U) \geq C\varepsilon^{-s}$ 对于任意大的 C 成立. 因此, $\Phi(R_s)$ 由所有适合 $\lim_{s \rightarrow 0} s^s \phi(s) = +\infty$ 的函数 ϕ 组成.

类似地, 可讨论当 $X = A^s(G)$ 时, 函数 $\phi \in \Phi(X)$ 的性质. 若给定有界集 $V \subset X$ 以及邻域 $U = U(F, b) \in \mathfrak{U}$, 则 (6) 意味着存在 $p \leq \phi(\varepsilon)$ 个函数 $f_k \in A^s(G)$ ($k=1, \dots, p$) 使不等式 $|f(z) - f_k(z)| \leq sb$, $z \in F$, 对每个 $f \in V$ 及某个 k 成立. 置 $a = b^{-1}$, 可得到用 V (其上的距离由 F 上的一致范数导出) 的熵描述的结果: 类 $\Phi(A^s(G))$ 恰由这样的函数 ϕ 组成, 对于 V, F 和 $a > 0$ 的每种选取, 存在数 $\varepsilon_0 > 0$, 使得

$$H_s(V) \leq \log \phi(a\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0. \quad (7)$$

作为例子, 我们来推证: 若

$$\frac{\log \phi(\varepsilon)}{\log^{s+1}(1/\varepsilon)} \rightarrow \infty \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \quad (8)$$

则 $\phi \in \Phi(A^s(G))$. 事实上, 若给定一个有界的 $V \subset A^s(G)$ 和 $U = U(F, b)$, 则可找到一个开集 G_1 , 使 $F \subset G_1$, $\bar{G}_1 \subset G$. 诸函数 $f \in V$ 在 $\bar{G}_1$ 上是有界的. 我们以 M 表示此界. 那么 $V \subset A^s(F, G_1; M)$, 并且因此根据定理 6, 对于所有小的 $\varepsilon > 0$, 有

$$H_s(V) \leq \text{const } \log^{s+1} \frac{1}{\varepsilon} < \log \phi(a\varepsilon).$$

另一方面, 若当 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ 时, $\log \phi(\varepsilon) / \log^{s+1}(1/\varepsilon) \leq c$,

其中 $c > 0$ 充分小, 则 $\phi \notin \Phi(A^s(G))$. 为证明它, 可取两个同心的 B, B' , 使 $\bar{B} \subset G \subset B'$, 并且应用定理 6 于 $V = A^s(B, B'; 1)$, 它是 $A^s(G)$ 中的有界集.

作为注释的一个有趣推论, 我们有

定理 7 (Kolmogorov [64]) 当 $s_1 \neq s_2$ 时, 两个空间 $A^{s_1}(G_1)$ 和 $A^{s_2}(G_2)$ 是不同构的.

5. 熵与宽度的关系

两个函数 $H_n(A)$ 和 $d_n(A)$ 都是集 A 大小的度量, 但它们所用的方法是不同的. 因此, 这两个函数之间存在着以不等式表示的关系式, 不过这些不等式是不很严格的.

设 A 是实 Banach 空间 X 的紧致子集, 与序列 $d_n = d_n(A)$ 相关联, 定义下列函数:

$$m(t) = \max_{n=1,2,\dots} \{n: d_{n-1} \geq t^{-1}\}, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$l(t) = \max_{n=1,2,\dots} \left\{ n: \frac{d_{n-1}}{n} > t^{-1} \right\}, \quad t > 0 \quad (2)$$

(若这样的 n 不存在, 则函数为零).

定理 8 (Mitjagin [80]) 若 A 是中心对称 (也即, $x \in A$ 蕴含 $-x \in A$) 的凸紧致集, 则

$$\int_0^{1/2\varepsilon} \frac{l(t)}{t} dt \leq O_{2s}(A) \leq H_s(A) \leq m\left(\frac{2}{s}\right) \log \frac{4(d_0 + s)}{s}. \quad (3)$$

证明 (a) 设 $m = m(2/s)$. 由 (1), $d_m(A) < \frac{1}{2}\varepsilon$. 设 E_m 是 X 中与 A 偏离不超过 $\frac{1}{2}\varepsilon$ 的 m -维子空间. 对于每个 $x \in A$, 存在点 $y \in E_m$, 使 $\rho(x, y) \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. 设 A_m 是具有性质

$\rho(A, y) \leq \frac{1}{2} \varepsilon$ 的所有点 $y \in E_m$ 的集. A_m 的每个 $\frac{1}{2} \varepsilon$ -网也是集 A 的 ε -网. 因此, $P_\varepsilon(A) \leq P_{\varepsilon/2}(A_m)$. 由 10.1(3),

$$H_\varepsilon(A) \leq \log M_{\varepsilon/2}(A_m). \quad (4)$$

存在着 A_m 的 $M = M_{\varepsilon/2}(A)$ 个点 $x_1, \dots, x_M$, 它们是 $\frac{1}{2} \varepsilon$ -分离的. 现在考察空间 E_m 中以 x_k 为中心、 $\frac{1}{4} \varepsilon$ 为半径的互不相交的球 $B_k (k=1, \dots, M)$, 因为对于 $x \in A$ 有 $\|x\| \leq d_0$, 故所有的球 B_k 都包含在球 $B: \|x\| \leq d_0 + \frac{1}{2} \varepsilon$ 中. 对于空间 E_m , 我们来规定 m -维(欧氏)体积. 为此, 在 E_m 中取一组基 $y_1, \dots, y_m$, 并且映照每个点 $y = \sum_{i=1}^m b_i y_i$ 成为 R_m 的点 $(b_1, \dots, b_m)$. 对于 E_m 中的集, 我们规定其体积等于它在 R_m 中象的体积. E_m 中半径为 r 的球的体积为 λr^m , 其中 λ 与 r 无关. 对照球的体积, 可以见到

$$M \left(\frac{\varepsilon}{4} \right)^m \leq (d_0 + \varepsilon)^m.$$

取对数后, 可以得到(3)式右边的不等式.

(b) 首先选取一个点列 $x_k \in A$. 取 $x_1 \in A$ 适合 $a_1 = \|x_1\| = d_0$. 若 $x_1, \dots, x_k$ 已知, 我们考察由这些点所张成的线性空间 E_k . 设 x_{k+1} 是 A 中与 E_k 相距最远的点. 那么

$$a_{k+1} = \rho(x_{k+1}, E_k) \geq d_k.$$

我们置 $y_k = x_k / a_k$. 诸点 y_k 张成同一个空间 E_k , 并且

$$\rho(y_{k+1}, E_k) = 1 \quad (k=0, 1, \dots). \quad (5)$$

因为 A 是凸的并且关于原点对称, 故对于每个 n , 它既包含诸点 $a_k y_k = x_k$, 也包含多面体

$$\Delta_n = \left\{ y: y = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k y_k, \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \leq 1 \right\}.$$

显然, $O_\varepsilon(A) \geq O_\varepsilon(\Delta_n)$.

我们可以找出许多 Δ_n 中 ε -分离的点. 设 $\varepsilon' > \varepsilon$; 考察点

$$y = \sum_{k=1}^n m_k \varepsilon' y_k, \quad (6)$$

其中 m_k 是使对应的 y 属于 Δ_n 的整数. 两个相异的这类点 y' 与 y'' 是 ε -分离的. 事实上, 若 k 是它们在 (6) 的表示下相异系数的最大下标, 则由 (5), 有

$$\|y' - y''\| \geq \rho(\varepsilon' y_k, E_{k-1}) = \varepsilon' > \varepsilon.$$

下面来估计相异的点 y 的个数 N . 为此目的, 我们规定空间 E_n 的 n -维体积由 E_n 到 R_n 上的映照 $\sum_{k=1}^n b_k y_k \rightarrow (b_1, \dots, b_n)$ 决定. 多面体 Δ_n 有体积 $2^n (1/n!) a_1 \cdots a_n$. 以 y 为中心、以 $2\varepsilon'$ 为边长的诸 n -维立方体 $S(y)$ 的体积为 $(2\varepsilon')^n$. 它们覆盖着 Δ_n , 因此,

$$\frac{1}{n!} a_1 \cdots a_n \leq N \varepsilon'^n.$$

由此可得到

$$O_\varepsilon(\Delta_n) \geq \log N \geq \sum_{k=1}^n \log \frac{a_k}{k \varepsilon'}. \quad (7)$$

在此, 我们可用 d_{k-1} 代替 a_k 并用 ε 代替 ε' . 选取 n 使 (7) 式最后的和变成尽可能地大:

$$O_\varepsilon(A) \geq \sum_{d_{k-1}/(k\varepsilon) \geq 1} \log \frac{d_{k-1}}{k\varepsilon}.$$

函数 $l(t)$ 在每点 $t = k/d_{k-1}$ ($k=1, \dots, n$) 处有跃度为 1 的跳跃, 而当 $0 \leq t \leq d_0^{-1}$ 时等于零. 故最后的和等于

$$\begin{aligned} \int_{1/d_0}^{1/\varepsilon} \log \frac{1}{\varepsilon t} dl(t) &= l(t) \log \frac{1}{\varepsilon t} \Big|_{1/d_0}^{1/\varepsilon} \\ &+ \int_{1/d_0}^{1/\varepsilon} \frac{l(t)}{t} dt = \int_0^{1/\varepsilon} \frac{l(t)}{t} dt. \end{aligned} \quad \text{证毕.} \blacksquare$$

6. 附 记

1. 要想改进定理 3、4 和 5 的结果而得到更深一步的结果, 看来是相当困难的. 在为数不多的已知结果中, 我们提一下公式 [65]:

$$H_\varepsilon(A) = \frac{lM}{\varepsilon} + \log \frac{C}{\varepsilon} + O(1). \quad (1)$$

这里, A 是在长为 l 的区间上属于 $\text{Lip}_\alpha 1$ 且其绝对值不超过 C 的函数类. 也可参见 Tihomirov [94].

2. 在 [65] 中计算了许多其它集的熵, 特别是解析函数集的熵. 也可参见 Clements [39].

3. Vituškin [17] 成功地应用熵得到了对于可微与解析函数类非线性逼近阶的下界. 迄今为止, 这还是此类问题中仅知的一般处理. 极其粗略地说: Vituškin 的结果表明, 倘若逼近的多项式 $a_1\phi_1(x) + \dots + a_n\phi_n(x)$ 被以简单的非线性方式依赖于 n 个参量 $a_1, \dots, a_n$ 的函数族 $F(a_1, \dots, a_n; x)$ 所代替, 则大量函数类的逼近阶不能改进.

4. 逼近维与熵是线性拓扑空间分类的重要工具. 特别, 在所有的 F -空间 X 中, 核空间可用关系式

$$\frac{\log \log P_\varepsilon(A, V)}{\log(1/\varepsilon)} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \quad (2)$$

来刻画 (见 Mitjagin [80]), 此式必定对于每个紧致集 $A \subset X$ 以及原点的每个邻域 U 成立.

5. 若诸集 A 的逼近性质已知, 则对哪些 A 能够确定熵 $H_\varepsilon(A)$? 在任一个 Banach 空间中, 对于每个全逼近集 (见第 176 页) $A = A(\Delta) = A(\phi, \Delta)$, 这是可能的. 设 $\delta_n > 0$ 是递减到零的序列. 置

$$N_i = \min \{k: \delta_k \leq e^{-i}\} \quad (i=1, 2, \dots),$$

并且按不等式 $e^{-n+1} \leq \varepsilon < e^{-n+2}$ 来确定 n . 那么 (见 Lorentz [77])

$$N_1 + \cdots + N_{n-3} \leq H_\varepsilon(A) \leq N_1 + \cdots + N_n + 2N_n + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta N_i \log \frac{N_n}{\Delta N_i} + O(1). \quad (3)$$

对于集 $A_{p,\omega}^s$ 与 $A^s(r, r'; M)$ 的特殊情形, 恰好得到本章的估计式 2(2) 和 3(5). 对于第一个集, 关于其逼近性质的必要信息包含在第六章定理 8 中; 对于第二个集, 可以通过借助 Taylor 级数的部分和来逼近 $f \in A^s(r, r'; M)$ 而导出. 在范数不同于一致范数的函数空间中, 类似的结果也成立. 设 $\text{Lip}(\alpha, p)$ ($p > 1, 0 < \alpha \leq 1$) 是 $L^p[a, b]$ 中由所有

$$\left\{ \int_a^b |f(x+t) - f(x)|^p dx \right\}^{1/p} \leq |t|^\alpha$$

的函数 f 所组成的子集. 那么

$$H_\varepsilon(\text{Lip}(\alpha, p)) \approx (1/\varepsilon)^{1/\alpha}.$$

问 题

1. 设 $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$; 那么 $N_\varepsilon(A) \approx \max_k N_\varepsilon(A_k)$.
2. 假如度量空间的每个子集是有心的, 则度量空间本身也是有心的. 试证明欧氏平面不是有心的.
3. 证明每个紧致度量空间 A 可以等距地嵌入到有心的 Banach 空间 m 中, 这里 m 是由所有有界的实数序列 $y = \{y_n\}$ 组成的, 而 $\|y\| = \sup |y_n|$. [提示: 设 x_n 在 A 中是稠密的; 置 $y = \{\rho(x, x_n)\}$.]
4. 证明 $H_\varepsilon(A) = \min H_\varepsilon^X(A)$, 其中极小值是对所有以 A 为其子空间的度量空间 X 选取的.
5. 若 A 是 Banach 空间 X 中的无限维凸集, 则

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left[\frac{C_\varepsilon(A)}{\log(1/\varepsilon)} \right] = \infty.$$

6. 设 X 是无限维 Banach 空间, 而 $\phi(\varepsilon)$ 是对 $\varepsilon > 0$ 有定义的递减正函数. 那么存在着 X 的紧致子集 A , 使得 $M_\varepsilon(A) \geq \phi(\varepsilon)$.

7. 求下列空间 X 的逼近维 $\Phi(X)$: 无限维 Banach 空间及空间 $A^*(D)$, 其中 D 为柱体.

8. 找出 A 和 A_ω 的熵以及容量之间的关系, 这里 A 是紧致度量空间, ω 为连续模, 而 A_ω 是由在给定点 x_0 等于零并且满足 $\omega(f, h) \leq \omega(h)$ 的所有 A 上的实函数组成的.

9. 设 $A'(\rho, C)$ 是 $[-1, +1]$ 上所有这样的复值函数组成的集, 它们在椭圆 E_ρ 上有绝对值不超过 C 的解析开拓; 并且伴有一致范数. 试证明

$$H_\varepsilon(A') \sim \frac{\log^2(1/\varepsilon)}{\log \rho}.$$

10. 对于 $[-1, +1]$ 上的实值函数, 回答上题同样的问题.

第十一章

用单变量函数表示多变量函数

1. Kolmogorov 定理

在本章中, 我们将讨论用单变量函数的迭加以及函数的和来表示多变量连续函数的问题. 即使是低年级的大学生也可能会注意到: 在初等微积分课程中真正的两元函数的例子是罕见的. 当然, $x+y$ 是这样的函数, 但是众所周知, 一切其它函数都可以归结到这一平凡的函数及单变量的函数. 例如, $xy = e^{\log x + \log y}$.

这可以看作是下述 Kolmogorov 定理的一个说明. 设 $I = [0, 1]$, 又设 S 为 s -维立方体, $0 < x_p \leq 1$ ($p=1, \dots, s$).

定理 1 存在着 s 个常数 $0 < \lambda_p \leq 1$ ($p=1, \dots, s$) 以及 $2s+1$ 个定义在 I 上并在其中取值的函数 $\phi_q(x)$ ($q=0, \dots, 2s$), 它们具有下列性质: ϕ_q 为严格递增且属于类 $\text{Lip}\alpha$ ($\alpha > 0$). 对于每个在 S 上连续的函数 f 可以找到连续函数 $g(u)$ ($0 \leq u \leq s$) 使得

$$f(x_1, \dots, x_s) = \sum_{q=0}^{2s} g(\lambda_1 \phi_q(x_1) + \dots + \lambda_s \phi_q(x_s)). \quad (1)$$

对于 $s=2$ 的情形, 可以取 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda$. 这样, 对于每个连续函数 $f(x, y)$ ($0 \leq x, y \leq 1$), 有表示式

$$f(x, y) = \sum_{q=0}^4 g(\phi_q(x) + \lambda \phi_q(y)). \quad (2)$$

公式(1)和(2)把函数 f 化为单变量函数 g , $\lambda_p \phi_q$ 的和与迭加(即函数的函数). 函数 g 依赖于 f , 但与 $(2s+1)s$ 个函数 $\lambda_i \phi_q$ 无关.

这个定理的历史值得一提: 1900年在巴黎国际数学会议上, Hilbert在其著名的演讲中提出了他认为对数学的进一步发展有重要意义的二十三个问题, 引起了许多数学家的注意. 其中的第十三个问题包含着这样的猜测: 并非一切三元连续函数都可表为二元连续函数的迭加. 这一猜测在1957年被Kolmogorov及其学生Arnol'd所否定. 在他们关于该问题的三篇论文的最后一篇中, Kolmogorov [63]证明了定理1. 显然, 定理1否定了Hilbert猜测, 因为在公式(1)中出现的几项和可以在两项和的基础上建立起来. Kolmogorov原先的表示式不是(1)而是

$$f(x_1, \dots, x_s) = \sum_{p=0}^{2s} g_p \left(\sum_{q=1}^s \phi_{pq}(x_p) \right). \quad (3)$$

用单个函数(在定义区间中不一定是递增的)代替函数 g_p 的可能性是在[74]中指出的. Sprecher [89]证明了可以取 $\phi_{pq} = \lambda_p \phi_q$. 这里所引入的证明, 其轮廓是在[74]中给出的. 但依然遵循着Kolmogorov在[63]中原来证明的思想.

为了给出定理1的几何解释, 我们来考察 S 到 $(2s+1)$ 维空间的映照:

$$z_p = \lambda_1 \phi_p(x_1) + \dots + \lambda_s \phi_p(x_s) \quad (p=0, 1, \dots, 2s). \quad (4)$$

此映照是连续的, 也是一对一的. 因为不然的话, 会有 S 的两个点, 使得函数 $\lambda_1 \phi_p(x_1) + \dots + \lambda_s \phi_p(x_s)$ ($p=0, \dots, 2s$)的族在这两点取相同的值. 这样, 用(1)式表示的所有函数在这两点取同样的值, 从而表示式(1)对某些函数 $f \in C[S]$ 将不可能成立.

由于 S 是紧致的, 故它在 (4) 式下的象 T 是紧致的, 从而 (4) 式是 S 和 T 之间的同胚. 由此推知: 所有 S 上的连续函数 $f(x_1, \dots, x_s)$ 与所有 T 上连续函数 $F(z_0, \dots, z_{2s})$ 之间存在着——对应. 于是, 定理 1 可描述如下: 存在着由特殊形式 (4) 所确定的 S 到 $(2s+1)$ 维欧氏空间的同胚嵌入, 使得在 S 的象上的每个连续函数 F 可表成形式

$$F(z_0, \dots, z_{2s}) = \sum_{p=0}^{2s} g(z_p). \quad (5)$$

下面两节阐述定理 1 的证明. 对于该定理中的常数 λ_p , 可以取区域 $0 < \lambda_p < 1$ 中任意有理线性无关的数, 也即任意这样的数 λ_p : 对于有理数 r_p , 关系式 $r_1\lambda_1 + \dots + r_s\lambda_s = 0$ 仅当 $r_1 = \dots = r_s = 0$ 时才可能成立. 对于情形 $s=2$, 可设 $\lambda_1 = 1$, 而 $\lambda_2 = \lambda$ 为无理数^[1].

下面仅对 $s=2$ 的情形证明定理 1. 这样可以简化记号, 但并不会影响我们理解证明的思想.

2. 基本引理

在本节中我们来构造函数 ϕ_a . 定义闭区间

$$I_i^k = [i \cdot 10^{-k+1} + 10^{-k}, i \cdot 10^{-k+1} + 9 \cdot 10^{-k}] \quad (1)$$

$$(i=0, \dots, 10^k-1; k=1, 2, \dots),$$

其中 k 称为该区间的秩. 除 $i=10^k-1$ 外, 所有的区间 I_i^k 都含于 $I=[0, 1]$ 中.

为了阐明我们的思路, 先来回忆一下 [26, 第 213 页] 异于常数但其导数几乎处处等于零的递增函数 $\psi(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) 的构造. 我们改在区间 (1) 上作这样的构造:

[1] 事实上这些条件尚可减弱. 特别, 当 $s=2$ 时, λ 可以任取, 其中 $0 < \lambda < 1$. 但在这里不详述了.

设 $\psi(0)=0$, $\psi(1)=1$. 然后, 在唯一的含于 I 中而秩为 1 的区间 $I_0^1=[10^{-1}, 9\cdot 10^{-1}]$ 上定义 $\psi(x)=\frac{1}{2}$. 接着, 在不含于 I_0^1 中而秩为 2 的区间上定义 $\psi(x)$. 当 $x\in I_0^2$ 时置 $\psi(x)=\frac{1}{4}$, 而当 $x\in I_2^2$ 时置 $\psi(x)=\frac{3}{4}$. 依次类推, 便在所有区间 (1) 的并也即集 $A=\cup I_i^k$ 上定义了 ψ . 容易证明 (见 [26, 第 213 页]) ψ 在 I 上有一个连续且递增的开拓, 它可以由 $\psi(x)=\sup_{0\leq y\leq x}\psi(y)$ 给出. 在构造过程中所用区间 I_i^k 的长度的总和为 $8\cdot 10^{-1}\left[1+\left(\frac{2}{10}\right)+\left(\frac{2}{10}\right)^2+\dots\right]=1$; 又显然, 在每个区间的内部 $\psi'(x)=0$. 因此在 I 上确实有 $\psi'(x)=0$ a. e.

函数 ϕ_q 类似于 ψ . 第 q 个函数 $\phi_q (q=0, \dots, 4)$ 与区间

$$I_{qi}^k=[\alpha_{qi}^k, \beta_{qi}^k]=I_i^k-2q\cdot 10^{-k} \quad (2)$$

$$(k=1, 2, \dots; i=0, 1, \dots, 10^{k-1})$$

相关联. 这些区间由 I_i^k 向左平移距离 $2q\cdot 10^{-k}$ 而得到 (这个距离与秩 k 有关). 对于那些不完全包含在 I 中的区间 I_{qi}^k , 我们用 $I\cap I_{qi}^k$ 来代替.

秩 k 的区间长为 $8\cdot 10^{-k}$, 而它们之间的间隙长为 $2\cdot 10^{-k}$. 若固定 k , 则区间 (2) 形成五个族, 分别对应于 $q=0, \dots, 4$. 这些族都不能覆盖 I . 但每点 $x\in I$ 至少被 $q=0, \dots, 4$ 五族中的四个所覆盖.

还值得指出, 秩 $l < k$ 的端点 $\alpha_{qi}^l, \beta_{qi}^l$ 是形如 $m\cdot 10^{-l+1}$ 的点; 然而没有一个秩数 k 的端点是这样的形式 (0, 1 例外). 于是, 除 0, 1 外没有一个 $\alpha_{qi}^k, \beta_{qi}^k$ 与秩数较低的端点重合.

与 ψ 不同, 函数 ϕ_q 是严格递增的. 它们最重要的性质是把每个给定秩数的区间 I_{qi}^k 映照成小的集合. 但是, 对于我们来说, 重要的还不是测度小, 而是 I_{qi}^k 在 ϕ_q 下的象互不相交;

不仅对于固定的 q ——这可以由 ϕ_q 的单调性推知——而且对于所有的 q 和所有的 i (秩 k 是固定的) 都如此. 实际上, 我们需要的性质比这更多.

下述引理确切地描述出所需的性质. 设 $0 < \lambda < 1$ 为无理数. 应当注意, 当 r 为有理数时, 关系式 $r + r'\lambda = r_1 + r'_1\lambda$ 仅当 $r = r_1, r' = r'_1$ 时成立.

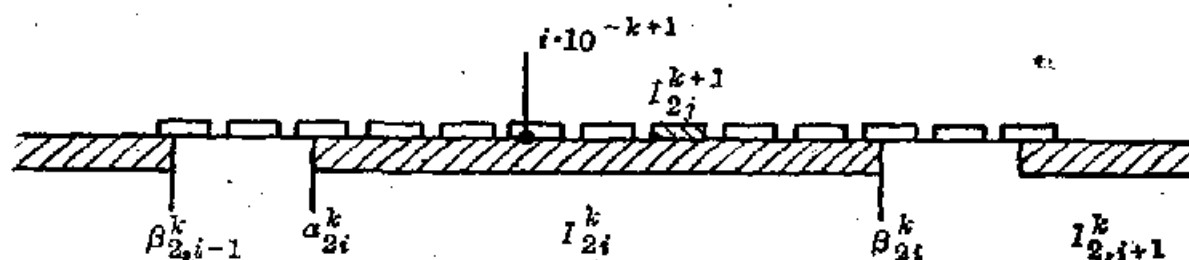


图 2

引理 1 存在着五个定义在 $[0, 1]$ 上的严格递增函数 ϕ_q ($q = 0, \dots, 4$), 它们取值于 $[0, 1]$ 中且属于类 $\text{Lip}\alpha$ ($\alpha > 0$), 使得对于每个固定的秩数 $k = 1, 2, \dots$, 区间

$$\Delta_{qij}^k = [\phi_q(\alpha_{qi}^k) + \lambda\phi_q(\alpha_{qj}^k), \phi_q(\beta_{qi}^k) + \lambda\phi_q(\beta_{qj}^k)] \quad (3)$$

$$(q = 0, \dots, 4; i, j = 0, \dots, 10^{k-1})$$

互不相交.

证明 同时构造诸函数 ϕ_q . 取 $\alpha_{q0}^0 = 0, \beta_{q0}^0 = 1$, 并规定 $0 \leq \phi_q(0) < \phi_q(1) < 1$ ($q = 0, \dots, 4$) 为互不相同的有理数. 按 k 用归纳法继续这一构造过程. 在第 k 步, 我们在对应同一个 q 的所有区间 (2) 的端点 $\alpha_{qi}^k, \beta_{qi}^k$ 处定义每个 ϕ_q ($q = 0, \dots, 4$). 对于每个 $k = 1, 2, \dots$, 将使下列诸条件得到满足:

(a) 函数 ϕ_q ($q = 0, \dots, 4$) 在所有点 $\alpha_{qi}^l, \beta_{qi}^l$ ($0 \leq i \leq 10^{l-1}; l \leq k$) 的集上是严格递增的.

(b) 连接点 $(x, \phi_q(x))$ ($x = \alpha_{qi}^l, \beta_{qi}^l; l \leq k$) 的每个折线段的斜率严格地小于 5^k .

上面的性质仅涉及每个单独的函数 ϕ_q ; 下面的性质则涉及所有五个函数.

(c) 所有的值 $\phi_q(\alpha_{qi}^l)$, $\phi_q(\beta_{qi}^l)$ ($q=0, \dots, 4$, $0 \leq i \leq 10^{k-1}$, $l \leq k$) 是相异的有理数.

(d) 区间(3)是互不相交的.

设 ϕ_q 在秩 $l < k$ 的所有端点 α_{qi}^l , β_{qi}^l 处有定义, 并且满足条件(a)到(d). 下面阐述如何把这定义延拓到 $(0, 1)$ 中所有秩为 k 的端点 α_{qi}^k 和 β_{qi}^k 上. 首先建立 ϕ_q 的(不严格的)递增开拓, 使之满足(b); 然后再对此延拓稍加修改, 使之满足(a)到(d)的所有要求. 构造的第一部分可对每个 q 独立地进行.

让 q 固定. 用 $\gamma = \gamma_q$ 表示点 α_{qi}^l 和 β_{qi}^l ($l < k$), 在这些点上函数 ϕ_q 已经知道. 注意(在 216 页上)每个在 $(0, 1)$ 中的“新”点 α_{qi}^k , β_{qi}^k 与每个老点 γ 都不同. 区间 I_{qi}^k 覆盖每个区间 $(m10^{-k+1}, (m+1)10^{-k+1})$ 全长的 $\frac{4}{5}$, 而 I_{qi}^k 之间的间隙覆盖着其余的 $\frac{1}{5}$. 同样的情形适用于每个区间 (γ, γ') . 区间 I_{qi}^k 有两种: 第一种包含一个点 γ , 记为 γ_{qi}^k ; 第二种区间不包含点 γ .

对于每个区间 I_{qi}^k , 我们让 $\phi_q(\alpha_{qi}^k) = \phi_q(\beta_{qi}^k) = \phi_{qi}^k$. 对于第一种区间, 取 ϕ_{qi}^k 等于 $\phi_q(\gamma_{qi}^k)$. 为了对第二种区间定义 ϕ_{qi}^k , 我们选取 ϕ_q 在端点 α_{qi}^k , β_{qi}^k 上的值. 设 γ, γ' 是相邻的两个点 γ_q . 为了对含于 (γ, γ') 中的第二种区间 I_{qi}^k 决定 ϕ_q 在其端点的值, 只需确定 ϕ_q 在每一个落入 (γ, γ') 内的两个区间 I_{qi}^k 的间隙(或间隙的一部分) (x, x') 上的增量. 由(b): $\phi_q(\gamma') - \phi_q(\gamma) < 5^{k-1}(\gamma' - \gamma)$. 我们使 ϕ_q 在 (x, x') 上的增量正比于 (x, x') 的长度. 因为间隙的全长为 $\frac{1}{5}(\gamma', \gamma)$, 故必须取

$$\phi_q(x') - \phi_q(x) = 5 \frac{x' - x}{\gamma' - \gamma} [\phi_q(\gamma') - \phi_q(\gamma)].$$

于是, $\phi_q(x') - \phi_q(x) < 5^k(x' - x)$, 从而 ϕ_q 满足 (b).

以下的构造关系到所有的 q 值. $\phi_{q_i}^k$ 值的微小改变不会破坏条件 (b) 或 ϕ_q 的单调性. 我们对第二种区间的 $\phi_{q_i}^k$ 稍加改变, 使得所有的值 $\phi_{q_i}^k$ ($q=0, \dots, 4, i=0, \dots, 10^{k-1}$) 成为相异的有理数, 这是可能的, 因为由 (c), 对于第一种区间, 值 $\phi_{q_i}^k = \phi_q(\gamma_{q_i}^k)$ 已经具备这些性质.

第 k 步骤的最后部分是在秩数为 k 且落入 $(0, 1)$ 内的端点 $\alpha_{q_i}^k, \beta_{q_i}^k$ 处修改 ϕ_q 的值. 因为 λ 是无理数, 值

$$\phi_{q_i}^k + \lambda \phi_{q_j}^k \quad (q=0, \dots, 4; i, j=0, \dots, 10^{k-1}) \quad (4)$$

各不相同. 设 $\varepsilon > 0$ 充分小, 使得 (4) 中诸点的 2ε -邻域互不相交. 这就保证能定义余下的 ϕ_q 值. 对于每个区间 $I_{q_i}^k$, 在 $\phi_{q_i}^k$ 的 ε -邻域中选取 $\phi_q(\alpha_{q_i}^k), \phi_q(\beta_{q_i}^k)$, 使得 $\phi_q(\alpha_{q_i}^k) < \phi_{q_i}^k < \phi_q(\beta_{q_i}^k)$ (倘若一个端点是 0 或 1, 则此不等式应作相应改变. 例如, 若 $\beta_{q_i}^k = 1$, 则应写成 $\phi_q(\alpha_{q_i}^k) < \phi_{q_i}^k = \phi_q(\beta_{q_i}^k)$). 显然, 这样的取法可以使得 (a)、(b) 和 (c) 都得到满足; (d) 也成立, 这是因为每个区间 (3) 包含在对应点 (4) 的 2ε -邻域内. 从而第 k 步骤就完成了.

依次类推, 便在点 $\alpha_{q_i}^k, \beta_{q_i}^k$ 的集 A_q 上定义了每个函数 ϕ_q , 其中 $0 \leq i \leq 10^{k-1}$ ($k=1, 2, \dots$). 此外, 在 A_q 上有

$$\phi_q \in \text{Lip } \alpha, \quad \alpha = \log_{10} 2. \quad (5)$$

事实上, 设 $x, x+h$ ($h>0$) 为 A_q 的两个点. 我们可取 $h < \frac{1}{5}$.

设 k 为满足 $2 \cdot 10^{-k-1} \leq h < 2 \cdot 10^{-k}$ 的整数. 区间 $(x, x+h)$ 至多包含点 $\alpha_{q_i}^k, \beta_{q_i}^k$ 中的一个. 因此, 它包含在某个介于两个这种点之间长为 10^{-k+1} 的区间内. 于是, 根据 (a) 和 (b), 只

要 α 是由 $2=10^\alpha$ 确定的, 就有

$$\begin{aligned}\phi_q(x+h) - \phi_q(x) &< 5^k \cdot 10^{-k+1} = 10 \cdot 2^{-k} = 10 \cdot 10^{-\alpha k} \\ &\leq 10(5h)^\alpha = 10 \cdot 5^\alpha h^\alpha.\end{aligned}$$

这就证明了 (5).

集 A_q 在 $[0, 1]$ 中是稠密的. 根据一致连续性, ϕ_q 可以唯一地延拓到 $[0, 1]$ 上. 这个延拓 $\phi_q(x)$ 是保持严格递增并且满足 (5) 的. 由于延拓不改变 ϕ_q 在 α_q, β_q 处的值, 故新的函数仍然满足 (d). 证毕.]

3. 证明的完成

设 I_{qi}^k 是区间 2(2); S 为正方形 $0 \leq x, y \leq 1$; 又设 S_{qij}^k 是小正方形:

$$S_{qij}^k = I_{qi}^k \times I_{qj}^k \quad (q=0, \dots, 4; k=1, \dots; 0 \leq i, j \leq 10^{-k}). \quad (1)$$

在映照 $(x, y) \rightarrow \phi_q(x) + \lambda \phi_q(y)$ 之下, 正方形 (1) 的象是 2(3) 的区间 A_{qij}^k . 因此, 根据引理 1, 对于每个固定的 k , 函数 $\phi_q(x) + \lambda \phi_q(y)$ 把对应于 q 的诸正方形 (1) 映照到不相交的区间上.

对于固定的 k , 诸区间 I_{qi}^k 分成 $q=0, \dots, 4$ 五个族. 我们知道 $[0, 1]$ 中的每个点 x 并非仅为五个族之一所覆盖. 诸区间 I_{qj}^k 的情形也如此. 因此, S 的每一点 (x, y) 不仅为两个不同 q 值的正方形 (1) 所覆盖. 而且事实上, 每个点 (x, y) 至少落在 $q=0, \dots, 4$ 五个族中的三个族内.

对于定义在 $0 \leq u \leq 2$ 上的每个连续函数 $g(u)$, 我们设

$$h(x, y) = \sum_{q=0}^4 g(\phi_q(x) + \lambda \phi_q(y)). \quad (2)$$

引理 2 设 $\frac{2}{3} < \theta < 1$. 对于每个 $f \in O[S]$, 存在着函数

$g \in C[0, 2]$, 使得

$$\|f - h\| \leq \theta \|f\|; \quad \|g\| \leq \frac{1}{3} \|f\|. \quad (3)$$

证明 取 $\varepsilon > 0$ 充分小, 使得 $\frac{2}{3} \varepsilon \leq \theta$; 又取 k 充分大, 使在每个正方形 (1) 上 f 的振幅不超过 $\varepsilon \|f\|$. 设 f_{qu}^k 是 $f(x, y)$ 在正方形 S_{qu}^k 中心处的值. 在每个区间 Δ_{qu}^k 上假设 $g(u)$ 取常值且等于 $\frac{1}{3} f_{qu}^k$. 把 g 线性延拓到 Δ_{qu}^k 的间隙中, 从而获得一个 $[0, 2]$ 上的连续函数, 它满足 (3) 中第二式. 设 (x, y) 是 S 中的任意一点. 至少存在三个 q 的值, 使得对于某个 i 与 j 有 $(x, y) \in S_{qu}^k$. 和式 (2) 中相应的项取值 $\frac{1}{3} f_{qu}^k$, 它们与 $\frac{1}{3} f(x, y)$ 的误差不超过 $\frac{1}{3} \varepsilon \|f\|$. (2) 中余下两项的绝对值都 $\leq \frac{1}{3} \|f\|$. 于是

$$|f(x, y) - h(x, y)| \leq 3 \cdot \frac{1}{3} \varepsilon \|f\| + \frac{2}{3} \|f\| \leq \theta \|f\|.$$

证毕.】

定理 1 的证明 (对于 $s=2$) 设 $f \in C[S]$ 给定. 我们按下述方式来定义一系列函数 $g_r \in C[0, 2]$ 以及相应的函数

$$b_r(x, y) = \sum_{q=0}^4 g_r(\phi_q(x) + \lambda \phi_q(y)).$$

首先假设 g_1, h_1 是按引理 2 给出的, 它们满足

$$\|f - h_1\| \leq \theta \|f\|, \quad \|g_1\| \leq \frac{1}{3} \|f\|.$$

再次应用引理 2 可得函数 g_2, f_2 , 并使之满足

$$\|(f - h_1) - h_2\| \leq \theta \|f - h_1\| \leq \theta^2 \|f\|,$$

$$\|g_2\| \leq \frac{1}{3} \|f - h_1\| \leq \frac{1}{3} \theta \|f\|.$$

一般地, 函数 g_r, h_r 将满足

$$\|f - h_1 - \dots - h_r\| \leq \theta^r \|f\|,$$

$$\|g_r\| \leq \frac{1}{3} \theta^{r-1} \|f\| \quad (r=1, 2, \dots). \quad (4)$$

级数 $\sum_1^\infty g_r, \sum_1^\infty h_r$ 一致收敛. 设 g, h 为它们的和. 那么, 它们满足关系式(2). 此外, 由(4)的第一式知: $f=h$. 这就证明了1(2)式. 证毕.】

4. 不能用迭加表示的函数

虽然 Hilbert 猜测被定理 1 所否定. 但这个猜测却是基于一种正常的想法, 即“坏”的函数不能简单地用“好”的函数来表示. Kolmogorov 定理只是表明, 变量的个数 s 不是连续函数“坏的程度”的令人满意的特征. 但对于 $p \geq 1$ 阶连续导数的函数, 数 $\chi = p$ 是一个有用的特征. 事实上, 不是所有具有 $p-1$ 阶连续偏导数的函数都可以表示为具有 p 阶连续导数函数的迭加. 这是微分学演算中的简单事实.

本节将指出, 存在着特征 χ , 它具有依赖于 s 那样的类似性质. 对于定义在 s -维单位立方体 B 上的函数类 $A_{p\alpha}^s$ (见第三章第 7 节), 数 $\chi = (p+\alpha)/s$ 便有这类特征. 对于更广的类 $A_{p\omega}^s$, 可用函数 $\Delta(\varepsilon) = \delta(\varepsilon)^s$ 代替这个 χ , 其中 $\delta(\varepsilon)$ 由 10.2(1) 给出. 若 $\omega(h) = Mh^\alpha$, 则 $\Delta(\varepsilon) = \text{const } \varepsilon^{1/\chi}$. χ 越小, 或是函数 $\Delta(\varepsilon)$ 减少到零越快, 则对应的函数类 A 就越“大”, 越“复杂”. 下面证明由 Vituškin [100] 和 Kolmogorov [65] 建立的定理.

定理 2 设 $\chi_0 > 0$ 已给定. 又设 L 是使 $\chi = (p+\alpha)/s > \chi_0$ 且 $p+\alpha \geq 1$ 的所有函数类 $A_{p\alpha}^s$ 的并. 则不是类 $A_{p\alpha}^s$ 中所有

函数都能表示为 L 中函数的迭加, 其中 $(p_0 + \alpha_0)/s_0 = \chi_0$.

粗略地说, 不是具有给定特征 χ_0 的所有函数都能表示成更简单函数的迭加. 更一般地有

定理 3 设 F 是类 $A_{p\alpha}^s(M_0, \dots, M_{p+1}; B)$ (它们每个都含在类 $\text{Lip}_M 1$ 之中) 的可列族, 每个类有对应的函数 $\Delta(s)$. 又设类 $A_{p_0\alpha_0}^{s_0}$ 是给定的, 其对应函数为 $\Delta_0(s)$. 假如对于每个 $C > 0$ 和 Δ , 有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta_0(\varepsilon)}{\Delta(C\varepsilon)} = 0, \quad (1)$$

那末不是类 $A_{p_0\alpha_0}^{s_0}$ 中所有的函数都是 $L = \bigcup_F A$ 中函数的迭加.

在定理 2 中, 类 L 可看作是类 $A_{p\alpha}^s$ 的可列并, 也即所有类 $A_{p\alpha}^s(M_0, \dots, M_{p+1}; B) \subset \text{Lip}_M 1$ 的并, 其中 $(p + \alpha)/s > \chi_0$ ($p + \alpha \geq 1$, α 是有理数), 而 $M_0, \dots, M_{p-1}, M$ 是正整数. 所以, 定理 2 是定理 3 的特殊情形.

在证明定理 3 之前, 需要引入若干新的概念, 它们有助于描述所有可能的迭加. 例如, 考察函数 $g(h(x, y), z)$; 可以把它写成 $g(y_1, y_2)$, 其中 $y_1 = h(y_{11}, y_{12})$; $y_2 = z$ 而 $y_{11} = x$; $y_{12} = y$. 在这个例子中, 基本变量 z 一步就达到, 而要达到基本变量 x 与 y , 则需要两步. 通过引进中间变量 $y_2 = y_{21}$ 和 $y_{21} = z$, 便可使步数都相等. 这一说明导出了下述定义: 下述形式的自然数表称为一个方案 (scheme) S :

$$S: \begin{cases} s, n \\ m \\ m_{k_1}, k_1 = 1, \dots, m \\ m_{k_1 k_2}, k_1 = 1, \dots, m; k_2 = 1, \dots, m_{k_1} \\ \dots \dots \dots \\ m_{k_1 \dots k_n}, k_1 = 1, \dots, m; \dots; k_n = 1, \dots, m_{k_1 \dots k_{n-1}} \\ \text{每个 } m_{k_1 \dots k_n} \text{ 是数 } 1, \dots, s \text{ 之一.} \end{cases}$$

证明 设 $T_k (k=1, \dots, m)$ 是高度为 $n-1$ 的型, 它们是由 T 按下述方法得到的: 除去 (2) 中的第一行, 并且在余下的各行中固定第一个下标 $k_1=k$. 换言之, 型 T_k 由借助于 (2) 得到, 且定义在空间 R_s 的单位立方体上的一切可能函数

$$f_k(x_1, \dots, x_s) = g_k(y_{k_1}, \dots, y_{k_{m_k}})$$

所组成, 其中函数 $g_{k_1 \dots k_r}$ 在类 $A_{k_1 \dots k_r}$ 中. 对于所有的 $f \in T$, 有

$$f = g(f_1, \dots, f_m), \quad g \in A, \quad f_k \in T_k \quad (k=1, \dots, m). \quad (4)$$

设 $\varepsilon_2 = (M+1)^{s-1}\varepsilon$. 又设 U 是 A 的某极小 ε -覆盖的诸集, $U^{(k)}$ 是 T_k 的极小 ε_2 -覆盖的诸集 ($k=1, \dots, m$). 若 $f = g(f_1, \dots, f_m)$, $f' = g'(f'_1, \dots, f'_m)$, 其中 g 和 g' 属于同样的 U , 而对于每个 k , f_k 和 f'_k 属于相同的 $U^{(k)}$, 那么 (见 3.7(5)),

$$\begin{aligned} |f(x_1, \dots, x_s) - f'(x_1, \dots, x_s)| &\leq |g(f_1, \dots, f_m) \\ &\quad - g'(f_1, \dots, f_m)| + |g'(f_1, \dots, f_m) - g'(f'_1, \dots, f'_m)| \\ &\leq \|g - g'\| + M \max_k \{|f_k(x_1, \dots, x_s) - f'_k(x_1, \dots, x_s)|\} \\ &\leq 2\varepsilon + M \cdot 2\varepsilon_2 \leq 2\varepsilon_1. \end{aligned}$$

这样, 可以得到 T 的一个 ε -覆盖, 它由 $N_\varepsilon(A) \prod_{k=1}^m N_{\varepsilon_2}(T_k)$ 个集组成. 因此,

$$H_{\varepsilon_1}(T) \leq H_\varepsilon(A) + \sum_{k=1}^m H_{\varepsilon_2}(T_k). \quad (5)$$

于是, 通过迭代就可得到 (3).

证毕. $\square$

回转 to 定理 3 的证明, 考察 Banach 空间 $X = X_{p_0, \omega}^{s_0}$ (见第三章第 7 节). 在 X 中半径为 r 的球 U 是以原点为中心的球, 即球 $A_{p_0, \omega}^{s_0}(r, \dots, r; B)$ 的平移. 在一致范数下, U 的熵可由 10.2(2) 来估计. 这就得到 $H_\varepsilon(U) \geq K/\Delta_0(\beta\varepsilon)$. 类似地, 对于每个类 $A \in F$, 有 $H_\varepsilon(A) \leq K_1/\Delta(\gamma\varepsilon)$. 因此, 由 (1), 当

$\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 有

$$\frac{H_*(A)}{H_*(U)} \leq \text{const} \frac{\Delta_0(\beta\varepsilon)}{\Delta(\gamma\varepsilon)} \rightarrow 0.$$

若型 T 由类 $A \in F$ 形成的, 则 (3) 蕴含 $H_*(T)/H_*(U) \rightarrow 0$. 由此推知: T 不包含 X 的任何球 U .

因为在一致拓扑下类 A 是紧致的 (第三章定理 9), 所以 T 也是紧致的, 从而是闭的. 因为 X 范数下的收敛性蕴含一致收敛, 因此 $X \cap T$ 在空间 X 中是闭的. 这就推知 $X \cap T$ 在 X 中无处稠密.

由于存在着可数个方案 S , 因此, 存在着由类 $A \in F$ 形成的可数个型. 对于这些 T , 集 $X \cap \bigcup T$ 在 X 中是第一范畴的, 因此, 由 Baire 定理, 对于 X 中的每个球 U , $U \setminus \bigcup T$ 是非空的. 特别, 存在着不能用 L 中函数的迭加表示的函数 $f \in A_{p,\omega}^{s_0} \setminus \bigcup T$. 证毕.】

由证明还可知道更多一些: 在某种意义上说, “大多数”函数 $f \in A_{p,\omega}^{s_0}$ 没有问题中所述的那种表示.

5. 附 记

1. 公式 1(1) 或 1(3) 中和的项数 $2s+1$ 可否再减少, 还不能知道. 但 R. Doss [42] 已证明: 若 $s=2$, 并且所有函数 ϕ_{pq} 是单调递增的, 则就 1(3) 来说, 这是不可能的.

2. 另一方面, 已经知道: 公式 1(3) 中的函数 ϕ_p 是不可能很光滑的. 这可以从下述 Vituškin [101, 102] 和 Henkin [56] 的结果推知. 设 $\phi_q(x, y)$ 与 $\psi_q(x, y)$ ($q=1, \dots, N$) 为定义在全平面上的连续函数. 又设 ϕ_q 是连续可微的. 那么存在着多项式 $(x+my)^n$; 其中 n, m 为自然数, 不能把它表成下述形式:

$$\sum_{q=1}^N \psi_q(x, y) g_q(\phi_q(x, y)),$$

无论 g_q 是怎样选择的有界可测函数, 我们不能在此证明该定理.

问 题

1. 证明第 216 页上的函数 $\psi(t)$ 是一个非凸连续模.
2. 把定理 1 的证明用于任意的 s .
3. 试证, 假如 λ_p 是满足 $0 < \lambda_p < 1$ 的任意数, 并且 r_p 为整数时, 关系式 $r_1 \lambda_1 + \dots + r_s \lambda_s = 0$ 仅当 $r_1 = \dots = r_s = 0$ 时, 才可能成立, 那么该证明仍然可行.
4. 试证, 假如把可数个属于类 $\text{Lip}_M 1$ 的函数加到 $\mathcal{L}$ 中去, 则定理 2 仍成立.
5. 利用第十章定理 6, 证明: 并非所有 s 个变量的解析函数都是较少变量的解析函数的迭加.
6. 存在着满足定理 1 的函数 $\phi_q (q=0, \dots, 4)$, 它们对于每个 $0 < \alpha < 1$ 属于 $\text{Lip } \alpha$. [提示: 用下述方法改变在导出引理 1 证明时所作的构造: 在第 k 步使用秩为 $l \sim l(k) \sim k^2$ 的区间 I_k^l .]

参 考 文 献

A. 有关逼近论的书籍

1. Achieser (Abiezer), N. I., *Theory of Approximation*, New York: Ungar, 1956. (307 pp.) (Translated from the Russian.) [There exists an augmented 2nd edition, Moscow: Nauka, 1965. (407 pp.)]
2. Bernstein, S. N., *Collected Works* (Russian), Akad. Nauk SSSR, Moscow, vol. I, 1952 (581 pp.), vol. II, 1954. (627 pp.)
3. ——— *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle*, Paris: Gauthier-Villars, 1926. (207 pp.)
4. Davis, Ph. J., *Interpolation and Approximation*, New York: Blaisdell, 1963. (393 pp.)
5. Gončarov, V. L., *Theory of Interpolation and of Approximation of Functions*, 2nd ed., Moscow: Gostehizdat, 1954. (327 pp.) (In Russian.)
6. Jackson, Dunham, *The Theory of Approximation*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. XI, New York, 1930. (178 pp.)
7. Korovkin, P. P., *Linear Operators and Approximation Theory*, Moscow: Fizmatgiz, 1959. There is also a not completely satisfactory English translation by Hindustan Publ. Corp., Delhi, 1960. (222 pp.)
8. Lorentz, G. G., *Bernstein Polynomials*, Toronto: Univ. of Toronto Press, 1953. (130 pp.)
9. Meinardus, G., *Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung*, (Springer Tracts in Natural Philosophy, vol. 4), Berlin: Springer, 1964. (180 pp.)
10. Natanson, I. P., *Konstruktive Funktionentheorie*, Berlin: Akademie-Verlag, 1955. (515 pp.) (Translated from the Russian.)
11. Rice, J. R., *The Approximation of Functions*, vol. 1, *Linear Theory*, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1964. (203 pp.)
12. Sard, A., *Linear Approximation*, Math. Surveys No. 9, Providence: Amer. Math. Soc., 1963. (544 pp.)
13. Smirnov, V. I., and N. I. Lebedev, *Constructive Theory of Functions of a Complex Variable*, Moscow-Leningrad: Nauka, 1964. (438 pp.) (In Russian.)
14. Stiefel, E. L., *An Introduction to Numerical Mathematics*, New York and London: Academic Press, 1963. (286 pp.)
15. Timan, A. F., *Theory of Approximation of Functions of a Real Variable*, New York: Macmillan, 1963. (631 pp.) (Translated from the Russian.)
16. de la Vallée-Poussin, C., *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*, Paris: Gauthier-Villars, 1919. (151 pp.)

17. Vitushkin (Vituskin), A. G., *Theory of Transmission and Processing of Information*, New York: Pergamon, 1961. (206 pp.). (The Russian original had the title *Estimation of the Complexity of the Tabulation Problem*.)
18. Walsh, J. L., *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*, vol. XX, 2nd ed., Providence: Amer. Math. Soc. Coll. Publ., (1956). (398 pp.)
19. Walsh, J. L., *Approximation by Bounded Analytic Functions*, *Mémoires des Sci. Math.*, vol. 144, Paris: Gauthier-Villars, 1960. (66 pp.)
20. *On Approximation Theory, Proceedings of the Conference at Oberwolfach*, 1963, Basel: Birkhäuser, 1964. (261 pp.)
21. *Approximation of Functions, Proceedings of the Symposium, General Motors Research Laboratories*, 1964, Amsterdam: Elsevier, 1965. (220 pp.)

B. 其他书籍

22. Eggleston, H. G., *Convexity* (Cambridge Tracts No. 47), Cambridge: University Press, 1958.
23. Hardy, G. H., J. E. Littlewood, and G. Polya, *Inequalities*, Cambridge: University Press, 1934.
24. Hardy, G. H., and W. W. Rogosinski, *Fourier series*, 2nd ed. (Cambridge Tracts No. 38), Cambridge: University Press, 1950.
25. Kneser, H., *Funktionentheorie*, Göttingen: Vandenhoeck and Ruprecht, 1958.
26. Natanson, I. P., *Theory of Functions of a Real Variable*, vol. 1, New York: Ungar, 1955.
27. Neumark, M. A., *Linear Differentialoperatoren*, Berlin: Akademie-Verlag, 1960.
28. Simmons, G. F., *Introduction to Topology and Modern Analysis*, New York: McGraw-Hill, 1963.
29. Whittaker, E. T., and G. N. Watson, *A Course in Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge: University Press, 1952.

C. 杂志中的文章

Abbreviations: American Mathematical Society: *TAMS* = Transactions, *BAMS* = Bulletin, and *PAMS* = Proceedings; *Izv.* = *Izvestia Akad. Nauk SSSR*, Ser. Mat.; *Dokl.* = *Doklady Akad. Nauk SSSR*; *Uspehi* = *Uspehi Mat. Nauk*.

30. Ahiezer (Achieser), N. I., and M. G. Krein, "On the best approximation of periodic functions," *Dokl.*, 15 (1937), 107-112.
31. Al'per, S. Ja., "Asymptotic values of best approximation of analytic functions in a complex domain," *Uspehi*, 14, No. 1 (85) (1959), 131-134.
32. Babenko, K. I., "On the best approximation of a class of analytic functions," *Izv.* 22 (1958), 631-640.
33. Bari N. K., and S. B. Stečkin, "Best approximation and differential properties of two conjugate functions," *Trudy Mosh. Mat. Obšč.*, 5 (1956), 483-522.

34. Berman, D. L., "On a class of linear operators," *Dokl.*, 85 (1952), 13-16.
35. Bernstein, S. N., "Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné," *Mémoires publiés par la classe des sci. Acad. de Belgique* (2) 4 (1912), 1-103 (= [2, vol. I, 11-104]).
36. Birkhoff, G. D., "On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations," *TAMS*, 9 (1908), 219-231.
37. Brudnyi, Ju. A., "Generalization of a theorem of A. F. Timan," *Dokl.*, 148 (1963), 1237-40.
38. Cheney, E. W., "Approximation by generalized rational functions," in [21], 101-110.
39. Clements, G. F., "Entropies of sets of functions of bounded variation," *Canadian J. Math.*, 15 (1963), 422-432.
40. Curtis, P. C., " π -parameter families and best approximation," *Pacific J. Math.*, 9 (1959), 1013-1027.
41. Dolženko, E. P., "Estimates of derivatives of rational functions," *Izv.*, 27 (1963), 9-28.
42. Doss, R., "On the representation of continuous functions of two variables by means of addition and continuous functions of one variable," *Colloquium Math.*, 10 (1963), 249-259.
43. Dzjadzyk, V. K., "Constructive characterization of functions satisfying a condition $\text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha < 1$) on a finite interval of the real axis," *Izv.*, 20 (1956), 623-642.
44. ———, "A further strengthening of Jackson's theorem on the approximation of continuous functions by ordinary polynomials," *Dokl.*, 121 (1958), 403-406.
45. Erdős, P., "Extremal properties of derivatives of polynomials," *Ann. Math.*, (2) 41 (1940), 310-313.
46. Erohin, V. D., "On the asymptotic behavior of the ϵ -entropy of analytic functions," *Dokl.*, 120 (1958), 949-952.
47. ———, "On the best approximation of analytic functions by rational functions with free poles," *Dokl.*, 128 (1959), 29-32.
48. Faber, G., "Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen," *Jahresber. DMV*, 23 (1914), 192-210.
49. Favard, J., "Sur les meilleures procédés d'approximation de certaines classes des fonctions par des polynômes trigonométriques," *Bull. Sci. Math.*, 61 (1937), 209-224, 243-256.
50. ———, "Sur la saturation des procédés de sommation," *J. Math. Pures Appl.*, (9) 36 (1957), 359-372.
51. Freud, G., "Über die Approximation reeller stetiger Funktionen durch gewöhnliche Polynome," *Math. Ann.*, 137 (1959), 17-25.
52. Gelfand, A. O., "On uniform approximation by polynomials with integral rational coefficients," *Uspehi*, 10, No. 1 (63) (1955), 41-65.
53. Gohberg, I. C., and M. G. Krein, "Fundamental aspects of defect numbers, root numbers, and indexes of linear operators," *Uspehi*, 12, No. 2 (74) (1957), 43-112.
54. Gončar, A. A., "Inverse theorems of best approximation by rational functions," *Izv.*, 25 (1961), 347-356.

55. Haar, A., "Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung stetiger Funktionen," *Math. Ann.*, 78 (1918), 294-311.
56. Henkin, G. M., "Linear superpositions of continuously differentiable functions," *Dokl.*, 157 (1964), 288-290.
57. Hewitt, E., and H. S. Zuckerman, "Approximation by polynomials with integral coefficients, a reformulation of the Stone-Weierstrass theorem," *Duke Math. J.*, 26 (1959), 305-324.
58. Jackson, D., "On the approximation by trigonometric sums and polynomials," *TAMS*, 13 (1912), 491-515.
59. Jurkat, W. B., and G. G. Lorentz, "Uniform approximation by polynomials with positive coefficients," *Duke Math. J.*, 28 (1961), 463-474.
60. Kolmogorov, A. N., "Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse," *Ann. of Math.*, (2) 37 (1936), 107-111.
61. ———, "A remark on the polynomials of Chebyshev, deviating the least from a given function," *Uspehi*, 3, No. 1 (23) (1948), 216-221.
62. ———, "Asymptotic characteristics of some completely bounded metric spaces," *Dokl.*, 108 (1956), 385-389.
63. ———, "On the representation of continuous functions of several variables by superpositions of continuous functions of one variable and addition," *Dokl.*, 114 (1957), 679-681.
64. ———, "On the linear dimension of linear topological spaces," *Dokl.*, 120 (1958), 239-241.
65. Kolmogorov, A. N., and V. M. Tihomirov, " ϵ -entropy and ϵ -capacity of sets in function spaces," *Uspehi*, 14, No. 2 (86) (1959), 3-86.
66. Korneičuk, N. P., "The best approximation of continuous functions," *Izv.*, 27 (1963), 29-44.
67. ———, "The best uniform approximation of differentiable functions," *Dokl.*, 141 (1961), 304-307.
68. ———, "On the existence of a linear polynomial operator which gives best approximation on a class of functions," *Dokl.*, 143 (1962), 25-27.
69. ———, "The exact constant in the theorem of D. Jackson on the best uniform approximation of continuous periodic functions," *Dokl.*, 145 (1962), 514-515.
70. ———, "The exact value of the best approximation and of widths of some classes of functions," *Dokl.*, 150 (1963), 1218-1220.
71. Kreĭn, M. G., D. Milman, and M. Rutman, "On a property of a basis in a Banach space," *Zapiski Harkov Mat. Obšč.*, (4) 16 (1940), 106-110.
72. Lax, P., "Proof of a conjecture of P. Erdős," *BAMS*, 50 (1944), 509-513.
73. Lorentz, G. G., "Lower bounds for the degree of approximation," *TAMS*, 97 (1960), 25-34.
74. ———, "Metric entropy, widths, and superpositions of functions," *Amer. Math. Monthly*, 69 (1962), 469-485.
75. ———, "The degree of approximation by polynomials with positive coefficients," *Math. Ann.*, 151 (1963), 239-251.
76. ———, "Inequalities and the saturation classes of Bernstein polynomials," in [20], 200-207.
77. ———, "Entropy and approximation," *BAMS*, to be published.

78. Mairhuber, J., "On Haar's theorem concerning Chebyshev approximation problems having unique solutions," *PAMS*, 7 (1956), 609-615.
79. Markov, A. A., "On a problem of D. I. Mendeleev," *St. Petersburg, Izv. Akad. Nauk*, 62 (1889), 1-24.
80. Mitjagin, B. S., "The approximative dimension and bases in nuclear spaces," *Uspehi*, 16, No. 4 (100) (1961), 63-132.
81. ———, "Approximation of functions in L^p and C spaces on the torus," *Mat. Sbornik (N.S.)*, 58 (100) (1962), 397-414.
82. Newman, D. J., "Rational approximation to $|x|$," *Michigan Math. J.*, 11 (1964), 11-14.
83. Newman, D. J., and H. S. Shapiro, "Jackson's theorem in higher dimensions," in [20], 208-219.
84. Nikol'skii, S. M., "On the best approximation of functions satisfying a Lipschitz's condition by polynomials," *Izv.*, 10 (1946), 295-322.
85. Phelps, R. R., "Uniqueness of Hahn-Banach extensions and unique best approximation," *TAMS*, 95 (1960), 238-255.
86. Rivlin, T. J., and H. S. Shapiro, "A unified approach to certain problems of approximation and minimization," *J. Soc. Indust. and Appl. Math.*, 9 (1961), 670-699.
87. Scheick, J. T., "Polynomial approximation of functions analytic in a disc," to be published.
88. Schoenberg, I. J., "Spline interpolation and best quadrature formulae," *BAMS*, 70 (1964), 143-148.
89. Sprecher, D., Ph.D. Dissertation, University of Maryland, 1963.
90. Stečkin, S. B., "On the order of the best approximation of continuous functions," *Izv.*, 15 (1951), 219-242.
91. Stone, M. H., "The generalized Weierstrass approximation theorem," *Math. Magazine*, 21 (1948), 167-184, 237-254.
92. Sunouchi, G., and C. Watari, "On determination of the class of saturation in the theory of approximation of functions," *Tohoku Math. J.*, 11 (1959), 480-488.
93. Tihomirov, V. M., "Widths of sets in functional spaces and the theory of best approximations," *Uspehi*, 15, No. 3 (93) (1960), 81-120.
94. ———, "On the ϵ -entropy of certain classes of periodic functions," *Uspehi*, 17, No. 6, (108) (1962), 163-169.
95. ———, "Some problems in approximation theory," *Dokl.*, 160 (1965), 774-777.
96. Timan, A. F., "A strengthening of Jackson's theorem on the best approximation of continuous functions by polynomials on a finite interval of the real axis," *Dokl.*, 78 (1951), 17-20.
97. ———, "A geometric problem in the theory of approximation," *Dokl.*, 140 (1961), 307-310.
98. Tucker, A. W., "Some topological properties of disc and sphere," *Proc. First Canadian Math. Congress*, Montreal (1945), 285-309.
99. Tureckii, A. H., "On saturation classes for certain methods of summation of Fourier series of continuous periodic functions," *Uspehi*, 15, No. 6 (96) (1960), 149-156.

100. Vituškin (Vitushkin), A. G., "On the 13th problem of Hilbert," *Dokl.*, 95 (1954), 701-704.
101. ———, "Some properties of linear superpositions of smooth functions," *Dokl.*, 156 (1964), 1003-1006.
102. ———, "Proof of existence of analytic functions of several variables, not representable by linear superpositions of continuously differentiable functions of fewer variables," *Dokl.*, 156 (1964), 1258-1261.
103. Weierstrass, K., "Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente," *Sitzungsberichte der Acad. Berlin* (1885), 633-639, 789-805.
104. Whittlesey, E. F., "Fixed points and antipodal points," *Amer. Math. Monthly*, 70 (1963), 807-821.
105. Žuhovickii, S. I., "On approximation of real functions in the sense of P. L. Chebyshev," *Uspehi*, 11, No. 2 (68) (1956), 125-159.
106. Zygmund, A., "Smooth functions," *Duke Math. J.*, 12 (1945), 47-76.

索 引

一 画

一致有界原理 (Principle of uniform boundedness) (121 页)

三 画

三角多项式 (Trigonometric polynomial) (3 页)

三角多项式的阶 (Degree of a trigonometric polynomial) (3 页)

五 画

正算子 (Positive operator) (5 页)

正系数多项式 (Polynomial with positive coefficients) (17, 68 页)

本征函数 (Eigenfunction) (181 页)

本征值 (Eigenvalue) (181 页)

对偶 (Duality) (142 页)

代数多项式 (Algebraic polynomial) (3 页)

代数多项式的次数 (Degree of an algebraic polynomial) (3 页)

边界值条件 (Boundary value conditions) (181 页)

可被逼近的函数 (Approximable function) (2 页)

凸集 (Convex set) (25 页)

凸包 (Convex hull) (25 页)

凹函数 (Concave function) (57 页)

凹连续模 (Concave modulus of continuity) (57 页)

六 画

有界算子 (Bounded operator) (4 页)

有理函数 (Rational function) (103 页)

有理函数的阶 (Degree of a rational function) (130 页)

有理逼近的阶 (Degree of rational approximation) (130 页)

有限支柱函数 (Function of finite support) (28 页)

共轭函数 (Conjugate function) (127 页)

共轭级数 (Conjugate series) (126 页)

- 伴随微分式 (Adjoint differential expression) (182 页)
 自伴算子 (Self-adjoint operator) (183 页)
 多项式算子 (Polynomial operator) (117 页)
 光滑模 (Modulus of smoothness) (60 页)
 亚光滑函数 (Quasi-smooth function) (66 页)
 全逼近集 (Full approximation set) (173 页)
 与零偏差最小的多项式 (Polynomial of least deviation from zero) (39 页)

七 画

- 条件 A_n (Condition A_n) (145 页)
 连续模 (Modulus of continuity) (55 页)
 极符号差 (Extremal signature) (28 页)
 极子空间 (Extremal subspace) (163 页)

八 画

- 饱和的 (Saturated) (125 页)
 饱和类 (Saturation class) (125 页)
 整系数多项式 (Polynomial with integral coefficients) (18 页)
 函数类 $A_p(\rho)$ (Classes of functions $A_p(\rho)$) (161 页)
 $B_p(\rho, M)$ (162 页)
 B_σ (81 页)
 $\mathfrak{M}(G)$ 和 $\mathfrak{M}(H)$ (147 页)
 $\mathfrak{M}_1$ (185 页)
 A_{pw} , A_{px} , A_ϕ (64 页)
 A_{pw}^* (65 页)
 $\text{Lip}_M \alpha$ (63 页)
 W_p 和 W_p^* (65 页)
 X_{pw} (64 页)
 函数的迭加 (Superposition of functions) (213, 224 页)
 迭加的类型 (Type of superpositions) (224 页)
 绝对单调函数 (Absolute monotone function) (146 页)
 线性算子 (Linear operator) (4 页)
 线性泛函 (Linear functional) (4 页)
 线性组合 (Linear combination) (2 页)
 非线性逼近 (Nonlinear approximation) (103 页)

严格凸 Banach 空间 (Strictly convex Banach space) (21, 174 页)

九 画

类的逼近阶 (Degree of appryximation of a class) (141 页)

柱体 (Polycylinder) (192 页)

逆定理 (Inverse theorems) (70 页)

十 画

算子的范数 (Norm of an operator) (4 页)

算子的逼近阶 (Degree of approximation by an operator) (152 页)

容量 (Capacity) (190 页)

十 一 画

第 p -阶不定积分 (p -th indefinite integral) (3 页)

符号差 (Signature) (28 页)

集的偏离 (Deviation of a set) (141 页)

赋范线性空间 (Normed linear space) (2 页)

十 二 画

逼近阶 (Degree of approximation) (2 页)

逼近维 (Approximative dimension) (205 页)

最优算子 (Optimal operator) (152 页)

最优逼近阶 (Optimal order of approximation) (125 页)

最佳逼近多项式 (Polynomial of best approximation) (2, 20 页)

十 三 画

解析函数 (Analytic functions) (97 页)

微分算子 (Differential operator) (184 页)

十 四 画

宽度 (Width) (162 页)

十 五 画

椭圆 E_ρ (Ellipse E_ρ) (53 页)

椭球 (Ellipsoid) (177 页)

- Banach 空间 (Banach space) (2 页)
- Bernstein 多项式 (Bernstein polynomials) (5 页)
- ~的饱和类 (Saturation class of the ~) (130~137 页)
- Bernstein 不等式 (Bernstein's inequality) (50 页)
- Chebyshev 交错 (Chebyshev alternation) (37 页)
- Chebyshev 多项式 (Chebyshev polynomials) (40 页)
- Chebyshev 组 (Chebyshev-system) (30 页)
- Chebyshev 定理 (Chebyshev's theorem) (38 页)
- Dirichlet 积分 (Integral of Dirichlet) (9 页)
- Fejér 积分 (Integral of Fejér) (7 页)
- Fourier 级数 (Fourier series) (5 页)
- Jackson 积分 (Integral of Jackson) (72 页)
- Jackson 算子 (Operator of Jackson) (72 页)
- Jackson 核 (Jackson's kernel) (71, 78 页)
- Kolmogorov 定理 (Kolmogorov's theorem) (213 页)
- Lipschitz 条件 (Lipschitz condition) (63 页)
- Schauder 基 (Schauder basis) (17 页)
- Stone 定理 (Stone's theorem) (14 页)
- Weierstrass 定理 (Theorem of Weierstrass) (4, 13 页)
- ϵ -覆盖 (ϵ -covering) (189 页)
- ϵ -分离的 (ϵ -distinguishable) (189 页)
- ϵ -网 (ϵ -net) (189 页)