

高等学校教学参考书

微积分学教程

第三卷 第三分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

余家荣译

人民教育出版社

高等学校教学参考书

微 积 分 学 教 程

第三卷 第一分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

路见可译

人 民 教 育 出 版 社

高等学校教学参考书

微 积 分 学 教 程

第三卷 第二分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

吴亲仁 路见可译

人 民 教 育 出 版 社

高等学校教学参考书

微 积 分 学 教 程

· 第三卷 第三分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

余家荣译

人 民 教 育 出 版 社

本书第三卷根据菲赫金哥尔茨 (Г. М. Фихтенгольц) 所著《微积分学教程》(Курс дифференциального и интегрального исчисления) 第三卷 1949 年版译出。可作为综合大学数学专业教学参考。

微 积 分 学 教 程

第三卷 第一分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

路见可译

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

人民教育出版社印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号13012·0111 开本 880×1185 1/32 印张 6

字数 200,000 印数 55,001—123,500 定价(0) 0.80

1957年4月第1版 1980年2月北京第5次印刷

本书第三卷根据菲赫金哥尔茨 (Г. М. Фихтенгольц) 所著《微积分学教程》(Курс дифференциального и интегрального исчисления) 第三卷 1949 年版译出。可作为综合大学数学专业教学参考。

微 积 分 学 教 程

第三卷 第二分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

吴亲仁 路见可译

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

北京新华印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号13012-0112 开本 880×1168 1/32 印张 5 12/16

字数 154,000 印数 32,201—72,200 定价 (6)0.80

1957年2月第1版 1978年3月北京第9次印刷

本书第三卷根据菲赫金哥尔茨 (Г. М. Фихтенгольц) 所著《微积分学教程》(Курс дифференциального и интегрального исчисления) 第三卷 1949 年版译出。可作为综合大学数学专业教学参考。

微 积 分 学 教 程

第三卷 第三分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

余家荣译

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

人民教育出版社印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 15015·0113 开本 850×1168 1/32 印张 8

字数 236,000 印数 80,001—128,600 定价(元) 0.75

1955年5月第1版 1980年1月北京第13次印刷

第一分册目录

第十五章 曲线积分·斯底尔吉斯积分

§ 1. 第一型曲线积分

517. 第一型曲线积分的定义(1) 518. 化为普通定积分(3) 519. 例(5)

§ 2. 第二型曲线积分

520. 力场中功的问题(10) 521. 第二型曲线积分的定义(12) 522. 第二型曲线积分的存在与计算(15) 523. 闭路的情形·平面的定向(18) 524. 例(20) 525. 用取在折线上的积分的逼近法(25) 526. 用曲线积分计算面积(26) 527. 例(30) 528. 两种不同型曲线积分间的联系(33) 529. 物理问题(35)

§ 3. 曲线积分与道路无关的条件

530. 与全微分相关问题的提出(39) 531. 与道路无关积分的微分法(40) 532. 用原函数来计算曲线积分(43) 533. 确切微分的判别与在矩形区域的情况下原函数的求法(44) 534. 推广到任意区域的情形(46) 535. 最终结果(49) 536. 沿闭路的积分(50) 537. 非单连区域或有奇点的情形(51) 538. 高斯积分(56) 539. 空间的情形(58) 540. 例(61) 541. 物理问题的应用(65)

§ 4. 有界变差函数

542. 有界变差函数的定义(68) 543. 有界变差函数类(70) 544. 有界变差函数的性质(73) 545. 有界变差函数的判定法(77) 546. 连续的有界变差函数(79) 547. 可求长曲线(82)

§ 5. 斯底尔吉斯积分

548. 斯底尔吉斯积分的定义(86) 549. 斯底尔吉斯积分存在的一般条件(87) 550. 斯底尔吉斯积分存在情况的若干类(88) 551. 斯底尔吉斯积分的性质(91) 552. 分部积分法(94) 553. 化斯底尔吉斯积分为黎曼积分(95) 554. 斯底尔吉斯积分的计算(97) 555. 例(102) 556. 斯底尔吉斯积分的几何解说(108) 557. 中值定理, 估计值(109) 558. 斯底尔吉斯积分记号下面的极限过程(111) 559. 例题及补充(113) 560. 化第二型曲线积分为斯底尔吉斯积分(118)

第十六章 二重积分

§ 1. 二重积分的定义及简单性质

561. 柱形长条体积的问题(120) 562. 化二重积分为逐次积分(121) 563. 二重积分的定义(123) 564. 二重积分存在的条件(125) 565. 可积函数类(126) 566. 下积分及上积分作为极限(129) 567. 可积函数与二重积分的性质(130) 568. 积分当作区域的可加函数, 对区域的微分法(133)

§ 2. 二重积分的计算

569. 在矩形区域的情况下化二重积分为逐次积分(136) 570. 例(140) 571. 在曲边区域的情况下化二重积分为逐次积分(150) 572. 例(153) 573. 力学应用(167) 574. 例(169)

§ 3. 格林公式

575. 格林公式的推演(177) 576. 应用格林公式到曲线积分的研究(181) 577. 例题及补充(182)

§ 4. 二重积分中的变数更换

578. 平面区域的变换(185) 579. 例(188) 580. 曲线坐标中面积的表示法(193) 581. 补充说明(196) 582. 几何推演(198) 583. 例(200) 584. 二重积分中的变数更换(209) 585. 与单积分的相似处, 在定向区域上的积分(211) 586. 例(213)

§ 5. 广义二重积分

587. 展布在无界区域上的积分(220) 588. 广义二重积分的绝对收敛性定理(223) 589. 化二重积分为逐次积分(225) 590. 无界函数的积分(228) 591. 广义积分中的变数更换(230) 592. 例(232)

第二分册目录

第十七章 曲面面积·曲面积分

§ 1. 双侧曲面

593. 曲面的侧(249) 594. 例(251) 595. 曲面和空间的定向(252) 596. 法线方向
余弦公式中符号的选择(254) 597. 分片光滑曲面的情形(256)

§ 2. 曲面面积

598. 许瓦耳兹的例子(257) 599. 曲面面积的定义(259) 600. 附注(260) 601. 曲
面面积的存在及其计算(262) 602. 用内接多面形的接近法(267) 603. 面积定义
的特殊情况(269) 604. 例(270)

§ 3. 第一型曲面积分

605. 第一型曲面积分的定义(285) 606. 化为寻常的二重积分(286) 607. 第一型曲
面积分在力学上的应用(288) 608. 例(290)

§ 4. 第二型曲面积分

609. 第二型曲面积分的定义(297) 610. 最简单的特殊情况(299) 611. 一般情形
(302) 612. 证明的细节(304) 613. 用曲面积分表立体体积(305) 614. 斯托克斯
公式(310) 615. 例(312) 616. 斯托克斯公式在研究空间曲线积分上的应用(318)

第十八章 三重积分及多重积分

§ 1. 三重积分及其计算

617. 立体质量计算的问题(321) 618. 三重积分及其存在的条件(322) 619. 可积函
数与三重积分的性质(323) 620. 展布在平行六面体上的三重积分的计算(325) 621.
在任何区域上的三重积分的计算(327) 622. 广义三重积分(329) 623. 例(329)
624. 力学应用(337) 625. 例(338)

§ 2. 高斯-奥斯特洛格拉斯基公式

626. 高斯-奥斯特洛格拉斯基公式(346) 627. 高斯-奥斯特洛格拉斯基公式应用于
曲面积分的研究(349) 628. 高斯积分(350) 629. 例(352)

§ 3. 三重积分中的变数更换

630. 空间的变换及曲线坐标(355) 631. 例(356) 632. 曲面坐标下的体积表示法
(358) 633. 补充说明(361) 634. 几何推演(362) 635. 例(363) 636. 三重积分中
的变数更换(371) 637. 例(373) 638. 立体的吸引力及在内点上的位势(378)

(111)

§ 4. 場論初步

639. 純量及向量(380) 640. 純量場及向量場(381) 641. 梯度(381) 642. 向量通过曲面的流量(383) 643. 高斯-奥斯特洛格拉斯基公式·发散量(384) 644. 应用(386) 645. 向量的循环量·斯托克斯公式·旋度(389) 646. 应用(391)

§ 5. 多重积分

647. 两立体間的引力及位势問題(394) 648. n 維立体的体积· n 重积分(396) 649. n 重积分中的变数更換(398) 650. 例(402)

第三分册目录

第十九章 傅立叶级数

§ 1. 引言

651. 周期量与調和分析(425) 652. 欧勒-傅立叶确定系数法(428) 653. 正交函数系(431) 654. 三角插值法(435)

§ 2. 函数的傅立叶级数展开式

655. 問題的提出·第里希莱积分(439) 656. 第一基本预备定理(441) 657. 局部化定理(444) 658. 狄尼与李泼西茨的傅立叶级数收敛性的判别法(445) 659. 第二基本预备定理(448) 660. 第里希莱-雷当判别法(450) 661. 非周期函数的情形(452) 662. 任意区间的情形(454) 663. 只含余弦或正弦的展开式(455) 664. 例(459) 665. $\log T(x)$ 的展开式(473)

§ 3. 补充

666. 系数递减的级数(475) 667. 三角级数借助于复变数解析函数的求和法(482) 668. 例(485) 669. 傅立叶级数的复数形式(490) 670. 共轭级数(493) 671. 多重傅立叶级数(496)

§ 4. 傅立叶级数的收敛特性

672. 对于基本预备定理的几点补充(499) 673. 傅立叶级数一致收敛性的判别法(502) 674. 傅立叶级数在不連續点附近的性质;特殊情形(505) 675. 任意函数的情形(510) 676. 傅立叶级数的奇异性质·預先的說明(512) 677. 奇异性质的证法(516)

§ 5. 与函数可微分性相关的余部估值

678. 函数与其导数的傅立叶系数間之关系(518) 679. 在有界函数情形时部分和的估值(519) 680. 函数有 k 級有界导数时余部的估值(521) 681. 函数有有界变差的 k 級导数的情形(523) 682. 函数及其导数的不連續性对于傅立叶系数的无穷小阶的影响(526) 683. 在区间 $[0, \pi]$ 上給出函数时的情形(530) 684. 分离奇异性质法(532)

§ 6. 傅立叶积分

685. 傅立叶积分作为傅立叶级数的极限情形(540) 686. 預先的說明(542) 687. 充分判别法(544) 688. 基本假設的变形(546) 689. 傅立叶公式的各种形式(549) 690. 傅立叶变换(551) 691. 傅立叶变换的若干性质(554) 692. 例題与补充(556) 693. 二元函数的情形(562)

(iii)

§ 7. 应用

694. 用行星的平近点角所作出的它的偏近点角的表示式(564) 695. θ 函数的函数方程(566) 696. 弦振动的問題(567) 697. 在有限长杆上的热传导問題(571) 698. 无穷长杆的情形(574) 699. 极限条件的变形(576) 700. 在圆盘上的热传导(578) 701. 实用調和分析·十二个纵坐标的方法(580) 702. 例(582) 703. 二十四纵坐标的方法(585) 704. 例(587) 705. 傅立叶系数的近似值与精确值的比較(588)

第二十章 傅立叶級数(續)

§ 1. 傅立叶級数的运算·完全性与閉合性

706. 傅立叶級数的逐項积分法(591) 707. 傅立叶級数的逐項微分法(594) 708. 三角函数系的完全性(595) 709. 函数的一致近似法·维尔史特拉斯定理(597) 710. 函数的平均近似法·傅立叶級数的部分和的极端性质(600) 711. 三角函数系的閉合性·李雅普諾夫定理(604) 712. 广义閉合性方程(607) 713. 傅立叶級数的乘法(610) 714. 閉合性方程的若干应用(611)

§ 2. 发散級数的求和法

715. 引言(617) 716. 幂級数法(619) 717. 陶伯尔定理(621) 718. 算术平均法(624) 719. 普安松-亚培尔法与齐查罗法的相互关系(626) 720. 哈第-蓋謗定理(628) 721. 广义求和法在級数乘法上的应用(630) 722. 一般的綫性求和法类(632)

§ 3. 求和法在傅立叶級数上的应用

723. 基本預备定理(635) 724. 傅立叶級数的普安松-亚培尔求和法(637) 725. 关于圓的第里希萊問題的解(641) 726. 傅立叶級数的齐查罗-費叶尔求和法(643) 727. 傅立叶級数广义求和法的若干应用(645) 728. 傅立叶級数的逐項微分法(647)

§ 4. 函数的三角展开式的唯一性

729. 关于广义导数的輔助命題(649) 730. 三角級数的黎曼求和法(653) 731. 关于收敛級数的系数的預备定理(657) 732. 三角展开式的唯一性(658) 733. 关于傅立叶級数的最后的定理(660) 734. 推广(663)

俄中名詞对照表

第十五章 曲綫积分 · 斯底尔吉斯积分

§1 第一型曲綫积分

517 第一型曲綫积分的定义 为了很自然地得出这一新的概念，我們来考察一个能导出它的力学問題。

設已給一連續的可求长平面* 曲綫(K)(图 1)，在它上面分布有质量，且在曲綫上所有的点 M 处其綫性密度 $\rho(M)$ 为已知，要求确定整个曲綫(K)的质量 m 。

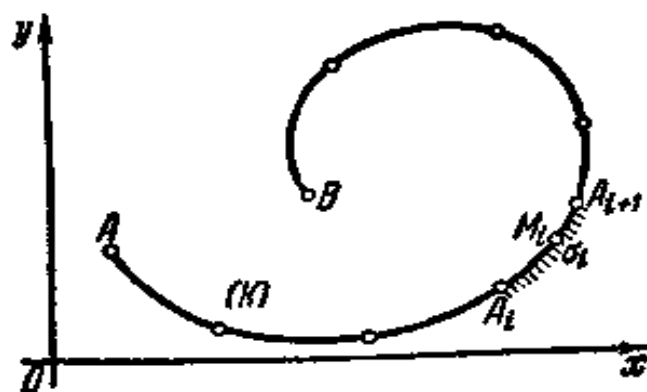


图 1

为达此目的，在曲綫端点 A 与 B 間任意地插入一系列点 $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ (为使記号对称，命 A_0 与 A 相合， A_n 与 B 相合)。为了明确起見，我們认为这些点是从 A 到 B 記数的[参看 317**]，但是，將它們以相反的方向記数也可以。

在曲綫的弧 $A_i A_{i+1}$ 上任取一点 M_i ，算出这一点处的密度 $\rho(M_i)$ 。近似地认为在这一小段弧上所有点处的密度都是这样的，并以 σ_i 表弧 $A_i A_{i+1}$ 的长，对这一弧的质量 m_i 我們將有近似表示式

* 今后为简单計，我們只討論平面曲綫，整个所述的东西不必改变就可移到空間曲綫的情形。

** 参看关于本书第一卷及第二卷时，均以原书的中譯本为准——譯者。

$$m_i \doteq \rho(M_i)\sigma_i,$$

而对整个所求的质量,将有近似式子

$$m \doteq \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\sigma_i.$$

这一式子的误差与上面所作的近似假定是有关的;如所有小段的长 σ_i 趋近于零时,这误差也将趋近于零。因此,如以 λ 表长 σ_i 中最大的一个,只要变到极限就得到准确的公式:

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\sigma_i.$$

现在开始一般地来研究这一类型的极限。丢开上面的问题不谈,取一任意“点函数” $f(M) = f(x, y)$, 它是在一连续的可求长平面曲线 (K) 上给出的*, 并重复上述手续: 分曲线 (K) 为许多弧元 $A_i A_{i+1}$, 在它们上面任取点 $M_i(\xi_i, \eta_i)$, 计算出在这些点处的值 $f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i)$, 并作和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\sigma_i;$$

它亦代表一定类型的“积分和”。

当 $\lambda = \max \sigma_i$ 趋近于零时,如这一积分和有一确定的有限极限 I , 既与曲线 (K) 细分的方法无关, 又与小段 $A_i A_{i+1}$ 上点 M_i 的选择无关, 则这一极限称作函数 $f(M) = f(x, y)$ 沿曲线或道路 (K) 上所取的(第一型**)曲线积分, 并以记号

$$I = \int_{(K)} f(M) ds = \int_{(K)} f(x, y) ds \quad (1)$$

来表示(其中 s 是曲线的弧长, ds 就象征长度元 σ_i)。极限过程的精确说明留给读者。

因此,上面所得曲线质量的式子可重写为:

* 这里假定某一直角坐标系取作基础。

** 以示与下面[521]所讨论的第二型曲线积分不同。

$$m = \int_{(K)} \rho(M) ds. \quad (2)$$

特别注意, 給道路 (K) 所加的方向在所介紹的定义中不起任何作用。例如若这一曲线不是閉的, 且以 (AB) 及 (BA) 作为不同方向的曲线, 則

$$\int_{(AB)} f(M) ds = \int_{(BA)} f(M) ds.$$

类似地, 我們可以引导散布在空間曲线 (K) 上的积分概念:

$$\int_{(K)} f(M) ds = \int_{(K)} f(x, y, z) ds. *$$

由于没有什么新的原則性东西, 沒有必要在这里詳談。

518 約化为普通定积分 假定在曲线 (K) 上任意取定一方向(两个可能方向之一), 曲线上点 M 的位置可由从一点 A 量起的弧长 $s = \overline{AM}$ 来确定。那末曲线 (K) 可表为参数方程的形状:

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (0 \leq s \leq S),$$

而在曲线上給出的函数 $f(x, y)$ 便化成变量 s 的复合函数 $f(x(s), y(s))$ 。

对应于在 AB 弧上所选取的分点 A_i , 其弧的值如表为 $s_i (i = 0, 1, \dots, n)$, 則显然 $\sigma_i = s_{i+1} - s_i = \Delta s_i$ 。以 $\bar{s}_i$ 表定点 M_i 的 s 值(而且显然, $s_i \leq \bar{s}_i \leq s_{i+1}$), 可以看到曲线积分的积分和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x(\bar{s}_i), y(\bar{s}_i)) \Delta s_i$$

同时也是普通定积分的积分和, 所以立刻有:

$$\int_{(K)} f(M) ds = (R) \int_0^S f(x(s), y(s)) ds^{**}, \quad (3)$$

且这两积分中只要有一个存在, 另一个就也存在。

当然, 这种直接由第一型曲线积分約化为普通的积分会降低它

* 某一直角坐标系将取作基础。函数 f 仅在曲线 (K) 的点处有定义。

** 符号 (R) 表示, 积分这里是了解为通常黎曼定义下的积分。

的理論价值,但在方法上的价值它仍全部保存着。

我們以后将假定函数 $f(M)$ 是連續的*, 显然在这种情形下积分是存在的。

令設一曲綫(K)由任意的参数方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t_0 \leq t \leq T)$$

所給出, 其中函数 φ 及 ψ 与它們的导数 φ' 及 ψ' 都連續; 此外, 假定曲綫上无重点。那么曲綫就是可求长的, 且若弧 $s = \widehat{AM} = s(t)$ 的增加对应于参数 t 的增加, 則

$$s'_t = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

[320, 321]。在(3)的右端的积分中换变数, 立刻得到:

$$\int_{(K)} f(M) ds = \int_{t_0}^T f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (4)$$

因此, 在計算第一型曲綫积分时, 在积分号下的函数中, 变量 x 及 y 應該用坐标的参数表示式来代替, 至于因子 ds , 應該把弧当作参数的函数而用这函数的微分来代替。特別指出, 定积分(4)的下限必須小于上限。

在曲綫以显方程

$$y = y(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

給出时, 公式(4)的形状是:

$$\int_{(K)} f(M) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx. \quad (5)$$

这一关系式也可有另一形式。在函数 $y(x)$ 与它的导数 $y'(x)$ 連續的假定下, 曲綫(K)在每一点处都有一不平行于 y 軸的确定切綫。以

* 我們是指在曲綫(K)上的点处連續, 也就是指沿着曲綫連續。用“ ϵ - δ ”的說法, 这就是說: 对 $\epsilon > 0$ 能找到这样的 $\delta > 0$, 使当 $\overline{MM'} < \delta$ 时就有 $|f(M') - f(M)| < \epsilon$ (M 及 M' 是曲綫上的点)。在这一假定下, 复合函数 $f(x(s), y(s))$, 由于 $x(s)$ 及 $y(s)$ 是連續的緣故, 也同样是 s 的連續函数。

α 表切线与 x 轴的夹角, 我們得到:

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(x), \quad |\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}.$$

故

$$\int_{(K)} f(M) ds = \int_a^b \frac{f(x, y(x))}{|\cos \alpha|} dx. \quad (6)$$

如用 S 表示整个曲线 (AB) 的长, 因为显然

$$\int_{(K)} ds = S,$$

所以特别地有

$$S = \int_a^b \frac{dx}{|\cos \alpha|}. \quad (7)$$

附注 公式(7)是經形式的变换得来的。如果我們定义曲线弧长为外切(不是内接)折线周长的极限, 則这一定义——在曲线以显式給出时——立即可得出公式(7)。讀者不妨自己来证实这一点。

519 例 1) 若 (K) 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在第一象限内的部分, 計算积分 $I = \int_{(K)} xy ds$.

解 (a) 我們有

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 - x^2}}.$$

所以由公式(5),

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a x \cdot \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 - x^2}} dx = \\ &= \frac{b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} \cdot x dx. \end{aligned}$$

进行积分, 得:

$$I = \frac{-b}{2a^2(a^2 - b^2)} \cdot \frac{2}{3} [a^4 - (a^2 - b^2)x^2]^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{ab}{3} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}.$$

应该注意, 上面做的計算事实上还要有所說明才行, 因为当 $x = a$ 时切线斜率变为无穷

大。下一解法就没有这一缺点。

(6) 如变到椭圆的参数表示 $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, 故

$$x'_t = -a \sin t, \quad y'_t = b \cos t, \quad \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.$$

则可按公式(4)来进行计算:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \cdot b \sin t \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \cdot \sqrt{a^2 \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} + b^2 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2}} dt. \end{aligned}$$

这里令 $\cos 2t = z$, 则 $\sin 2t dt = -\frac{1}{2}dz$, 且

$$\begin{aligned} I &= \frac{ab}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2} z} dz = \\ &= \frac{ab}{4} \cdot \frac{2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{2}{3} \left[\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2} z \right]^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^1 = \frac{ab}{3} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}. \end{aligned}$$

2) 计算积分 $I = \int_{(K)} y ds$, 其中 (K) 是抛物线 $y^2 = 2px$ 上自坐标原点到点 (x_0, y_0) 的

一段。

解 由曲线的方程, 我们有 $yy' = p$, 所以

$$y ds = y \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{y^2 + y^2 y'^2} dx = \sqrt{p^2 + 2px} dx,$$

且

$$I = \int_0^{x_0} \sqrt{p^2 + 2px} dx = \frac{1}{3p} [(p^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}} - p^3].$$

3) 计算积分 $I = \int_{(A)} (x^2 + y^2) ds$, 其中 (A) 是联结点 (a, a) 及 (b, b) 的直线段 ($b > a$)。

提示 直线方程: $y = x$. 答 $\frac{2\sqrt{2}}{3}(b^3 - a^3)$.

4) 计算积分 $K = \int_{(C)} ye^{-x} ds$, 其中 (C) 是曲线

$$x = \log(1+t^2), \quad y = 2 \operatorname{arctg} t - t + 3$$

在点 $t=0$ 及 $t=1$ 间的一段。

提示 $\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = 1$,

$$K = \int_0^1 \frac{2 \arctan t - t + 3}{1+t^2} dt = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \log 2 + \frac{3\pi}{4}.$$

5) 常见曲线中一大部分(椭圆、双曲线、正弦曲线、双曲线等)其弧长不能表作初等函数, 因为它们的 ds 不能积分为有限型。然而, 对这种曲线, 积分 $\int_{(K)} f(x, y) ds$ 往往算出来是初等函数[例如, 参看例 1)], 因为与因子 $f(x, y)$ 联在一起时, 积分号下微分式的整个构造改变了。读者不妨做一些积分 $\int_{(K)} f(x, y) ds$ 的例题, 积分取在正弦曲线 $y = \sin x$ 或双曲线 $xy = 1$ 上但又可表作初等函数者。

6) 计算积分 $I = \int_{(C)} xyz ds$, 其中 (C) 是曲线 $x = t$, $y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}$, $z = \frac{1}{2}t^2$ 在点 $t=0$ 及 $t=1$ 间的弧。

解 $ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt = (1+t)dt,$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^1 t^{\frac{9}{2}} (1+t) dt = \frac{16\sqrt{2}}{143}.$$

7) 当曲线 (K) 用极坐标方程 $r = r(\theta)$ ($\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$) 给出时, 试求计算积分

$$I = \int_{(K)} f(x, y) ds$$

的一公式。

答 $I = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta.$

8) 若 (K) 是双曲线 $r\theta = 1$ 自 $\theta = \sqrt{3}$ 到 $\theta = 2\sqrt{2}$ 的一段, 试计算积分

$$H = \int_{(K)} \frac{ds}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

答 $\frac{19}{3}.$

9) 试求曲线 $y = \log x$ 在有横坐标 x_1 及 x_2 的两点间这一段的质量, 设曲线在每点处的(线性)密度等于该点横坐标的平方。

解 由公式(2), 因为在我们的情形下 $\rho = x^2$, 故有:

$$m = \int_{x_1}^{x_2} x^2 ds. \text{ 但 } ds = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx, \text{ 所以}$$

$$m = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+x^2} \cdot x dx = \frac{1}{3} \left[(1+x_2^2)^{\frac{3}{2}} - (1+x_1^2)^{\frac{3}{2}} \right].$$

10) 試求悬鏈綫 $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ 在点 $x=0$ 及 $x=a$ 間一段的质量, 設曲綫在每点的密度与該点的纵坐标成反比。

提示 $\rho = \frac{k}{y}$, $ds = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = \frac{y}{a} dx$, $m = k$.

与連續地分布在曲綫上的质量相关的其它問題, 很自然地也可变成上面所考察类型的曲綫积分。

11) 在第十章中 [340] 我們討論过平面曲綫对坐标軸的靜矩的計算, 以及它的重心坐标的計算, 那时假定“綫性密度” $\rho = 1$, 讀者不难推广那里所得的公式到质量連續分布的一般情形。如引用曲綫积分概念时, 則結果可写作下面形状:

$$M_y = \int_{(K)} \rho x ds, \quad M_x = \int_{(K)} \rho y ds,$$

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_{(K)} \rho x ds}{\int_{(K)} \rho ds}, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_{(K)} \rho y ds}{\int_{(K)} \rho ds}.$$

12) 我們还說明第一型曲綫积分的一个应用——应用到有质量的曲綫对一质点引力的問題。

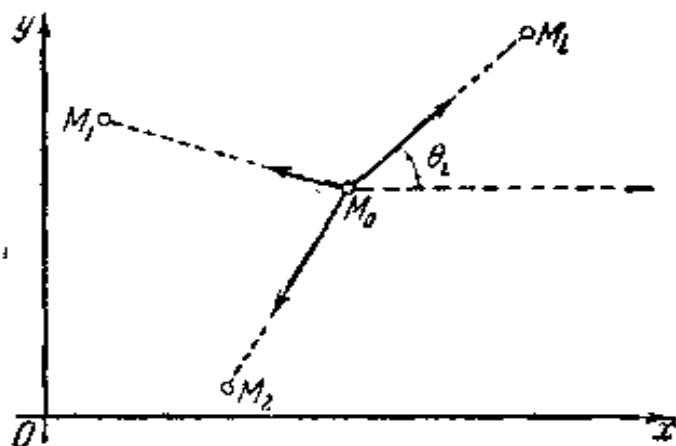


图 2

大家都知道, 按牛頓定律, 质量 m_0 的质点 M_0 对质量 m 的质点 M 的吸引力, 方向是从 M_0 到 M , 大小等于 $k \cdot \frac{m_0 m}{r^2}$, 其中 r 是距离 $M_0 M$, 而 k 是与测量的基本单位选择有关的一系数; 并且为了簡單起见, 我們常认为它等于一。

設点 M_0 被一质点系 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 所吸引, 它們的质量是 $m_1, m_2, \dots, m_n$, 則

将各个点对 M_0 的吸引力几何地相加, 就得到合力。同时, 合力在坐标軸上的射影等于各个力射影的代数和。

如以 X 及 Y 表合力在坐标軸上的射影, 且以 θ_i 表向量 $\vec{r}_i = \overrightarrow{M_0 M_i}$ 与 x 軸間的夹角, 則显然,

$$X = \sum_{i=1}^n \frac{m_0 m_i}{r_i^2} \cos \theta_i, \quad Y = \sum_{i=1}^n \frac{m_0 m_i}{r_i^2} \sin \theta_i;$$

(与寻常一样, 其中 r_i 表向量 $\vec{r}_i$ 的长)。

现在设吸引质点的质量连续地分布在一曲线(K)上。为要找出吸引力, 我们分曲线为许多小段, 将每一小段的质量集中在它上面任意取定的一点 M_i 处后, 我们就求出合力在坐标轴上射影的近似值:

$$X \doteq \sum_i \frac{m_0 \rho(M_i) \sigma_i \cos \theta_i}{r_i^2}, \quad Y \doteq \sum_i \frac{m_0 \rho(M_i) \sigma_i \sin \theta_i}{r_i^2},$$

因为这时各个小段其质量近似地等于 $\rho(M_i) \sigma_i$, 如令所有的 σ_i 趋近于零, 则取极限后就得到准确的等式, 且这时和就被积分所代替了:

$$X = m_0 \int_{(K)} \frac{\rho(M) \cos \theta}{r^2} ds, \quad Y = m_0 \int_{(K)} \frac{\rho(M) \sin \theta}{r^2} ds, \quad (8)$$

这里 r 表向量 $\vec{r} = \vec{M_0 M}$ 的长, 而 θ 表它与 x 轴的夹角。

13) 试求一均匀半圆 ($\rho=1$) 对位于其中心的一单位质量的吸引力。

解 将坐标原点放在圆心, 通过半圆端点作横轴(图 3)。

由对称性, $X=0$, 所以只要求出射影 Y 好了。由公式(8),

$$Y = \int \frac{\sin \theta}{r^2} ds.$$

但在现在的情况下 $r=R$ (半圆的半径) 且 $ds=Rd\theta$, 故

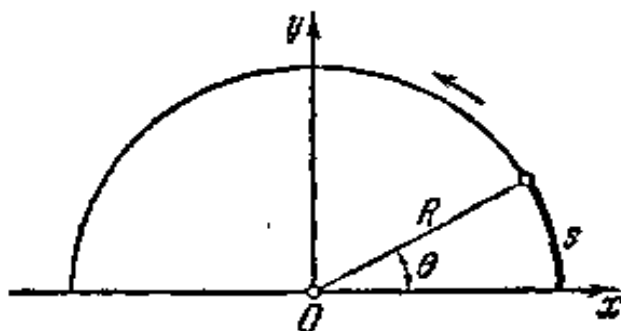


图 3

$$Y = \frac{1}{R} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \frac{2}{R}.$$

14) 一单位质量的点 ($m_0=1$) 与一无穷的均匀直线 ($\rho=1$) 的距离为 h , 求直线对这一点的引力。

解 将所求的引力当作由所述直线上有限线段所生引力的极限, 假设这一线段的端点在两头变到无穷远去。如将直线本身取作 x 轴, 而 y 轴通过已知点, 则得(考虑在所给的情况下 $ds=dx$)

$$Y = -h \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{h} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{2}{h}.$$

同样, $X=0$ (但由对称性这很明显)。

15) 试求星形线 $x=a \cos^3 t$, $y=a \sin^3 t$ 在第一象限内的弧对位于坐标原点的单位质

量所生的引力, 設曲綫在每一点的密度等于这一点到坐标原点距离的立方。

$$\text{答 } X = Y = \frac{3x^2}{5}$$

§ 2 第二型曲綫积分

520 力場中功的問題 我們轉而討論在实际上更为重要的第二型曲綫积分的概念, 这里还是从一个力学問題出发。

設在 xy 平面(或平面的一确定部分)的任一点 M 如放一单位质量, 就有一确定的力 $\vec{F}$ 作用于它, 这个力的大小与方向只与点 M 的位置有关; 如放在 M 的质点其质量 m 不等于一, 則作用于它的力就等于 $m\vec{F}$ 。在这种情形下 xy 平面(或所考察的一部分)称作(平面)力場, 而作用于单位质量的力 $\vec{F}$ 称作場的引力。給出力 $\vec{F}$ 的大小与方向相当于給出它在坐标軸上的射影 X, Y , 显然射影是点 M 的坐标 x, y 的函数

$$X = X(x, y), Y = Y(x, y).$$

現在假定, 位于場中的质点 $M(x, y)$ (有单位质量者)运动, 且以一确定的方向描出某一連續曲綫(K)。我們的問題是在这一运动中場的力所做的功 A 如何計算。

假如作用于点的力保持一常值 F 且保持一固定方向, 而点的位移本身以直綫进行, 則大家都知道, 功 A 可表为位移 l 与力在位移方向上射影的乘积:

$$A = Fl \cos \theta,$$

其中 θ 是力 $\vec{F}$ 与位移方向間的夹角。

在非直綫运动以及非常数力的情况下, 功要借某一极限过程来确定[比照 344]。例如, 我們可以这样来理解。在点的軌道曲綫內, 內接一多角形折綫, 并确定当沿这一折綫运动时場的力所做的功。这时不計力在折綫的同一段上的变化, 所以問題就变成上述的直綫运动以及常数力的最簡單情形了。所得的式子当作所求功 A 的近似值。它的准确值, 总是这样, 可以用一极限过程即当折綫的所有各段趋近于零

时*就能得到。

根据所述的计划, 现在来进行功 A 的计算。以 A 表轨道 (K) 的起点, B 表终点 (这里当然, 哪一点取作起点, 哪一点取作终点, 不能随便)。用自 A 到 B 方向排好的点

$$A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$$

来分曲线 AB 为许多部分。为使记号对称, 将 A, B 写作 A_0, A_n , 而它们的坐标分别表为 x_0, y_0 及 x_n, y_n 。最后, 作曲线 (K) 的内接折线, 以上述各点为接續顶点。

为了要确定通过小段 $A_i A_{i+1}$ 时的功 A_i , 我们设这时力 $\vec{F}$ 大小与方向都保持不变, 例如与点 A_i 处的情形相同。如以 F_i 表力在这一点的大小, θ_i 表小段的方向 $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ 与力的方向间的夹角, 则元素功 A_i 将 (近似地) 等于

$$A_i \doteq F_i \cdot A_i A_{i+1} \cdot \cos \theta_i.$$

引进 x 轴与力 $\vec{F}_i$ 间夹角 α_i 以及 x 轴与小段 $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ 间

夹角 β_i , 则 (图 4) $\theta_i = \alpha_i - \beta_i$ 。在 A_i 的表示式中令

$$\cos \theta_i = \cos \alpha_i \cos \beta_i + \sin \alpha_i \sin \beta_i,$$

它就可改写作形状

$$F_i \cos \alpha_i \cdot A_i A_{i+1} \cos \beta_i + F_i \sin \alpha_i \cdot A_i A_{i+1} \sin \beta_i.$$

但是不难看出, $F_i \cos \alpha_i$ 及 $F_i \sin \alpha_i$ 是力 $\vec{F}_i$ 在坐标轴上的射影, 所以

$$F_i \cos \alpha_i = X_i = X(x_i, y_i), F_i \sin \alpha_i = Y_i = Y(x_i, y_i).$$

同样, 式子 $A_i A_{i+1} \cos \beta_i$ 及 $A_i A_{i+1} \sin \beta_i$ 是线段 $\overline{A_i A_{i+1}}$ 在坐标轴上的射

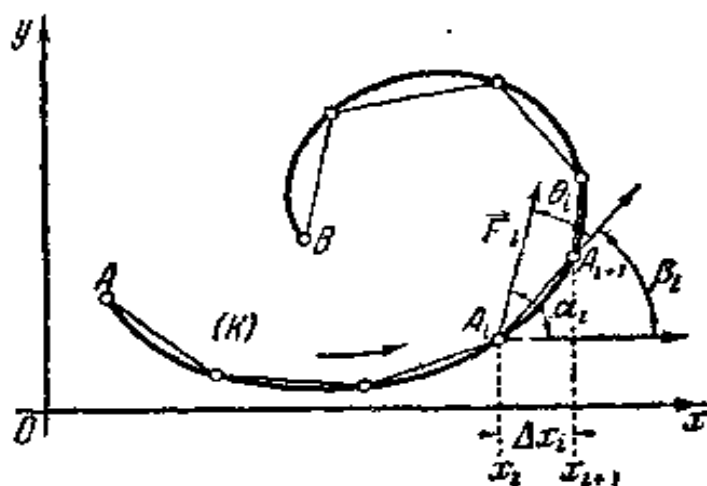


图 4

* 在闭曲线的情形时更正确的说法是: 当所有的部分弧的直径趋近于零时 [参看 318]。

影, 故它們分別等于

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i,$$

$$y_{i+1} - y_i = \Delta y_i.$$

最后, 得到元素功 A_i 的表示式

$$A_i \doteq X(x_i, y_i) \Delta x_i + Y(x_i, y_i) \Delta y_i.$$

将这些元素功相加, 得所求場力的全部功的近似值:

$$A \doteq \sum_{i=0}^{n-1} X(x_i, y_i) \Delta x_i + Y(x_i, y_i) \Delta y_i.$$

如已說过的, 变到极限, 得功的准确值:

$$\begin{aligned} A &= \lim \sum_{i=0}^{n-1} X(x_i, y_i) \Delta x_i + Y(x_i, y_i) \Delta y_i = \\ &= \lim \sum_{i=0}^{n-1} X(x_i, y_i) \Delta x_i + \lim \sum_{i=0}^{n-1} Y(x_i, y_i) \Delta y_i. \end{aligned} \quad (1)$$

521 第二型曲綫积分的定义 現在我們脫离开力学中功的問題, 而詳尽地研究所得极限的构造。首先来討論第一个极限。

設沿一連續曲綫 (AB) 已知某一函数 $f(M) = f(x, y)^*$. 用点 A_i 分曲綫为許多部分后, 在曲綫段 $\overline{A_i A_{i+1}}$ 上取一任意点 $M_i(\xi_i, \eta_i)$, 并計算出函数在这点的值 $f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i)$; 再作一和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i.$$

[在第 520 目所考察的問題中, 我們是取的函数 X 在弧 $\overline{A_i A_{i+1}}$ 的起点处的值, 但这并不是非如此不可的。]

如当 $\mu = \max \overline{A_i A_{i+1}}^{**}$ 趋近于零时, 这一和有一有限极限 I , 既与曲綫細分的方法无关, 又与点 M_i 的选择无关, 則这一极限称为 $f(M)dx$

* 參看第 2 頁底注*。

** 參看第 11 頁底注。

沿曲綫或道路(AB)的(第二型)曲綫积分,用記号表为

$$I = \int_{(AB)} f(M) dx = \int_{(AB)} f(x, y) dx. \quad (2)$$

同样,将值 $f(M_i)$ 不乘上 Δx_i 而乘上 Δy_i , 并作和

$$\sigma^* = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \Delta y_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i,$$

我們得到它的极限,即 $f(M)dy$ 的(第二型)曲綫积分:

$$I^* = \int_{(AB)} f(M) dy = \int_{(AB)} f(x, y) dy. \quad (2^*)$$

如沿曲綫(AB)定义有两个函数 $P(M) = P(x, y)$, $Q(M) = Q(x, y)$, 且积分

$$\int_{(AB)} P(M) dx = \int_{(AB)} P(x, y) dx, \quad \int_{(AB)} Q(M) dy = \int_{(AB)} Q(x, y) dy$$

都存在,則它們的和就称为(“一般形状的”)曲綫积分,并令

$$\int_{(AB)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{(AB)} P(x, y) dx + \int_{(AB)} Q(x, y) dy.$$

用这种記号,当点沿曲綫(AB)位移时力場的功的公式(1)現在可以写为形状

$$A = \int_{(AB)} X(x, y) dx + Y(x, y) dy. \quad (3)$$

現在我們来比較第二型曲綫积分(2)[或(2*)]的定义与第一型曲綫积分的定义[參看 517(1)]。除显然的类似地方外这两个定义有实质上的不同:在第一型积分的情形下,当形成积分和时,函数值 $f(M_i)$ 乘以曲綫段 $A_i A_{i+1}$ 的长 $\sigma_i = \Delta s_i$, 在第二型积分的情形下,这个值 $f(M_i)$ 乘以这一段在 x 軸(或 y 軸)上的射影 Δx_i (或 Δy_i)。

我們已經看到过,积分进行所沿道路(AB)的方向在第一型积分的

情形下不起作用, 因为弧 $\overline{A_i A_{i+1}}$ 的长 σ_i 与这一方向无关。然而第二型积分的情形就不同了: 所述弧段在任一轴上的射影与弧的方向大有关系, 方向变为反向时, 射影也变号。因此, 对第二型积分有

$$\int_{(BA)} f(x, y) dx = - \int_{(AB)} f(x, y) dx,$$

同样,

$$\int_{(BA)} f(x, y) dy = - \int_{(AB)} f(x, y) dy,$$

且右端积分的存在就能推出左端积分的存在, 反过来也是如此。

用类似的方法可以引导散布在空间曲线 (AB) 上的第二型曲线积分的概念。即, 如在这一曲线上给出一函数 $f(M) = f(x, y, z)$, 则与上面一样, 作和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i,$$

并当 $\mu = \max A_i A_{i+1}^*$ 趋近于零时考察它的极限。如这一极限存在, 则它称为 $f(M) dx$ 的(第二型)曲线积分, 并用记号表为

$$\int_{(AB)} f(M) dx = \int_{(AB)} f(x, y, z) dx.$$

同样地定义有下列形状的积分:

$$\int_{(AB)} f(M) dy = \int_{(AB)} f(x, y, z) dy,$$

$$\int_{(AB)} f(M) dz = \int_{(AB)} f(x, y, z) dz.$$

最后, 考察(“一般形状”)积分

$$\int_{(AB)} P dx + Q dy + R dz = \int_{(AB)} P dx + \int_{(AB)} Q dy + \int_{(AB)} R dz.$$

这里同样, 积分的方向改变就使积分的符号也改变。

* 再参看第 11 页底注。

最后注意,通常定积分的最简单性质[290, 291]容易移到所考察的曲线积分上来,关于这一点这里不讨论了。

522 第二型曲线积分的存在与计算 设已知曲线 $(K) = (AB)$ 的参数方程为

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (4)$$

且函数 φ 及 ψ 连续, 又当参数 t 自 α 变到 β 时曲线以自 A 到 B 的方向描动。我们也假定函数 $f(x, y)$ 沿曲线 (AB) 连续。

如谈到积分(2)时,我们还更假定导数 $\varphi'(t)$ 存在且连续。

在这些假定下曲线积分(2)存在,且有等式

$$\int_{(AB)} f(x, y) dx = (R) \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (5)$$

因此,在计算曲线积分(2)时,应在积分号下的函数中将变数 x 及 y 用它们的参数表示式(4)代替,而因子 dx 应当把变数 x 当作参数的函数而用这函数的微分来代替。最后一积分中,积分上下限次序的安排在这里要看曲线方向的选择。

下面我们来证明。在曲线上取由参数值 $t_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 所决定的点 A_i , 在弧 $A_i A_{i+1}$ 上选取一点 M_i , 它的参数值是 τ_i (显然 τ_i 在 t_i 与 t_{i+1} 之间)。那末积分和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i,$$

当我们考虑到

$$\Delta x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t) dt$$

时,它就可改写为

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t) dt$$

的样子。另一方面, (5)中右端的积分*可表作和的形状:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt.$$

于是,

$$\sigma - I = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t))] \varphi'(t) dt.$$

在给定一任意的 $\varepsilon > 0$ 后, 现在假定所有的 Δt_i 非常小, 使在区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 上連續函数 $f(\varphi(t), \psi(t))$ 的振動 $< \varepsilon$ 。因为連續函数 $\varphi'(t)$ 是有界的 $|\varphi'(t)| \leq L$, 所以我們就会有

$$|\sigma - I| < \varepsilon L |\beta - \alpha|.$$

因此, 当量 $\lambda = \max |\Delta t_i|$ 趋近于 0 时**,

$$\lim \sigma = I,$$

这同时既证明了曲綫积分的存在, 又证明了所要求的等式。

容易看到, 这一推理不加什么本质上的变动就可放到函数 $\varphi(t)$ 仅有分段連續的导数情形上去。

对于积分(2*), 当导数 $\psi'(t)$ 連續(或仅仅分段連續)时, 用同样的方法可得知它的存在, 且可证明公式

$$\int_{(AB)} f(x, y) dy = (R) \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt. \quad (5^*)$$

最后, 如談到一般形状的面积

$$\int_{(AB)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

而其中 P 及 Q 为連續函数时, 則对曲綫(AB)我們就加以一条件,

* 因为积分号下的函数連續, 积分显然存在。

** 这就相当于各小段弧的直徑中最大者趋近于 0 或(在非閉曲綫的情况下)最大的弦趋近于 0 [316]。

就是两函数 (4) 有連續或至少有分段連續的导数。在这一假定下公式

$$\begin{aligned} \int_{(AB)} Pdx + Qdy &= \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]dt \quad (6) \end{aligned}$$

就成立。

曲綫积分的定义与这里所示的化它为普通定积分的方法也可直接推广到曲綫(4)自身相交的情形, 只要它上面的方向与前面一样由参数 t 单调地自 α 变到 β 而确定。

末了我們来说明曲綫积分計算起来特別簡單的若干情形。設积分 (2) 取在一曲綫上, 这曲綫是用显方程

$$y = y(x)$$

給出的, 且当 x 自 a 变到 b 时点自 A 位移到 B 。那末, 对曲綫除連續外不加任何假定, 就有

$$\int_{(AB)} f(x, y)dx = (R) \int_a^b f(x, y(x))dx. \quad (7)$$

同样, 如果积分 (2*) 散布在一連續曲綫上, 这曲綫仍由显方程給出, 但是另一种样子:

$$x = x(y)$$

(其中 y 由 c 变到 d), 則

$$\int_{(AB)} f(x, y)dy = (R) \int_c^d f(x(y), y)dy. \quad (7^*)$$

最后, 如果积分 (2) 散布在平行于 y 軸的一直綫段上, 則它等于 0 (因为在这种情形下, 所有的 Δx_i 因此同时所有的和 σ 都等于 0)。同样, 积分 (2*) 取在平行于 x 軸的一直綫段上时也等于零。

如积分道路(K)可分成有限段彼此相接的曲线, 沿每一曲线各个曲线积分存在且可以用上面所示公式之一来计算, 则很容易证明, 沿整个曲线(K)的积分存在, 且等于沿它各部分积分的和。

523 闭路的情形·平面的定向 整个上面所述的包括着点 A 与 B 重合的情形, 即闭路的情形。我们来更详细地讨论这一情形。

首先我们注意, 积分的存在与否及它的大小与在路线上取哪一点作为积分道路的起点(同时也作为终点)无关。

事实上, 如 A 及 A' 是闭合路线上任意两点, 则自 A 点出发又回到 A 点的积分(以图 5 中箭头所示的方向)相当于沿弧段 AMA' 及 $A'NA$ 依次积分:

$$\int_{(AMA'NA)} = \int_{(AMA')} + \int_{(A'NA)}.$$

但在颠倒右端的两项后, 我们得到:

$$\int_{(AMA'NA)} = \int_{(A'NA)} + \int_{(AMA')} = \int_{(A'NAAMA')},$$

这就是所要证明的。

我们所考察的情况的特点是: 指定了起点及(与它相重的)终点, 并



图 5

不能确定曲线(K)描动的方向。在每一情况下都要特别说明是取的哪一个方向。在谈到空间曲线时也必须同样说明。而在平面闭路(K)的情况下通常用别的方法来说明。

在所给平面的两可能转动方向——“反时针向”及“顺时针向”——

中, 取一个算作正的: 这样就构成了确定的平面的定向。如反时针向算作正的, 则平面的定向称作右手的, 在另一种情形下, 就称作左手的。

在平面的右手定向的情形下, 我们就令反时针向转动作为简单闭

路的正向的定义(图 6, a)。实在说来, 这一定义仅对近似于圆周的闭路才非常清楚。故更正确地我们应当这样规定: 当一人沿(简单)闭路循一方向环行时, 如由闭路所围的区域靠近观察者的部分总是在观察者的左手边时, 这一方向就称为曲线的正向(图 6, a)。在平面的左手定向的情形下, 顺时针向环行闭路就是正的, 所以区域总是在观察者的右手边(图 6, b)。

我们注意, 平面中坐标轴本身的安排恒与平面的定向有联系: 在

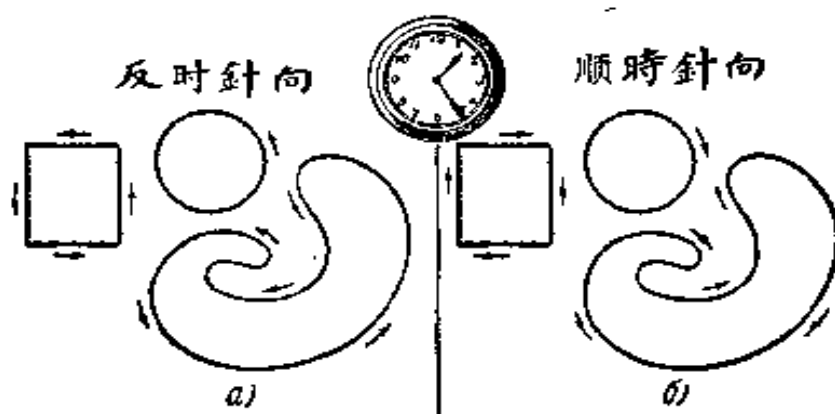


图 6

平面的右手定向时, 将 x 轴按反时针向转 90° 就得到 y 轴; 而在左手定向时, 就要按顺时针向转(参看图 7, a, b)。在第一种情况下, 坐标系本身也称为右手的, 而在第二种情况下, 称为左手的。

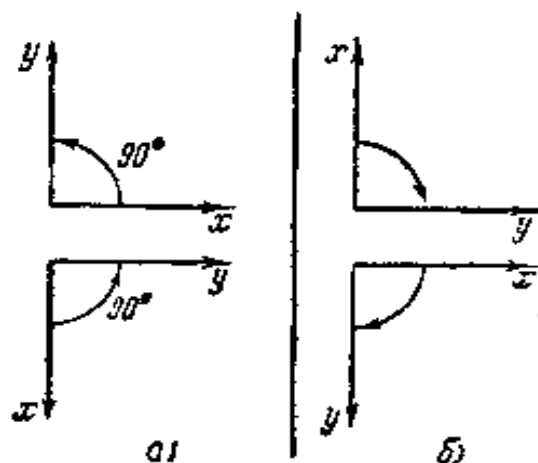


图 7

在作这些说明后, 今后我们永远这样规定好: 如积分道路(K)是一简单闭曲线, 则当记号

$$\int_{(K)} Pdx + Qdy$$

没有指明闭路环行的方向时, 我们恒认

为它是沿正向所取的积分。当然, 这一规定并没有限制我们必要时考察沿负向取积分, 不过我们用

$$- \int_{(K)} Pdx + Qdy$$

来表示它罢了。

524 例 1) 假如 (K) 是抛物线 $y=x^2$ 自横坐标 $x=0$ 的点到横坐标 $x=2$ 的点的一段, 试求积分 $I = \int_{(K)} (x^2 - y^2) dx$.

解 因为积分的曲线是用显方程给出的, 故可应用公式(7); 得

$$I = \int_0^2 (x^2 - x^4) dx = -\frac{56}{15}.$$

2) 求积分 $J = \int_{(K)} (x^2 - y^2) dy$, 其中 (K) 代表上题中的曲线。

解 这里应该利用公式(7*)。注意由曲线方程知 $x^2=y$ 且 y 的变动范围是 0 到 4, 我们有

$$J = \int_0^4 (y - y^2) dy = -\frac{40}{3}.$$

3) 计算取在联结点 $O(0,0)$ 与 $A(1,1)$ 的一道路 (L) 上的曲线积分

$$H = \int_{(L)} 2xy dx + x^2 dy$$

的值, 如道路 (L) 是: (a) 直线 $y=x$, (b) 抛物线 $y=x^2$, (v) 抛物线 $x=y^2$, (r) 立方抛物线 $y=x^3$ (图 8)。

解 (a) 因为 $dy=dx$, 故 $\int_{(L)} 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 3x^2 dx = 1$, (b) $dy=2x dx$,

$$H = \int_0^1 4x^3 dx = 1, \quad (v) dx = 2y dy, \quad H = \int_0^1 5y^4 dy = 1, \quad (r) dy = 3x^2 dx, \quad H = \int_0^1 5x^4 dx = 1.$$

4) 对这些同样积分路线, 计算曲线积分

$$G = \int_{(L)} xy dx + (y-x) dy.$$

答 (a) $\frac{1}{3}$, (b) $\frac{1}{12}$, (v) $\frac{17}{30}$, (r) $-\frac{1}{20}$.

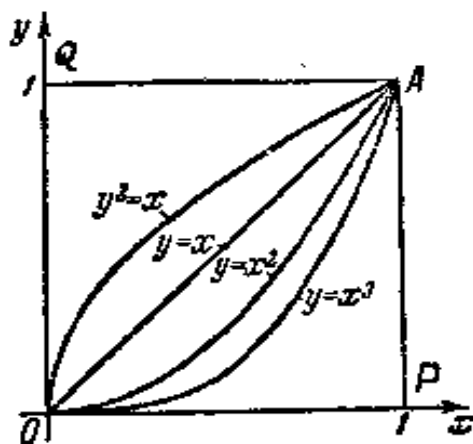


图 8

5) 求曲线积分

$$I = \int_{(OA)} (x - y^2) dx + 2xy dy,$$

如取联结点 $O(0,0)$ 及 $A(1,1)$ 的下列各曲线之一 (参看图 8) 作为积分道路: (a) 直线段 $OA(y=x)$; (b) 由 x 轴 ($y=0$) 的一段 OP 及直线 $x=1$ 的一段 PA 所组成的折线 OPA ; (c) 由 y 轴 ($x=0$) 的一段 OQ 及直线 $y=1$ 的一段 QA 所组成的折线 OQA .

解 (a) 因 $y=x$ 及 $dy=dx$, 故

$$I = \int_0^1 (x + x^2) dx = \frac{5}{6}.$$

(b) 在这一情况下很自然地分积分道路为两段:

$$I = \int_{(OPA)} = \int_{(OP)} + \int_{(PA)} = I_1 + I_2.$$

沿 OP 我们有: $y=0$ 及 $dy=0$, 所以

$$I_1 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

沿 PA 有: $x=1$ 及 $dx=0$, 故

$$I_2 = \int_0^1 2y dy = 1.$$

因此, 最后 $I = \frac{3}{2}$.

(c) 与前类似, 得 (因为沿线段 OQ 的积分等于零):

$$I = \int_{(QA)} = \int_0^1 (x-1) dx = -\frac{1}{2}.$$

6) 同样求积分

$$J = \int_{(OA)} (y^2 + 2xy) dx + (2xy + x^2) dy.$$

答 在所有情形下 $J=2$.

附注 读者可能已注意到例 3), 6) 的结果与 4), 5) 的结果间的差异。在 3) 与 6) 中所考察积分的大小似乎与联结起点及终点的道路无关。相反, 在例 4) 与 5) 中我们遇到的积分其值与起点及终点用什么样的线联结相关。以后 [§ 3] 我们要特别来讨论这一问题并说明它的重要性。

7) 计算积分

$$I = \int_{(C)} (x^2 + 2xy) dy,$$

其中 (C) 表示循反时针向的上半椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。

解 利用椭圆的参数表示式: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, 这里 t 由 0 变到 π 。将 x, y 用 t 的表示式代入并用 $b \cos t dt$ 来代 dy , 得 [由公式 (5*)]

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi (a^2 \cos^2 t + 2ab \cos t \sin t) b \cos t dt = \\ &= a^2 b \int_0^\pi \cos^3 t dt + 2ab^2 \int_0^\pi \cos^2 t \sin t dt = \frac{4}{3} ab^2. \end{aligned}$$

8) 计算积分

$$K = \int_{(L)} y^2 dx - x^2 dy,$$

其中 (L) 是一圆周, 半径为 1 而中心在 (a) 坐标原点或 (b) 点 $(1, 1)$ 。

解 (a) 自参数方程 $x = \cos t$, $y = \sin t$ 出发, 其中 t 由 0 变到 2π , 由公式 (6) 我们有

$$K = - \int_0^{2\pi} (\sin^3 t + \cos^3 t) dt = 0.$$

(b) 同样, 用参数表示式

$$x - 1 = \cos t, \quad y - 1 = \sin t$$

时, 我们得

$$K = - \int_0^{2\pi} (2 + \sin t + \cos t + \sin^3 t + \cos^3 t) dt = -4\pi.$$

9) 求积分

$$J = \int_{(K)} \frac{xdy - ydx}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2} \quad (A, C \text{ 及 } AC - B^2 > 0),$$

其中 (K) 是圆周 $x^2 + y^2 = r^2$ 。

提示 比照 330, 14)。答 $\frac{2\pi}{\sqrt{AC - B^2}}$ 。

10) 计算积分

$$L = \int_{(A)} \frac{xdx}{y} + \frac{dy}{y-a},$$

如果(A)是摆线

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

自点 $t = \frac{\pi}{6}$ 到点 $t = \frac{\pi}{3}$ 的一段。

解
$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[a(t - \sin t) - \frac{\sin t}{\cos t} \right] dt = a \left(\frac{\pi^2}{24} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{2} \log 3.$$

11) 计算积分

$$I = \int_{(K)} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}},$$

如果(K)是星形线

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$$

自点 $A(a, 0)$ 到点 $B(0, a)$ 的一段。

解
$$I = 3a^{\frac{4}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3}{16} \pi a^{\frac{4}{3}}.$$

12) 试求质量为 m 的质点 M 由位置 A 移到位置 B 时由重力所产生的功。在此处假定位移是在通过 A 及 B 的某铅垂面内进行的(图 9)。

解 在所提到的平面内取坐标轴, 使 y 轴朝下; 这时设点 A 及 B 分别有坐标 x_A, y_A 及 x_B, y_B 。重力在坐标轴上的射影显然是

$$X = 0, \quad Y = mg,$$

其中 $g = 9.81$ 米/秒² 是重力加速度。

设(4)是联结 A 与 B 的轨道(K)的方程, 且 t 由 α 变到 β 。利用功A的曲线积分表示式(3), 在现在的情况下我们有

$$A = \int_{(K)} mg dy = mg \int_{\alpha}^{\beta} d\psi(t) = mg[\psi(\beta) - \psi(\alpha)] = mg(y_B - y_A).$$

因此, 功仅与点 M 的终止及开始位置间高度的差有关。

13) 已知一平面的力场, 是由这样的力形成的: 它的方向向着坐标原点, 它的大小与自原点到它的作用点距离 r 的平方成反比:

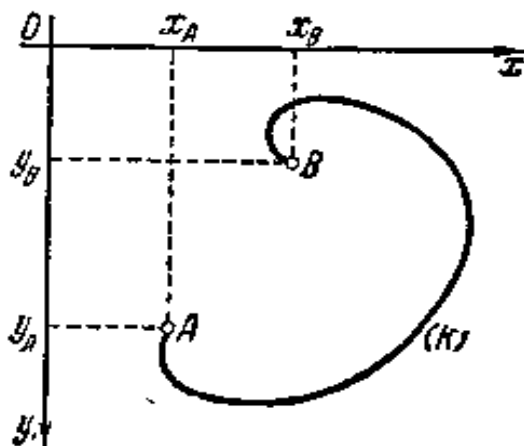


图 9

$$F = \frac{\mu}{r^2}$$

(由质量等于 μ 的质点放在坐标原点, 所得出的牛顿引力场就是这种样子的, 假定引力常数用 1 来代替)。

计算当质量 $m=1$ 的质点自位置 A 位移到位置 B 时(不通过原点!)场的功。

解 以 x, y 表点的坐标, 对力与 x 轴的夹角我们有:

$$\cos \theta = -\frac{x}{r}, \quad \sin \theta = -\frac{y}{r},$$

所以力的射影为

$$X = -\mu \frac{x}{r^3}, \quad Y = -\mu \frac{y}{r^3},$$

而功可表作曲线积分

$$A = -\mu \int_{(AB)} \frac{x dx + y dy}{r^3}.$$

但不难看见,

$$-\frac{x dx + y dy}{r^3} = d \frac{1}{r},$$

且如将 x, y 用它们的表示式(4)来代入并令

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2}$$

时, 这一等式仍旧成立。故

$$A = \mu \int_a^B d \frac{1}{r} = \frac{\mu}{r} \Big|_a^B = \mu \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right),$$

其中 r_A, r_B 分别表示原点到点 A 及 B 的距离。

这里, 功与轨道(AB)的形状无关, 仅与点 A, B 的位置有关。

14) 由力

$$F = kr$$

形成一场, 其方向与位置向量 $\vec{r}$ 的方向夹 $+\frac{\pi}{2}$ 的角。

试求当质点沿下列曲线由点 $A(a, 0)$ 位移到 $B(0, a)$ 时场的功的大小: (a) 圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 的弧, (b) 星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 的弧。

提示 在这一情况下,

$$\cos \theta = -\frac{y}{r}, \quad \sin \theta = \frac{x}{r}, \quad X = -ky, \quad Y = kx,$$

所以

$$A = k \int_{(AB)} x dy - y dx.$$

答 (a) $\frac{\pi a^2 k}{2}$; (b) $\frac{3\pi a^2 k}{16}$.

15) 同上题, 但

$$F = \frac{k}{r}.$$

答 在两种情形下 $A = \frac{\pi k}{2}$.

525 用取在折线上的积分的逼近法 在许多情形下会遇到一种曲线积分, 用取在折线上的积分来逼近它非常方便。这种逼近法建立在下一命题上, 这一命题我们以后常常要用到。为简单起见我们这里只讨论平面曲线的情形, 但也不难变到空间曲线的情形。

预备定理 设函数 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 连续于某开区域 (E) 内, 而 (L) 是在 (E) 内的一曲线*。如作 (L) 的内接折线 (Δ) , 则当各段小弧直径的最大者 [316] 趋近于零时我们有

$$\lim \int_{(\Delta)} P dx + Q dy = \int_{(L)} P dx + Q dy.$$

只要讨论 $\int_{(\Delta)} P dx$ 及 $\int_{(L)} P dx$ 就够了, 对积分 $\int_{(\Delta)} Q dy$ 及 $\int_{(L)} Q dy$ 推理完全是一样的。设内接于 (L) 的折线 (Δ) 的顶点为

$$A \equiv A_0, A_1, \dots, A_i, A_{i+1}, \dots, A_n \equiv B,$$

以 x_i, P_i 表 x, P 在点 A_i 的值。给定任意一数 $\varepsilon > 0$ 后, 命各小弧的直径非常小, 使 1) 连续函数 P 沿线段 $\overline{A_i A_{i+1}}$ 的振动 $< \varepsilon$ 且 2) 积分和 $\sum_i P_i \Delta x_i$ 与它的极限 $\int_{(L)} P dx$ 之差亦小于 ε 。

显然, 我们有

* 我们设想曲线是以参数方程形状 (4) 给出的, 其中函数 φ 及 ψ 连续且有分段连续的导数。这就保证了在下面等式中曲线积分的存在; 此外, 曲线也就是可求长的 [320]。

$$\int_{(A)} P dx = \sum_i \int_{(A_i A_{i+1})} P dx,$$

且另一方面,

$$\sum_i P_i \Delta x_i = \sum_i \int_{(A_i A_{i+1})} P_i dx,$$

所以
$$\int_{(A)} P dx = \sum_i P_i \Delta x_i + \sum_i \int_{(A_i A_{i+1})} [P - P_i] dx.$$

但右端的第一项与积分 $\int_{(L)} P dx$ 相差小于 ε [参看 2)], 而第二项其绝对值不会超过 $\varepsilon \sum_i \overline{A_i A_{i+1}}$ [参看 1)], 也就是更 $< L \cdot \varepsilon$, 其中 L 是曲线 (L) 的长。

于是, 最后,

$$\left| \int_{(A)} P dx - \int_{(L)} P dx \right| < \varepsilon(1 + L),$$

这就证明了我们的断言。在下一节中我们将寻求它的应用。

526 用曲线积分计算面积 我们现在来指出, 怎样借(第二型的)

曲线积分来计算平面图形的面积。

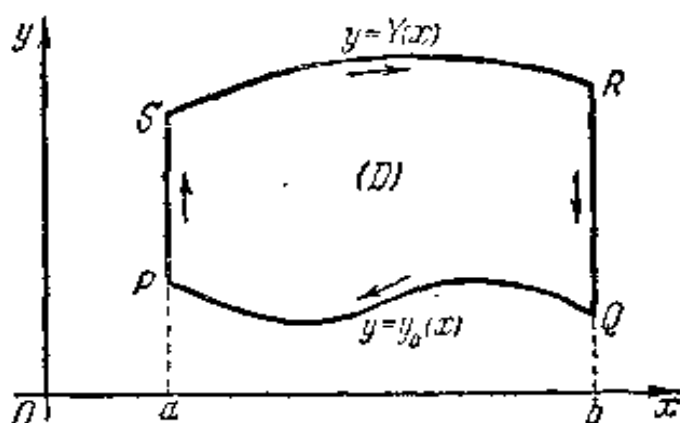


图 10

首先我们来考察(图 10)图形 $(D) = PQRS$, 它是由平行于 y 轴的二直线段 PS 及 QR (在特别情形时可缩为一点) 与两曲线 PQ 及 SR 围起来的, 而这两曲线的每一个与平行于 y

轴的任一直线仅交于一点。设曲线 (PQ) 及 (SR) 的显方程为

$$(PQ): y = y_0(x),$$

$$(SR): y = Y(x),$$

且 x 在区间 $[a, b]$ 上变动。

将“曲边梯形” $PQRS$ 的面积 D 看作两“曲边梯形” $abRS$ 及 $abQP$ 的面积之差时, 我们就可以写

$$D = \int_a^b Y(x) dx - \int_a^b y_0(x) dx.$$

另一方面, 由公式(7),

$$\int_{(PQ)} y dx = \int_a^b y_0(x) dx, \quad \int_{(SR)} y dx = \int_a^b Y(x) dx.$$

所以

$$D = \int_{(SR)} y dx + \int_{(QP)} y dx;$$

这里我们已经在第二个积分前面变了号, 但同时却也改变了积分的方向。若在等式右端加上等于零的两积分

$$\int_{(PS)} y dx \text{ 及 } \int_{(RQ)} y dx$$

(因为它们沿着平行于 y 轴的直线段而取的), 则等式并未破坏。结果得

$$D = \int_{(PSRQP)} y dx,$$

且积分路线是按积分号下文字的次序前进的。

如以 (L) 表区域 (D) 的边界, 则按第 523 目末尾的规定, 记号 $\int_{(L)} y dx$ 表示以正向取的积分。在坐标轴, 如图 10 所采用的, 是右手定向时, 这一环行方向使区域在左手边, 而同时方向 $PSRQP$ 使这一区域在右手边。故

$$\int_{(PSRQP)} y dx = - \int_{(L)} y dx,$$

因此,

$$D = - \int_{(L)} y dx. \quad (8)$$

现在假定, 虽然图形 (D) 是由较复杂的边界围成的 (甚至边界是

由若干曲线所组成), 但这一图形用平行于 y 轴的直线恒可分成有限个如上所考察的小块 (图 11)。每一小块有一由公式 (8) 所表出的面积。

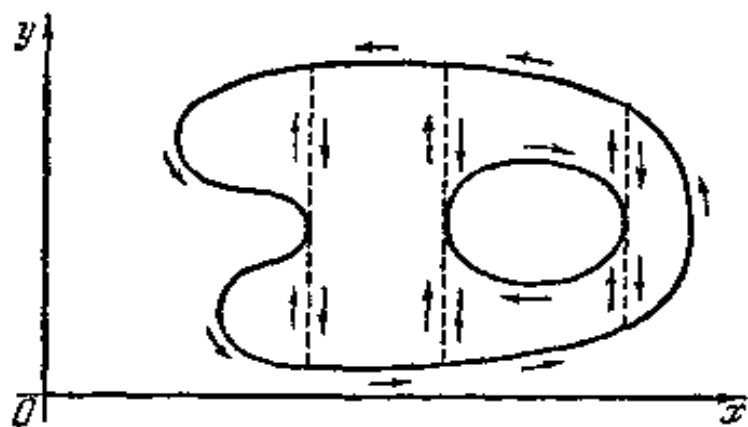


图 11

将这些等式相加, 在左边我们就得到整个图形 (D) 的面积, 而右边是散布在各部分边界上的积分的和。但这些积分可化为取在总边界 (L) 上的一积分, 因为沿每一辅助线段的积分等于零。因此, 在这种情形下面积 (D)

仍以公式 (8) 表示。

对于由平行于 x 轴的两直线段 PQ 及 SR (图 12) 与两曲线

$$\begin{aligned} (PS): \quad x &= x_0(y), \\ (QR): \quad x &= X(y) \end{aligned} \quad (c \leq y \leq d)$$

所围成的图形 $PQRS$, 用类似的推理可得公式

$$D = \int_{(L)} x dy. \quad (9)$$

并且, 如果互换 x, y 轴的地位, 它也可直接由公式 (8) 推出。这时符号必须改变, 这是因为环行的正向与坐标轴地位互换无关, 仍旧完全与前面一样。

容易明白, 对于较复杂的图形, 即用平行于 x 轴的直线可将它分成有限个第二型的“曲边梯形”者, 公式 (9) 依然成立。

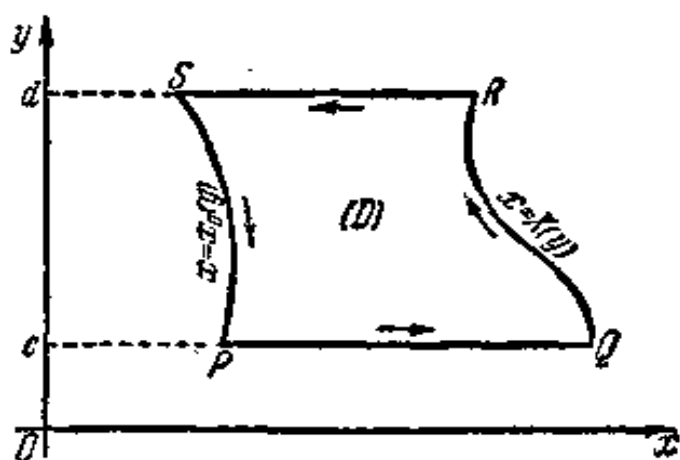


图 12

所得结果事实上已有完全足够的普遍性了。但是, 在许多具体情况中要去检验上面的图形是否可

能分割为上述特殊类型的小块往往很麻煩。所以我們来证明另一个, 亦是非常一般的, 但容易验证的条件, 在这一条件下公式(8)及(9)可同时应用。

我們假定, 区域(D)是由一任意的分段光滑的曲綫(L)圍成的。因为这一区域是可求面积的[328], 故可作一在里面的及一在外面的多角形区域(A)及(B)使

$$A < D < B, \quad B - A < \delta,$$

其中 δ 是事先給定的一正数[326]。同时也可以假定这些区域的边界两两无公共点。以 δ 表这些不同边界的点間的最小距离[327, 二卷第一分册第 186 頁上的底注]。如內接于(L)作一折綫(Δ)使所有小弧的直徑 $< \delta$, 这折綫就已經不会与多角形(A)及(B)的边界有公共点, 所以由它所圍的多角形(Δ)包含着(A)且自身又含于(B)內。于是

$$|\Delta - D| < \delta,$$

故当小弧直徑的最大者趋近于零时, $\Delta \rightarrow D$ 。

現在不难证明, 公式(8)及公式(9)都可应用来計算多角形面积 Δ , 即

$$\Delta = - \int_{(A)} y dx = \int_{(A)} x dy$$

(因为用平行于 y 軸或 x 軸的直綫很容易分割这一多角形为这种或那种类型的梯形)。如变到极限, 并引用前一目中的預备定理, 最后就得到: 由一个分段光滑的曲綫所圍图形(D)的面积可任意用上述公式之一来表示。

但是, 在計算面积时, 通常采用另一較对称的公式:

$$D = \frac{1}{2} \int_{(L)} x dy - y dx, \quad (10)$$

这由公式(8)及(9)很容易得到[比照 330(14)]。

附注 容易证明, 曲綫上有有限个奇点时事实上并不改变上面所

导出的公式的真实性。如用这些点的邻域将它们分开，则对图形的其余部分公式是可以应用的。再只要令这些邻域的直径趋近于零变到极限就可以了。

527 例 1) 求半轴为 a 及 b 的椭圆面积。

解 利用椭圆的参数方程: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)。由公式(10),

$$D = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a \cos t \cdot b \cos t dt - b \sin t \cdot (-a \sin t) dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

在计算曲线积分时我们利用了公式(6), 当排列积分上下限的次序时要注意闭路正向的环行对应于参数的增加。

2) 求星形线

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

的面积。

答

$$D = \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

3) 求由外摆线

$$x = a[(1+m)\cos mt - m\cos(1+m)t],$$

$$y = a[(1+m)\sin mt - m\sin(1+m)t]$$

的一拱与对应的圆弧围所围图形的面积(图 13)。

解 应先沿着曲线(ABC)再沿着曲线(CDA)取积分(10)。在前一情况下我们可利用

上面写出的方程, 令 t 自 0 变到 2π 。则

$$x dy - y dx = a^2 m(1+m)(1+2m)(1-\cos t) dt,$$

$$\text{故} \quad \frac{1}{2} \int_{(ABC)} = \pi a^2 m(1+m)(1+2m).$$

至于圆弧(CDA), 则如保持同一参数, 它就可用方程

$$x = a \cos mt,$$

$$y = a \sin mt$$

来表示, 这时 t 自 2π 变到 0。对应的积分为

$$\frac{1}{2} \int_{(CDA)} = \frac{1}{2} a^2 m \int_{2\pi}^0 dt = -\pi a^2 m,$$

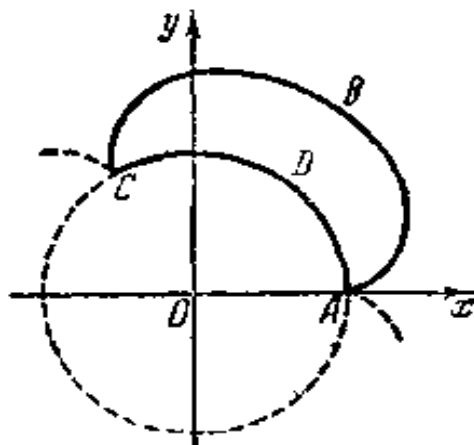


图 13

因此, 所求面积等于

$$D = \pi a^2 m^2 (2m+3).$$

4) 试求笛卡儿叶形线

$$x^2 + y^3 = 3axy$$

一圈的面积(图 14)。

解 为了求得闭路的参数方程, 令 $y = tx$.* 则 [参照 214(5)]

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

由几何观察很清楚, 当参数 t 自 0 变到 ∞ 时, 圈子就描画出来了 (因为 $t = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta$, 其中 θ 由 0 变到 $\frac{\pi}{2}$), 我们有

$$dx = 3a \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} dt,$$

$$dy = 3a \frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2} dt$$

及
$$D = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^3)^2} = \frac{3}{2} a^2.$$

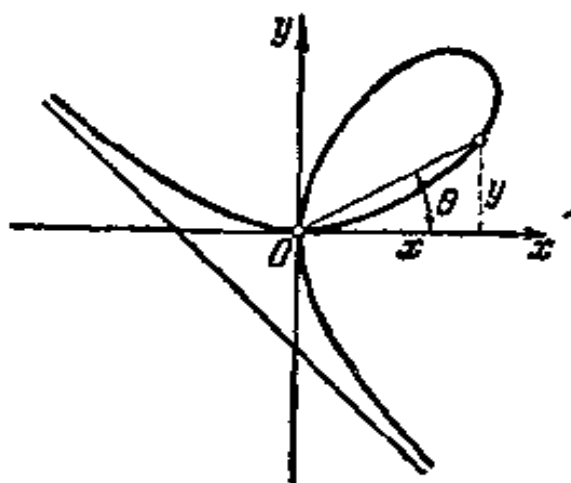


图 14

注意这里我们用了无穷限的广义积分, 而在推演公式(6)时我们一直认为参数变化的区间是有限的。要证明上面做的是正确的非常容易, 只

要先引进另一参数使其变化区间是有限的 (例如, 角 θ), 再变到参数 $t = \frac{y}{x}$ 。

5) 同一问题, 对曲线:

(a) $(x+y)^4 = ax^2y$, (6) $(x+y)^{2n+1} = ax^n y^n$ (n 为自然数)。

提示 引导 $t = \frac{y}{x}$, t 自 0 变到 ∞ 。在情形(6)下,

$$x dy - y dx = a^2 \frac{t^{2n}}{(1+t)^{4n+2}} dt.$$

在积分时, 自恒等式

$$t^{2n} = [(1+t) - 1]^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (-1)^k (1+t)^k$$

出发, 可使分式分成许多简单的分式。

答 (a) $D = \frac{a^2}{210}$, (6) $D = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{C_{2n}^k}{4n-k+1} \cdot a^2.$

* 一般, 当代数曲线的方程有两类齐次项且次数相差一时, 这样的代换法总是很方便的。

6) 求坐标轴与曲线

$$x^3 + y^3 = x^2 + y^2$$

所围图形的面积。

$$D = \frac{1}{3} + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}.$$

7) 作为应用一般公式(10)于计算任何样子的平面图形* 面积的一例, 我们最后来讨论这样一问题。

设某一立体的底面是在两平行平面上的二任意形状的图形, 而侧面是直纹面, 是由按照某种规则联结这两图形的边缘上的点而成的直线所组成的(图 15)。求证, 立体的体积 V 可用公式

$$V = \frac{h}{6}(Q_0 + 4Q_1 + Q_2) \quad (11)$$

来表示, 其中 h 表立体的高, Q_0, Q_2, Q_1 是它的底面积与中周截面的面积。

我们知道, 如横断面面积是 $Q = Q(x)$, 则体积 V 可用公式

$$V = \int_a^b Q(x) dx$$

来表示(参看 333)。另一方面, 如 $Q(x)$ 是至多三次的多项式, 则辛澄孙公式:

$$\int_a^b Q(x) dx = \frac{h}{6}(Q_0 + 4Q_1 + Q_2)$$

是准确的(参看 314, 第二卷第一分册第 154 页上底注)。事实上, 我们将看到, $Q(x)$ 是一个二次多项式。

设

$$y = \alpha x + \beta, \quad z = \gamma x + \delta \quad (12)$$

是构成范围立体的直纹面的方程。这里可以假定系数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 是某一参数 t 的函数, 当 t 变化(例如, 由 t_0 到 T) 时母线就描画出曲面来。现在如果用一平行于 yz 平面、与它相距 x 的平面去截这一曲面, 则在相交的地方就得一曲线, 它在 yz 平面上的射影(并未变形)恰以方程(12)做它的参数方程。我们假定, 当 t 自 t_0 变到 T 时所有截面处的边界都是以正向(被对应的母线上的点)描画出来了。因此截面面积, 例如由类似于(9)的公式, 可表作:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \int_{(K_x)} y dz = \int_{t_0}^T (\alpha x + \beta) d(\gamma x + \delta) = \\ &= x^2 \cdot \int_{t_0}^T \alpha d\gamma + x \cdot \int_{t_0}^T (\alpha d\delta + \beta d\gamma) + \int_{t_0}^T \gamma d\delta, \end{aligned}$$

* 当然, 要合于上面所说过的条件, 为简单起见这些条件我们这里不再重提了。

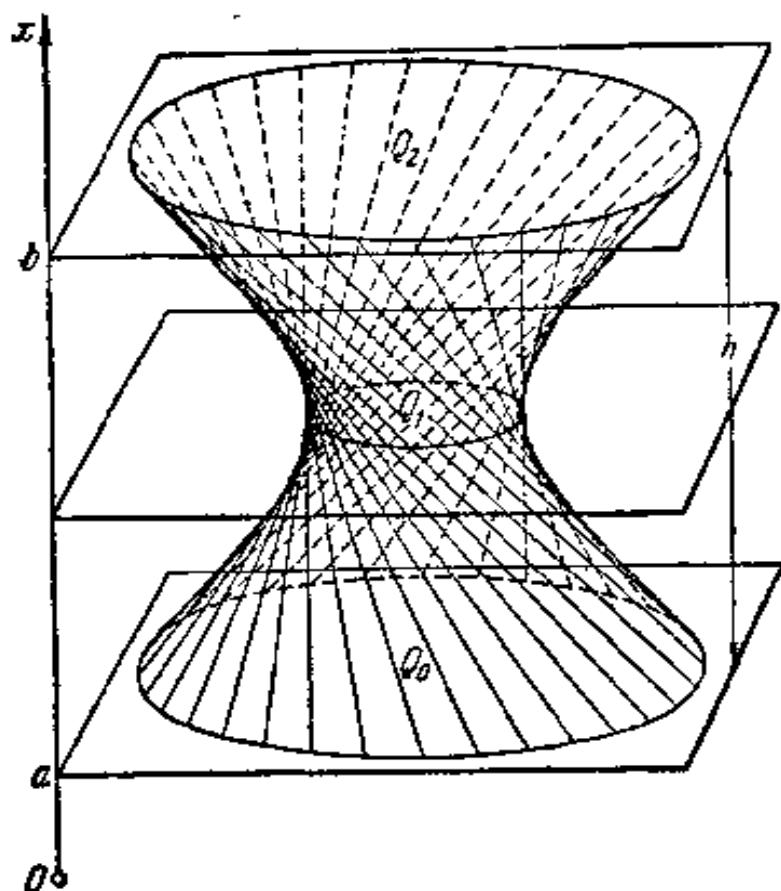


图 15

即, 确乎表作 x 的二次三項式。

容易证明, 类似于公式(11)的公式也可应用到计算立体对 yz 平面的静矩上去。这静矩可用积分

$$M_{yz} = \int_a^b xQ(x)dx$$

来表示[347, 1)], 这里积分号下的函数是一个三次多项式。

528 两不同型曲线积分间的联系 考察一光滑曲线 $(K) \equiv (AB)$,

取弧 $s = \overset{\frown}{AM}$ 为参数, 我们就可表它为方程

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (0 \leq s \leq S).$$

函数 $x(s), y(s)$ 将有连续导数 $x'(s), y'(s)$ 。如以 α 表示向着弧的增加方向的切线 与 x 轴间的夹角, 则大家都知道[237(7)],

$$\cos \alpha = x'(s), \quad \sin \alpha = y'(s).$$

如沿曲线 (K) 已知一连续函数 $f(M) = f(x, y)$, 因此我们有

$$\begin{aligned}\int_{(K)} f(M) dx &= \int_0^s f(x(s), y(s)) x'(s) ds = \\ &= \int_0^s f(x(s), y(s)) \cos \alpha ds = \int_{(K)} f(M) \cos \alpha ds,\end{aligned}$$

而第二型曲线积分就化成第一型曲线积分了。

同样可得

$$\int_{(K)} f(M) dy = \int_{(K)} f(M) \sin \alpha ds.$$

如沿曲线(K)已知二连续函数 $P(M) = P(x, y)$ 及 $Q(M) = Q(x, y)$, 则

$$\int_{(K)} P dx + Q dy = \int_{(K)} (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) ds. \quad (13)$$

我们着重指出, 在所有这些公式中角 α 与切线的方向有关, 而这一方向对应于曲线(K)的方向。如将曲线方向改变, 则不仅左端的积分变号, 且由于切线方向的改变, 角 α 要变动 $\pm\pi$, 故同时右端的积分也要变号。

显然, 所导出的公式对无重点及奇点的分段光滑曲线依然成立; 这很容易证明, 只要对曲线的每一光滑段将公式写出来再逐一相加就可以了。

作为一练习我们将面积公式(10)来改变成第一型曲线积分:

$$D = \frac{1}{2} \int_{(K)} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_{(K)} (x \sin \alpha - y \cos \alpha) ds.$$

如变成极坐标 r, θ , 则又得

$$D = \frac{1}{2} \int_{(K)} r (\sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta) ds = \frac{1}{2} \int_{(K)} r \sin(\alpha - \theta) ds,$$

注意 $\alpha - \theta$ 是点的位置向量与该点处切线间的夹角 (r, t) , 故可给这公式一最终形状:

$$D = \frac{1}{2} \int_{(K)} r \sin(r, t) ds.$$

对沿空間曲綫的曲綫积分也可作同样的討論。結果得公式

$$\int_{(K)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(K)} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds,$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是切綫的方向余弦, 当然假定它的方向对应于积分道路的方向。

在平面曲綫的情形下, 与两种曲綫积分相关的公式中, 如写出 x 軸与积分所散布的曲綫法綫間的夹角时, 有时比較方便。如給法綫一方向使切綫与法綫間的夹角 $\angle(x, n)$ 等于 $+\frac{\pi^*}{2}$, 故

$$\angle(x, n) = \angle(x, t) + \angle(t, n) = \alpha + \frac{\pi}{2},$$

則

$$\cos \alpha = \sin(x, n);$$

$$\sin \alpha = -\cos(x, n).$$

因此, 例如公式(13)就可写成下面的形状:

$$\int_{(K)} Pdx + Qdy = \int_{(K)} [P \sin(x, n) - Q \cos(x, n)] ds. \quad (14)$$

529 物理問題 除掉上面已經讲的, 我們还想給出曲綫积分的一些其它应用例题; 我們最后来討論三个物理問題, 一个是流体力学方面的, 一个是热力学方面的, 一个是动电学方面的。

1) **流体在平面中的定常流动** 这种运动的特征是: 第一, 在某平面的同一鉛垂綫上各部分流体有相同的速度, 所以, 要說明整个运动只要研究在一个平面** 内的运动就够了; 第二, 流体各部分的速度 $\vec{c}$ 仅与各部分的位置有关而与時間无关。因此, 在所考察的平面(或它的一部分)中每一几何点处, 就有一个在大小及方向上都确定的速度与它联系着; 換句話說, 給出了某一“速度場”。

如以 φ 表示向量 $\vec{c}$ 与 x 軸間的夹角, 而以 u 及 v 表这一向量在坐标軸上的射影(速度沿坐标軸的分量), 則(图 18, a)

$$u = c_x = c \cos \varphi,$$

$$v = c_y = c \sin \varphi.$$

現在在 xy 平面中取一任意曲綫 (K) , 我們設法决定流体在单位時間內向曲綫的确定一

* 計算角的正負方向必須按照平面的定向;

** 我們取这一平面为 xy 平面。

侧流过(曲线)的流量 Q 。设流体是不可压缩的, 便可用流体所掩盖图形的面积来测量流体的量。如实际上流体向所取的相反一侧流动, 则流体的流量就算是负的。

考察曲线(K)的元素 $ds = AB$ 。在时间 dt 内通过这一元素流体的流量等于

$$c_n ds dt, \quad (15)$$

其中 c_n 是速度 $\vec{c}$ 在元素 ds 的法线 $\vec{n}$ 上的射影, 法线是向着所取的曲线那一侧的。实际上, 这一量等于以 ds 及 $c \cdot dt$ 为边的平行四边形的面积, 它的高恰为乘积 $c_n dt$ (图 16, 6)。为了计算在单位时间内流体通过元素 ds 的流量, 将(15)式对元素 dt 相加, 得出 $c_n ds$ 。再将所得

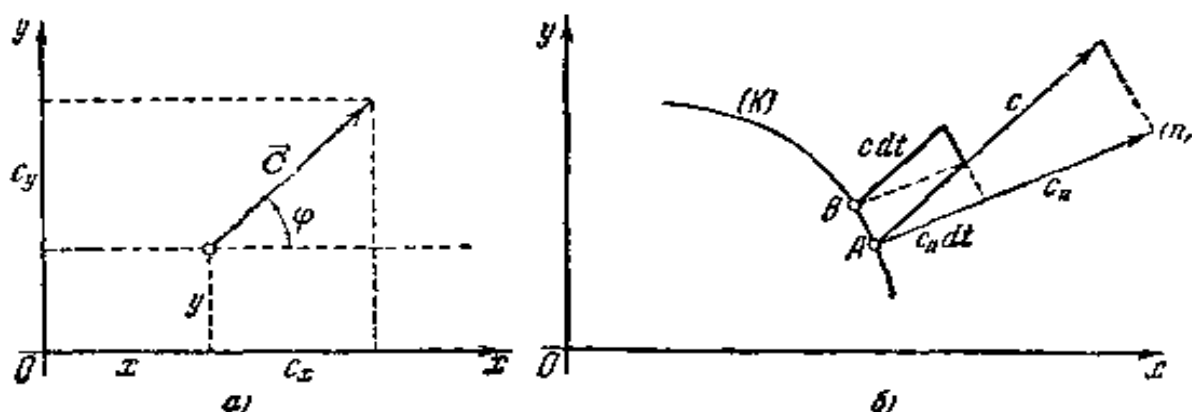


图 16

式子对曲线(K)的所有元素相加, 我们就可将所求流量 Q 表作第一型曲线积分的样子:

$$Q = \int_{(K)} c_n ds. \quad (16)$$

如 x 轴与曲线法线间的夹角为 (x, n) , 则法线与速度 $\vec{c}$ 间的夹角就是

$$(n, c) = (x, c) - (x, n) = \varphi - (x, n),$$

所以

$$\begin{aligned} c_n &= c \cos(n, c) = c [\cos \varphi \cos(x, n) + \sin \varphi \sin(x, n)] = \\ &= u \cos(x, n) + v \sin(x, n), \end{aligned}$$

而(16)式就作下形:

$$Q = \int_{(K)} [u \cos(x, n) + v \sin(x, n)] ds. \quad (17)$$

现在, 按照第 528 目中公式(14), 这一积分也可表作第二型曲线积分的形状:

$$Q = \int_{(K)} v dx - u dy, \quad (18)$$

* 读者一定已觉察到, 我们这里采用了一种简略的说法, 在第二卷中[339]已谈到过的。极限过程已算在内;

并且很重要地我们特别指出, 应该取这一曲线的方向使对应的切线方向与前所取的法线方向夹角等于 $+\frac{\pi}{2}$ [因为就是在这假定下公式(14)才推出来的]。

如 (K) 是一闭路, 且积分(18)是认为沿着正向而取的 (与通常一样, 523), 则公式(18)中的法线应取着朝向路线 (K) 所围区域的内部 (为了适合刚才所说的条件)。因此, 在这种情形下, 公式(18)就给出在单位时间内流体通过边界 (K) 流向区域内部的流量。如想要得到在单位时间内由边界 (K) 所围区域流体向外的流量, 只要在公式(18)中变号就可以了。

再, 如场中流体既没有“泉源”也没有“漏洞”时, 则在任一有界区域内流体的量保持不变。所以, 不论取怎样的闭曲线, 沿它所取的积分(18)必定等于零。

因此, 若 u 及 v 是不可压缩流体在平面的定常流动中的分速度, 则当没有泉源与漏洞时, 不论 (K) 是怎样的闭路,

$$\int_{(K)} v dx - u dy = 0.$$

以后 [541, 2)] 我们将看到, 这一借物理观察而得的结果也可以给出函数 u 及 v 的某种分析说明。

2) 气体所吸收的热 考察若干质量的气体, 例如 1 千克。气体的状态由三个量来说明: 体积 v , 压力 p 及绝对温度 T 。如将气体算作理想的, 则这三个量彼此由克拉彼依龙方程相联系:

$$pv = RT,$$

其中 R 是一常量。因此, p , v 及 T 中任一量可用其它二量来表示, 故要确定气体的状态只要知道其中两个量就够了, 例如, v 及 p 。则横坐标为 v , 纵坐标为 p 的点可用来表明气体的状态。如气体状态从对应于点 A 的最初状态变到由点 B 所决定的终止状态, 则整个变化过程可用一曲线 $(K) \equiv (AB)$ 来说明, 这曲线说明变化状态的连续性。*

现在我们的任务是: 求出在由曲线 (K) 所表明的这一整个过程的时间内, 已知质量的气体吸收了多少热量 U (卡)。为达此目的, 与通常一样, 我们考察某一“无穷小”过程, 将气体从状态 (v, p, T) 变到一无限接近的状态 $(v+dv, p+dp, T+dT)$ 。对应于这无穷小过程有曲线 (K) 的一元素 (图 17)。我们曾经确定过这时传给它的元素热量 dU [当推演普安松公式时, 352, 3)]。我们来利用那里所得的式子:

$$dU = \frac{c_v}{R} v dp + \frac{c_p}{R} p dv.$$

要求出由曲线 (K) 所表明的气体整个变化过程中它所传得的总热量 U , 只要将元素 dU

* 此处及今后我们指的所谓拟平稳过程, 就是我们表明改变气体的状态是尽可能地慢慢进行的, 并尽可能伴以很均匀的搅拌使气体的全部同时通过每一中间状态。

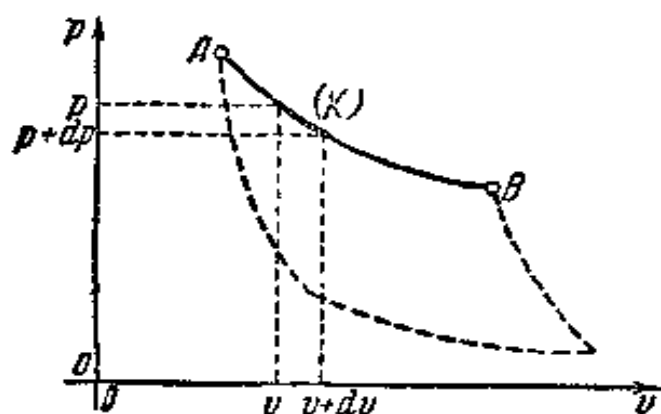


图 17

沿这一曲线“相加”：

$$U = \int_{(K)} \frac{c_v}{R} v dp + \frac{c_p}{R} p dv. \quad (19)$$

因此，热量 U 就已表作第二型的曲线积分。

如果我们不用 dv 及 dp ，而用 dv 及 dT 或用 dp 及 dT 来表出热的增量 dU ，那末事情不过是变成分别在 vT 平面或 pT 平面中的一曲线上取曲线积分。

3) 电流的磁效应 表明电流磁效应的皮奥-沙凡尔定律有“微分的”形式。按照这一定律，如一导体上通过的电流为 I ，它上面的一元素 ds 作用于与它相距 r 的一磁荷 m 上的力，其大小等于

$$\frac{Im \sin \varphi ds}{r^2}, \quad (20)$$

其中 $\varphi (0 < \varphi < \pi)$ 是连接磁极及电流元素的向量 $\vec{r}$ 与导体元素 ds 在电流进行的方向的夹角。这一元素力的方向垂直于由向量 $\vec{r}$ 及 ds 所决定的平面并朝着那一边，使从那里看来由 $\vec{r}$ 旋转一角 φ 到 ds 是按反时针向进行的[比照 347(8)]。

我们提出一问题：有一任意形状的有限闭导线 (K) 放在空间的任意位置，要表明在它上面流动的电流所产生的磁场；换句话说，就是要求出这一整个导线对放置于空间任意一点 M 处的磁荷 m 的作用力。然而，当上面所谈到的各个元素力有各不相同的方向并且须将它们几何地相加时，要得到皮奥-沙凡尔定律的“积分”形式是很困难的。

在这类情况下通常是变成向量在空间的任一直角坐标系的轴上的射影，因为元素力的射影相加时已经是代数的了。

为了计算的简化我们利用向量代数这工具。*如将表元素力 $d\vec{F}$ 大小的式子(20)改写为

$$\frac{mI}{r^3} \cdot r ds \sin \varphi,$$

则很容易注意到它仅与向量积 $\vec{r} \times ds$ 的大小相差一因子 $\frac{mI}{r^3}$ 。又因为由皮奥-沙凡尔定律所决定的 $d\vec{F}$ 的方向与这一乘积的方向相重，故可写

$$d\vec{F} = \frac{mI}{r^3} (\vec{r} \times ds).$$

现在我们考察任一(右手的)直角坐标系 $Oxyz$ 。如以 x, y, z 表元素 ds (起点)的坐标，

* 我们假定读者已熟悉它的初步。比照 639.

而以 ξ, η, ζ 表所考察的空間点 M 的坐标, 則向量 $\vec{r}$ 在坐标軸上的射影为

$$x - \xi, y - \eta, z - \zeta;$$

而向量 $\vec{ds}$ 就有射影

$$dx, dy, dz.$$

在这种情形下 $\vec{dF}$ 的射影就是因子 $\frac{mI}{r^3}$ 分别与

$$(y - \eta)dz - (z - \zeta)dy, (z - \zeta)dx - (x - \xi)dz, \\ (x - \xi)dy - (y - \eta)dx$$

的乘积。

因此, 对曲綫 (K) 的所有元素相加, 最后就得到所求力 $\vec{F}$ 在坐标軸上的射影写作沿空間曲綫 (K) 的曲綫积分的形状:

$$F_x = mI \int_{(K)} \frac{(y - \eta)dz - (z - \zeta)dy}{r^3}, \\ F_y = mI \int_{(K)} \frac{(z - \zeta)dx - (x - \xi)dz}{r^3}, \\ F_z = mI \int_{(K)} \frac{(x - \xi)dy - (y - \eta)dx}{r^3},$$

且曲綫的方向由电流流动的方向所决定。这就给出了我們問題的解答。

§ 3 曲綫积分与道路无关的条件

530 与全微分相关問題的提出 設在某一通連区域 (D) 內已知二連續函数

$$P = P(x, y) \text{ 及 } Q = Q(x, y).$$

考察第二型曲綫积分

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy, \quad (1)$$

此处 A 与 B 是区域 (D) 的任意两点, 而 (AB) 是联接这两点的一个分段光滑*曲綫, 全部在这一区域内者。

这一目主要問題就是要弄清楚这一积分的大小不与道路 (AB) 的形状有关的条件, 即积分由起点 A 及終点 B 所一意决定的条件, 而这两

* 在这一目中我們只考察这样的积分道路, 这就已很好地保证了积分(1)的存在。

点不論在那里。

积分(1)的性质由积分号下的微分式

$$Pdx + Qdy \quad (2)$$

的性质而决定。我們回想在以前已經遇見過类似样子的式子，就是在我們談到两变数的可微函数以及它的(全)微分

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \quad (3)$$

的时候[169]，而这一式子当

$$P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

时与(2)式全同。

然而，远非每一个形状为(2)的式子都是“确切微分”，也就是并非对每一个这种式子都有一“原函数” $F(x, y)$ 存在，使这一式子恰是它的(全)微分。从这里就能看出，在积分号下的式子是确切微分的情况下，积分(1)就与道路无关；我們將这一有特殊重要性的結論写成一定理的样子，共证明放在下两目中：

定理 1 要使曲綫积分(1)与积分道路的形状无关的必要充分条件是：微分式(2)在所討論的区域中为某一两个变数的(单值*)函数的微分。

531 与道路无关积分的微分法 首先設积分(1)与道路无关。在这种情况下，积分由点 $A(x_0, y_0)$ 及 $B(x_1, y_1)$ 的給出一意地确定，与此相关，就可以用記号

$$\int_A^B Pdx + Qdy \quad \text{或} \quad \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} Pdx + Qdy$$

来表示它。这里只标明了积分道路的起点与終点；道路本身沒有标出来，但这沒有有什么关系——积分沿随便什么道路都可以。当然，沒有上

* 以后[537]讀者可以清楚強調原函数单值的必要性。

面所做的与积分道路无关的假定, 这种表示法就没有确定意义。

如点 $A(x_0, y_0)$ 固定, 而点 B 用区域 (D) 中的任意点 $M(x, y)$ 来代替, 则所得积分就是在区域 (D) 中 M 的某一个点函数, 即它的坐标 x, y 的函数:

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy. \quad (4)$$

现在我们来研究关于它对 x 及对 y 的偏导数问题。

在区域 (D) 中取一任意点 $B(x_1, y_1)$, 给 x_1 一增量 Δx 使它变到点 $C(x_1 + \Delta x, y_1)$, 对相当小的 Δx 这一点同时会与整个线段 BC 都属于 (D) (图 18)。函数的对应值为

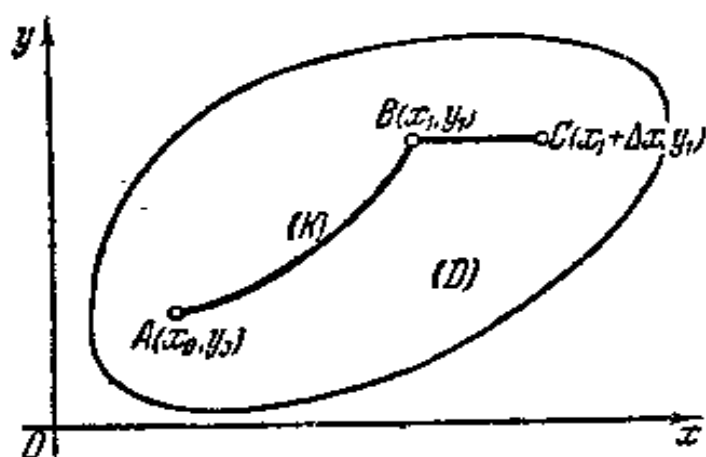


图 18

$$F(x_1, y_1) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} Pdx + Qdy,$$

$$F(x_1 + \Delta x, y_1) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} Pdx + Qdy.$$

其中第一个积分我们沿联结点 A 与 B 的任一曲线 (K) 来取, 而对第二个积分其积分道路是由这一曲线 (K) 与一直线段 BC 所组成。于是, 函数的增量就是

$$\begin{aligned} F(x_1 + \Delta x, y_1) - F(x_1, y_1) &= \\ &= \int_{(BC)} Pdx + Qdy = \int_{(BC)} P(x, y)dx; \end{aligned}$$

其间因为线段 BC 垂直于 y 轴, 而所含 Qdy 的积分变成零了。

所留下的积分立刻就可化成普通定积分: 为此在积分号下的函数

中必須用(是直綫 BC 方程 $y=y_1$ 中的) y_1 代替 y , 并应取点 B 及 C 的横坐标作为对 x 积分的下及上限。最后得

$$F(x_1+\Delta x, y_1) - F(x_1, y_1) = (R) \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} P(x, y_1) dx.$$

将中值定理应用到所得的普通积分上并两端以 Δx 相除, 得

$$\frac{F(x_1+\Delta x, y_1) - F(x_1, y_1)}{\Delta x} = P(x_1 + \theta \Delta x, y_1) \quad (0 \leq \theta \leq 1).$$

現今 Δx 趋近于零。由函数 $P(x, y)$ 的連續性, 等式的右端, 同时其左端, 都趋近于 $P(x_1, y_1)$ 。因此, 函数 F 对 x 的偏导数在点 (x_1, y_1) 处存在且可表作等式

$$\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial x} = P(x_1, y_1).$$

同样可得公式

$$\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial y} = Q(x_1, y_1).$$

因为点 (x_1, y_1) 是在区域 (D) 內任意取的, 故对这一区域的一切点, 有

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y).$$

既然这些偏导数連續, 函数 $F(x, y)$ 就以

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = Pdx + Qdy$$

为微分, 这和积分(1)的被积式一致[169]。*

这样一来, 对于与道路无关的曲綫积分, 我們就得以建立一个与普通定积分中关于有变动上限积分的微分法的定理完全相类似的结果[293, 12°]。

在前目定理中所述条件的必要性也同时证明了。如积分(1)与道路无关, 則(2)式实际上就是确切微分; 在所作假定下积分(4)本身就給

* 由此, 順便也推出了函数 $F(x, y)$ 本身对于它的二变数的連續性。

了我们积分号下式子的一个单值原函数!

532 用原函数来计算曲线积分 现在反过来, 假定 (2) 式是某一单值函数 $\Phi(x, y)$ 的全微分, 则

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (5)$$

已知两点: A 的坐标是 x_A, y_A ; B 的坐标是 x_B, y_B ; 考察联结这两点的任意一个分段光滑的曲线 (K)。设它的参数表示式为

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

且当参数自 α 变到 β 时, 曲线从 A 描画到 B 。因此,

$$\varphi(\alpha) = x_A, \psi(\alpha) = y_A; \varphi(\beta) = x_B, \psi(\beta) = y_B.$$

现在来计算沿曲线 (K) 的曲线积分, 将它化为普通的积分 [第 522 目公式 (6)], 得

$$\begin{aligned} I &= \int_{(K)} P dx + Q dy = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\} dt, \end{aligned}$$

或者, 注意到 (5) 时, 按复合函数微分法的规则,

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \varphi'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \psi'(t) \right\} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} \Phi(\varphi(t), \psi(t)) dt.$$

最后,

$$\begin{aligned} I &= \Phi(\varphi(t), \psi(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = \Phi(\varphi(\beta), \psi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = \\ &= \Phi(x_B, y_B) - \Phi(x_A, y_A). \end{aligned}$$

因此, 在有了原函数

$$\Phi(M) = \Phi(x, y)$$

时, 曲线积分就可用简单的公式来计算:

$$\begin{aligned} \int_{(AB)} Pdx + Qdy &= \Phi(x_B, y_B) - \Phi(x_A, y_A) = \\ &= \Phi(x, y) \Big|_{(x_A, y_A)}^{(x_B, y_B)} \end{aligned} \quad (6)$$

或更简单地,

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy = \Phi(B) - \Phi(A) = \Phi(M) \Big|_A^B \quad (6^*)$$

这一公式与积分学中的基本公式 [296] 即用原函数表普通定积分的公式完全相类似。不过, 我们再强调一次, 这一公式只能用于当积分号下的式子是确切微分的时候。

这一公式同时证明了在所考察的情形下积分(1)与所取的曲线 AB 无关,* 因而在第 530 目的定理中所述条件的充分性也就建立起来了。于是, 这一定理现在就完全被证明了。

533 确切微分的判别与在矩形区域的情况下原函数的求法 现在自然要发生一问题, 就是用怎样的判别法可以辨别一个给出的微分式(2)是否为确切微分。这一问题的答案就可以最后弄清楚曲线积分与道路无关的条件。

为了要得到一个在检验时既简单又方便的判别法, 我们今后补充假定在所讨论的区域(D)中两偏导数 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 存在且连续。

在这一假定下所求判别法立刻就能得到。如果(2)式是某一函数 $\Phi(x, y)$ 的微分, 故等式(5)就成立:

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

则
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}.$$

* 因为, 由于函数中的单值性, 只要给了两点 A 及 B , 它的值 $\Phi(A)$ 及 $\Phi(B)$ 就完全确定了。

假定了偏导数 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 連續就保证这两个混合导数相等[180], 因此,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (\text{A})$$

于是, 这一簡明的关系式就是(2)式是确切微分的必要条件。

在研究到条件(A)的充分性时, 开始我們限制在区域(D)是一矩形的情形; 为明确起見, 設它是一有限的閉矩形 $[a, b; c, d]$ 。在条件(A)适合的假定下, 我們来直接給出原函数的构成法。

这問題就是要在矩形 $[a, b; c, d]$ 上确定一个函数 $\Phi(x, y)$, 要它滿足下列二方程:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y). \quad (5^*)$$

实际上, 由函数 P 及 Q 的連續性就已經能从这里推出(2)式是所述函数的全微分了[169]。

在 $[a, b]$ 中任取两值 x_0 及 x , 当 y 固定于 $[c, d]$ 中的任意一值时将(5*)中第一个方程对于 x 从 x_0 积分到 x ; 我們得到

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \Phi(x_0, y)$$

現在如在(5*)的第二个方程中令 $x = x_0$ 而将它对于 y 在 $[c, d]$ 中任意两值 y_0 及 y 間积分, 則得

$$\Phi(x_0, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + \Phi(x_0, y_0).$$

因此, 所求函数 $\Phi(x, y)$ 必須有

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C \quad (7)$$

的样子, 其中 $C = \Phi(x_0, y_0) = \text{const.}$

現在剩下来就是要验证由公式(7)确定的函数(不論 C 是怎样的常

数)实际上的确满足两方程(5*)。对于第一个来说这是很明显的,因为(7)中右端的第一项对 x 的导数等于 $P(x, y)$ [293], 而后两项与 x 无关。现在将等式(7)对 y 微分并将莱布尼兹规律[469]应用到右端第一个积分:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y} dx + Q(x_0, y).$$

由(A), 这里可用 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 来代替 $\frac{\partial P}{\partial y}$; 则积分就变成差 $Q(x, y) - Q(x_0, y)$, 而导数 $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ 就恰等于 $Q(x, y)$, 这就是所要证明的。

注意如果开始时我们对 y 积分, 那对所求的原函数就会得到这样的一个式子:

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C. \quad (8)$$

与前一式子仅在形式上不同。

能懂得这一点是有益的: 在区域的某一点上固定了原函数的值, 我们借此就在原函数的一般表示式中选定了常数, 且已经得到了完全确定的单值原函数。

534 推广到任意区域的情形 现在我们考察一任意的(当然是通连的)区域(D), 它是由一个或几个分段光滑的曲线所围成, 并且可以有限或伸展到无穷远。以后我们假定这一区域是开的。在这种情况下它的每一点是内点[153]且它与某一个, 例如, 矩形的邻域都属于区域。因为前目推理可应用到这种邻域上来, 故当条件(A)在区域(D)的每一点的邻域中适合时(2)式就有原函数存在, 并且有相差为常数的无穷个原函数。然而, 要统一所有这些原函数使在整个区域(D)上得一单值的原函数并不是永远可能! 此处, 问题与区域本身的特性有关。

为了在一般情形下要保证这一单值原函数的存在, 必须给区域(D)一种特殊限制。这可以这样来表明: 不论在(D)中取一怎样的简单闭

路,用这一线路所围起来的内域必须整个属于区域(D)。换句话说,区域必须不包含有“洞”,甚至须不包含有点洞。有这种性质的通连区域称作单连的。

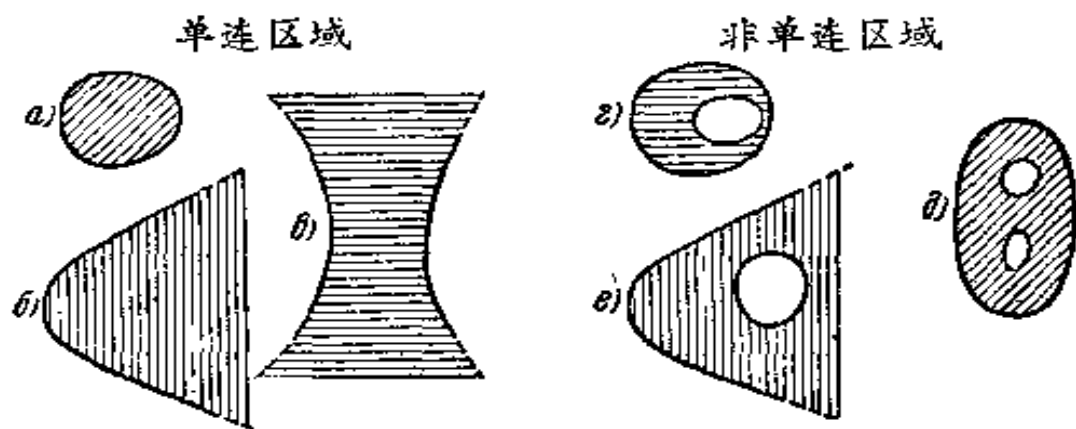


图 19

如果我们谈的是有限区域(即不伸展到无穷远的),则单连性的概念还可更简单地表为:区域必须是由唯一的一个闭路围成的。在图 19 中举出了一些单连与非单连区域的例子,其中 a), c), d) 是有限的,而 b), e), f) 是伸展到无穷远的。

设所考察的区域(D)是单连的;开始我们假定它是有限的,所以它单纯地是由一个分段光滑曲线(K)所围成的。我们将自包含在(D)内而拆成许多矩形的区域出发逐步对区域(D)进行建立原函数。

给定一任意小数 $\varepsilon > 0$ 后,我们可以用一个边长 $< \varepsilon$ 的正方形包围线路(K)的每一点使在它的范围内线路可用两种类型之一的显方程来表示[参照 213];而仅在拐角的地方有两个这样的曲线在这里接头。

由波雷尔预备定理[165],仅用有限个这样的正方形就可以掩盖整个线路(K)。这一正方形的有限锁链围成了某一闭区域($\tilde{D}$),全部在(D)内,且很明显地是可拆成许多矩形的。它是通连的*,因此与(D)一

* 如两点 M_0 及 M_1 属于($\tilde{D}$),则它们可以用一完全在(D)内的折线(L)相联结[153]。这一折线一般说来可能已超出($\tilde{D}$)的范围而落入上文所述的某些正方形内去了。但包含在某一正方形内的折线部分恒可用它的周围上的对应部分来代替。用这种方法就得到联结 M_0 及 M_1 的一折线($\tilde{L}$),完全在($\tilde{D}$)内。

样也是单连的; 区域(D)离开边界的距离 $\geq \varepsilon$ 的一切点根本都属于这一区域。

我們下面将指出如何对区域($\tilde{D}$)作原函数。为了要得到确定的原函数, 我們在属于($\tilde{D}$)的任一点 M_0 固定它的值。注意, 定义于两相重叠的区域上的两原函数在它們的公共部分上只能差一个常数 (因为它們差的偏导数为零, 173)。因此, 如果这两原函数只要在某一点处相重, 它們便在整个所述的公共部分上恒等。由此可見, 当 ε 趋近于零时, 我們真正能够逐步把原函数的定义延伸到整个区域(D)上而保持其单值性。

为了要做出区域($\tilde{D}$)上的原函数, 我們設想这一区域分成許多矩形, 彼此沿着垂直边互相挨靠在一起 (图 20, a)。在图 20, b 中我們画出了两个这种相邻的矩形 d_1 及 d_2 。在其每一个上面我們將作原函数, 設为 Φ_1 及 Φ_2 。沿矩形 d_1 及 d_2 的公共綫段 $\alpha\beta$, 它們只可能相差一常数, 因为我們只要在图中打了斜綫的矩形上作一任意原函数, 由前一目这一定是存在的, 如果我們回想一下上面这两个原函数的每一个与这一原函数沿 $\alpha\beta$ 真正只各相差一常数項, 那末这就很明显了。将原函数 Φ_1 或 Φ_2 之一改变一适当常数, 因此就可使它們沿綫段 $\alpha\beta$ 相重。

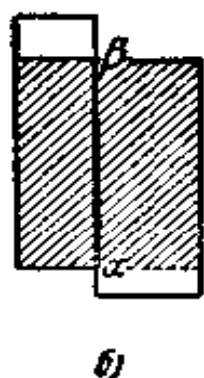
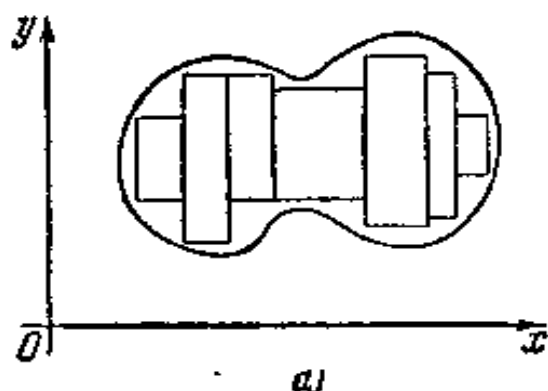


图 20

自点 M_0 所在的矩形出发来作一原函数, 且迫使原函数在这一点有預先固定的值。再在与它相邻的一些矩形上作原函数使通过它們的公共边界时不破坏連續性, 如此繼續下去。

現在我們想要說明: 区域(D)单连性的条件也同时使($\tilde{D}$)单连的条件究竟要它做什么。在图 20, a 中的一串矩形当对边界(K)較复杂

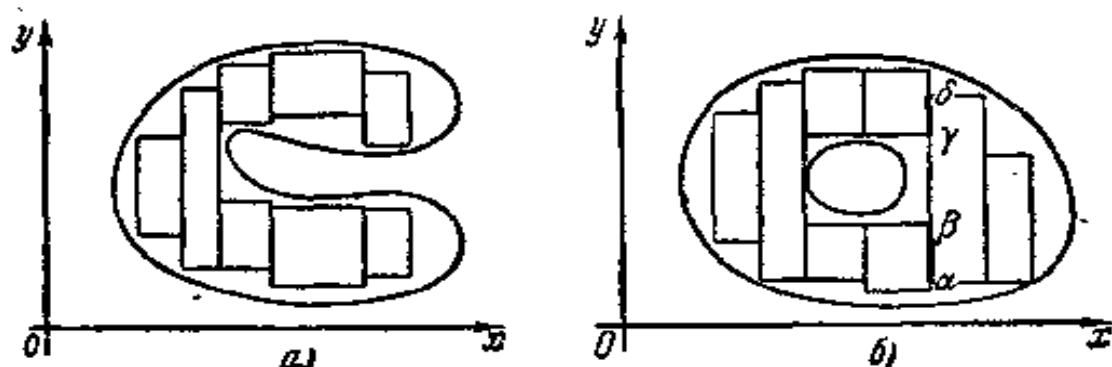


图 21

时也可能分叉，如图 21, a 所示；不过这并没有阻住原函数沿彼此分开的叉枝連續延伸。但若区域有一“洞”（参看图 21, b）而二分枝又重新合在一起时，则在合起来的第一个矩形上选取一原函数使通过两接头处 $\alpha\beta$ 及 $\gamma\delta$ 时同时保持連續性就不一定可能了！

区域 (D) 伸展到无穷远的情形可同样处理，只要从一些有限的部分区域出发，将原函数逐步延伸到整个区域 (D) 上去。

535 最終結果 整个在前面两目中所述的可总结为下一命题：

定理 2 在整个区域 (D) 上，(2)式要是两个变数的某单值函数的微分就必然适合条件 (A)，而在 (D) 是单連区域的假定下这也是充分的。

所以条件 (A) 常称作 (2) 式的“可积条件”。

现在如再回想一定理 1，就立刻可得下一結論：

定理 3 在区域 (D) 中积分道路的起点 A 与終点 B 不論怎样取定之后，如果曲綫积分 (1) 与积分道路的形状无关就必然适合条件 (A)，而在 (D) 是单連区域的假定下这也是充分的。

因此，最后我們找到了条件 (A) 是曲綫积分与道路无关的一个方便而又容易檢驗的判別法。用这一判別法，例如，就很容易将第 524 目問題 3), 4), 5), 6) 中所提出的积分进行分类，并可預見在附注中所指出的它們的特性。

以后我們要遇到这些所得結果的重要应用。在第 537 目中我們將

回到非单連区域的特殊情形。

536 沿閉路的积分 到現在为止我們考察了积分(1)

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy$$

并研究了其中与积分道路无关的一类重要情况。現在我們来考察积分

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy, \quad (9)$$

(L)是在区域(D)範圍內的任一閉路; 并提出在什么条件下这一积分恒

为零的問題。可以看出, 这一問題完全相当于上面所解決的問題: 若对已給微分式(2), 积分(1)与道路无关, 則积分(9)永远等于零, 反过来也是如此。

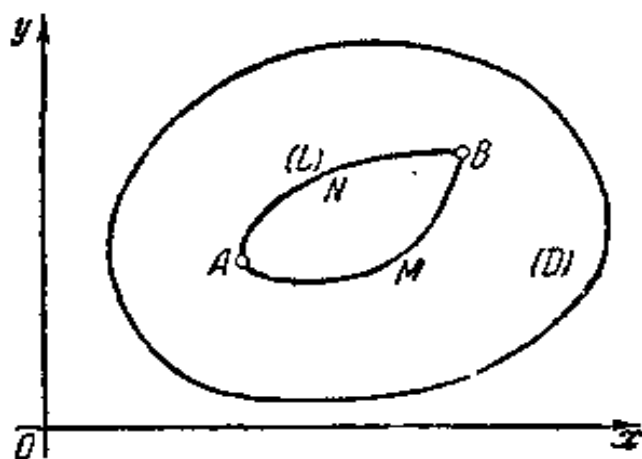


图 22

我們先假定积分(1)与道路无关。如(L)是区域(D)中的任一閉路(图 22), 則在它上面任取两点 A

及 B 将它分为两段(AMB)及(ANB)。因为沿这两曲綫的积分必須相等:

$$\int_{(AMB)} = \int_{(ANB)}, \quad (10)$$

于是,

$$\int_{(L)} = \int_{(AMB)} + \int_{(BNA)} = \int_{(AMB)} - \int_{(ANB)} = 0. \quad (11)$$

現在反过来, 設已知沿閉路的积分(9)永远等于零。取定两点 A 及 B , 用两道路(AMB)及(ANB)将它们联結起来, 它們組成一閉路

$$(L) = (AMBNA).$$

則我們先写好(11), 然后就能推出(10)。

我們着重指出, 这里所說的閉路(L), 包括“自身相交”的路綫。如果道路 AMB 及 ANB 彼此相交, 那么在剛才所引导的推理中就会得

出这种曲綫。然而，如下面預备定理所示，整个的討論可限于沿简单（即不自身相交）閉路上的积分。

預备定理 如积分 (9) 取在沿不論怎样的简单（即不自身相交）閉路上永等于零，則它即使取在任何自身相交的閉路上也将为零。

由第 525 目中所建立的預备定理，只要证明对任一自身相交的閉折綫这一断言成立就够了。設 (L) 是这样的一折綫，有一确定的方向。从它上面的某一点 M_0 出发并順着折綫描画这一折綫到第一个自身相交处——点 M_1 ，丢掉所得的閉折綫 (L_1) 后，延长路徑 M_0M_1 到新的自身相交处，这又可分出一閉折綫 (L_2) ，一直这样下去。經過有限步后折綫 (L) 就拆成有限个不自身相交的閉折綫

$$(L_1), (L_2), \dots,$$

沿它們上面的积分已知为零。这就是說，沿折綫 (L) 它也等于零，这就是所要求证的。

因此，我們就证明了下面有用的

定理 4 要曲綫积分 (1) 与道路无关，必要且充分的条件是积分 (9) 沿任何閉路都等于零。如果只限于简单（即不自身相交）閉路的情形条件依旧是充分的。

現在可以看出，要判断积分 (9) 沿閉路是否为零可以用定理 3 中所述积分与道路无关的同一判別法：

定理 5 要积分 (9) 不論取在区域 (D) 範圍內的任何閉路上恒为零就必須适合条件 (4)，而在单連区域 (D) 时它也是充分的。當我們仅限制于简单（即不自身相交）的閉路时，这一条件依然是必要的。

以后 [576]，我們具备了更深入的工具（重积分，格林公式）时，我們还要回到这一目中所討論的一些問題，并可用更經濟的方法重新得到若干这里所建立的結果。

537 非单連区域或有奇点的情形 在本节中所发展的并与利用可积条件 (4) 有关的全部理論建立在下面两假定上：1) 所考察的区域

(D) 是单連的, 即沒有“洞”, 2) 函数 P 及 Q 与其导数 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 都在区域 (D) 中連續。如果这些条件被破坏了, 則一般說来上面所叙述的断言就不能成立。来分析这所表明的特性就是本目的目的。

我們注意, 破坏連續性条件 2) 的“奇”点, 如果將它們从区域中撤开, 則也可解說为一种点的“洞”。因此, 問題就化为对区域 (D) 的討論, 在它里面連續性的一切要求与条件 (A) 都适合, 然而有一个或几个点的或非点的“洞”。并且, 为了明确起見, 在以后的叙述中我們想只限制在点“洞”即奇点的情形。一般情形可完全同样地处理。

开始我們假定, 区域 (D) 含有一个奇点 M (而沒有其它的“洞”)。在这一区域中取一簡單閉路 (L), 并考察积分 (9)

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy.$$

如这一閉路沒有包圍着奇点, 則与以前一样积分等于零。而如点 M 在閉路 (L) 的內面, 則积分可能就不是零了。

但是, 非常值得注意的, 沿各种可能圍繞点 M 的所述类型的閉路而取正向 [523] 其积分彼此皆相等。

要证明这, 我們考察两条圍繞点 M 的分段光滑的曲綫 (L_1) 及 (L_2)。

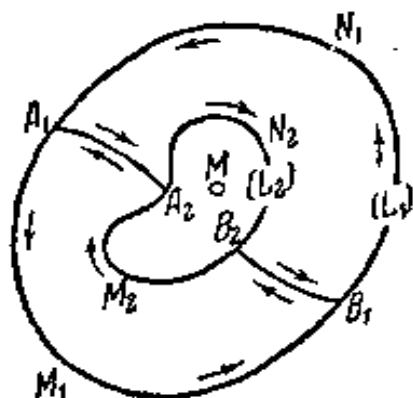


图 23

可以认为它們互不相交, 因为在相反的情形下, 我們可以引一包圍 (L_1) 及 (L_2) 的第三条閉路 (L_3) 而又与它們都不相交者, 并分別考察閉路偶 (L_1), (L_3) 及 (L_2), (L_3)。

曲綫 (L_1) 与 (L_2) 在一起形成了夹在它們之間的环形区域 (Δ) 的边界 (图 23)。用两条截綫 (A_1A_2) 及 (B_1B_2) 將这一区域分成两个已經是单連了的部分 (Δ') 及 (Δ'')。則我們就可写:

$$\int_{(A_1M_1B_1)} + \int_{(B_1B_2)} + \int_{(B_2M_2A_2)} + \int_{(A_2A_1)} = 0$$

及

$$\int_{(B_1 N_1 A_1)} + \int_{(A_1 A_2)} + \int_{(A_2 N_2 B_2)} + \int_{(B_2 B_1)} = 0.$$

将这些积分相加时, 在截线上所取的相反方向积分互相对消, 得

$$\int_{(A_1 M_1 B_1 N_1 A_1)} + \int_{(A_2 N_2 B_2 M_2 A_2)} = 0,$$

于是, 最后,

$$\int_{(A_1 M_1 B_1 N_1 A_1)} = \int_{(A_2 M_2 B_2 N_2 A_2)} \quad \text{或} \quad \int_{(L_1)} = \int_{(L_2)},$$

且后面这两积分都是沿正向取的。我们的断言得以证明。

以 σ 表示所有类似积分的公共值, 它称作对应于点 M 的循环常数*。

我们现在来证明, 若 (L) 是区域 (D) 中的任一甚至是自身相交的但不通过奇点 M 的闭路, 则

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy = n\sigma, \quad (12)$$

其中 n 是一整数 (正的, 负的或零)。对多边形的闭路这是很明显的, 因为它可拆成有限个不自身相交的闭多边形线路, 沿它们的每一个, 积分都等于零或 $\pm\sigma$ 。在一般情形时我们又利用在第 525 目中建立的预备定理, 并自内接于曲线的折线出发, 采取极限过程。因为形如 $n\sigma$ 的式子 (当 $\sigma \neq 0$ 及 n 为整数时) 只能趋近于同一形状的有限极限 (只要数 n 一直不变), 故公式 (12) 对任何闭路 (L) 都是正确的。

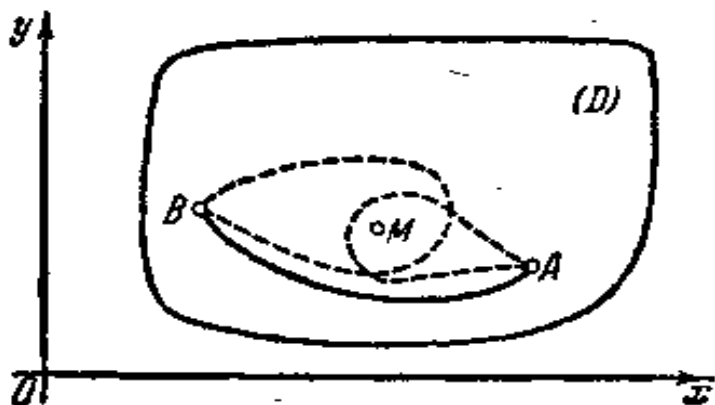


图 24

现在我们考察沿一曲线的积分, 这一曲线是联结区域 (D) 中的

* 对应于真正的——非点的——“洞”, 其循环常数可完全同样地定义。

两点 $A(x_0, y_0)$ 及 $B(x_1, y_1)$ 而成的但不通过奇点。如 $(AB)_0$ 是一条这样的曲线，而 (AB) 是任何另外一条，则 (AB) 及 $(BA)_0$ 在一起就组成一闭路，故由 (12)，

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy + \int_{(BA)_0} Pdx + Qdy = n\sigma,$$

于是，
$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy = \int_{(AB)_0} Pdx + Qdy + n\sigma.$$

这里，积分就真正与积分道路有关了，但也只是加上循环常数的一整数倍。在曲线 $(AB)_0$ 上面加上若干个围绕点 M 的圈子（图 24），可以使倍数 n 为任一事先选定的整数值。

换句话说，在这种情形下，当 A 及 B 已知时记号

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} Pdx + Qdy$$

就不是（如 $\sigma \neq 0$ ）单值的了，它有一形如 $n\sigma$ 的项没有确定，其中 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

若点 B 用一动点 $N(x, y)$ 来代替，则积分

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$$

与以前一样是式子 $Pdx + Qdy$ 的原函数，连续（当然除掉点 M ）而多值。

理解这里所讨论的情况与以前所研究的 [531, 533, 534] 本质上的不同是很重要的。原函数的表示式中本来含有一任意常数，如果把这也算进来的话，那末在以前我们也可说原函数的“多值性”。然而，要得到在整个所讨论的区域中的一单值函数，只要固定这一常数就够了；在那里，在多值原函数的各“分枝”间并没有什么强制在一起的联系。而这里的“分枝”，相差一循环常数的倍数，就不能孤立地看待，因为当绕

奇点轉动时,它們就連續地彼此轉变了*。

为了說明此处整个所述的,我們举一例題:

$$P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

这些函数与它們的导数除坐标原点 $O(0, 0)$ 外在整个平面上連續,因此原点是唯一的奇点。立刻可以驗证,可积条件到处(了解为除原点外)

适合:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

很容易計算出,沿以原点为中心的任何圓上的正向积分

$$\int_{(L)} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

等于 2π 。这就是对应于原点的循环常数。

很容易猜到微分式

$$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

的原函数是幅角 θ , 如以 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 代入馬上就可以看出来。因此,原函数的一般形状是 $\theta + C (C = \text{const})$ 。然而,在平面中任一异于原点的已知点处,我們不論以幅角 θ 的任何值出发,如追令这点圍繞原点不論在那一方向轉 n 轉,則 θ 角,因为是連續变动的,当点回到出发位置时,增加了循环常数的一倍数 $\pm 2n\pi$ 。所以,如果此时我們在整个平面中或包含原点在內面的平面的一部分中(当然,原点本身除外)来考察原函数,則就必須认为它是多值的,并认为这是它的不可分割的特性:它的相差 2π 整数倍的分枝在某种意义下是不可分的。

讀者不难推广上述研討到当有若干个奇点或“洞”时的情形。例如,設有 k 个奇点

$$M_1, M_2, \dots, M_k.$$

* 我們在复变数多值函数的情形[例如比照 431]已經处理过这类现象, 不难看出,这也好,那也好,都与平面的性质有关。

如 A 及 B 是区域中两(不同于奇点的)点, 以 $(AB)_0$ 表联结这两点(且不通过奇点)的任一确定的曲线, 则沿任何类似的曲线 (AB) 的积分其一般公式为

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy = \int_{(AB)_0} Pdx + Qdy + n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + \cdots + n_k\sigma_k.$$

这里 $\sigma_i (i=1, 2, \cdots, k)$ 是对应于点 M_i 的循环常数, 亦即积分

$$\int_{(L_i)} Pdx + Qdy$$

的值, 其中 (L_i) 是一包含奇点 M_i 在其内而不包含其它奇点的一简单闭路, 且以正向而取的。系数 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 彼此无关, 可取任何整数值。

538 高斯积分 在某些数学物理问题中必须要考察一个第一型曲线积分称作高斯积分者:

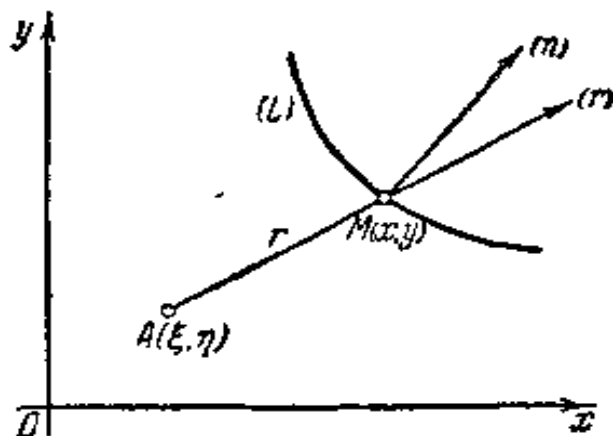


图 25

$$g = \int_{(L)} \frac{\cos(r, n)}{r} ds.$$

这里以 r 表联结曲线 (L) 外一点 $A(\xi, \eta)$ 与曲线上动点 $M(x, y)$ 的向量的长(图 25), (r, n) 表达向量与曲线在点 M 处的法线间的夹角。

因为点 A 不动, 故积分号下的式子 $\frac{\cos(r, n)}{r}$

是点 M 的坐标 x, y 的函数。我们现在要将高斯积分表成第二型曲线积分。如 (x, n) 与 (x, r) 是 x 轴的正向与法线及位径向量的方向间的夹角, 则显然,

$$(r, n) = (x, n) - (x, r),$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad \cos(r, n) &= \cos(x, n)\cos(x, r) + \sin(x, n)\sin(x, r) = \\ &= \frac{x-\xi}{r} \cos(x, n) + \frac{y-\eta}{r} \sin(x, n). \end{aligned}$$

将这代入高斯积分中, 就将它化为

$$g = \int_{(L)} \left[\frac{y-\eta}{r^2} \sin(x, n) + \frac{x-\xi}{r^2} \cos(x, n) \right] ds.$$

如果利用第 528 日公式(14), 则就得到积分 g 的所求第二型曲线积分表示式:

$$g = \pm \int_{(L)} \frac{y-\eta}{r^2} dx - \frac{x-\xi}{r^2} dy,$$

其中正负号对应于法线方向的选取法。

函数 $P = \frac{y-\eta}{r^2}$ 及 $Q = -\frac{x-\xi}{r^2}$ 与它们的导数除点 A (此处 $r=0$) 外在整个 xy 平面中皆连续。在异于 A 的一切点处, 可积条件都告满足。事实上,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y-\eta}{r^2} \right) = \frac{r^2 - 2(y-\eta)^2}{r^4} = \frac{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}{r^4},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x-\xi}{r^2} \right) = -\frac{r^2 - 2(x-\xi)^2}{r^4} = \frac{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}{r^4},$$

所以这两导数相等。

若曲线 (L) 是闭的, 但不包围点 A (亦不通过它), 则必 $g=0$ 。若闭曲线 (L) 包围点 A , 则高斯积分可能异于零, 但如我们在前一目中已经看到的, 对一切这样的曲线它的值必须是相同的。为了要计算这一值, 我们取中心在点 A 半径为 R 的圆周作为曲线 (L) 。则

$$r=R \text{ 且 } \cos(r, n)=1$$

(如认为法线及位径向量有相同的方向), 所以

$$g = \frac{1}{R} \int_{(L)} ds = \frac{1}{R} \cdot 2\pi R = 2\pi.$$

因此, 对每一将点 A 包围在内的闭曲线 (L) , 如与在圆的情况下我们所做的一样, 将法线朝向外面, 则有

$$g = \int_{(L)} \frac{\cos(r, n)}{r} ds = 2\pi.$$

如事先将高斯积分的几何意义弄明白, 则预先就可看到所得的结果。它的几何意义是: g 是从点 A 能看到曲线 (L) 的角的度量 (如果是环行曲线时, 取自 A 出发的位径向量所描画出来的有符号的角)。

为了要揭露这一点, 我们开始先假定曲线 (L) 与每一自 A 出发的射线相交于不多于一点 (图 26)。又设曲线的法线 n 朝向与点 A 相反的一面, 故

$$0 < (r, n) < \frac{\pi}{2}.$$

在曲线 (L) 上取一元素 ds 并来确定从点 A 看这一元素的角度。如 M 是这元

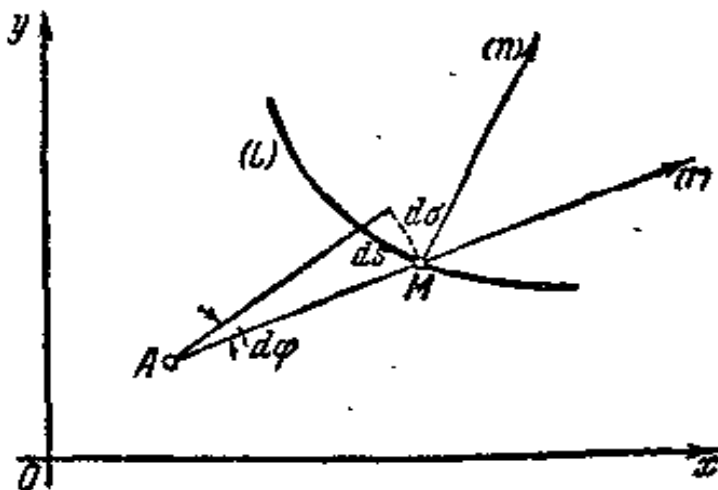


图 26

素上的(例如,起)点,繞 A 以 AM 为半径作一圓并将元素 ds 射影到这一圓上。設圓周上元素 ds 的射影为一元素 $d\sigma$ 。因为它们間的夹角(认为这两元素差不多是直綫的)等于角 (r, n) , 則

$$d\sigma = \cos(r, n) ds.$$

另一方面,显然

$$d\sigma = r d\varphi,$$

其中 φ 是对应于圆弧 $d\sigma$ 的中心角, 即从点 A 所看到元素 ds 的角。于是对这一可以看見的元素角有表示式

$$d\varphi = \frac{\cos(r, n)}{r} ds.$$

最后, 将所有元素角相加, 我們得到对整个曲綫 (L) 可以看見的角恰恰可表作积分 φ 。

如曲綫与自点 A 出发的射綫相交不止一点, 但可将它分为若干部分, 使每一部分与这些射綫只相交于一点, 那末只要将对应于这些部分的高斯积分相加起来就可以了。

在曲綫 (L) 上取定一确定的方向, 而我們將法綫朝着 $\rightarrow$ 一方向, 例如, 使切綫的正向与它的夹角为 $+\frac{\pi}{2}$ 。則某些部分曲綫的法綫是向着与点 A 相反的一面, 高斯积分就給出一正的可見到的角, 而在另外一些部分法綫向着与 A 点的同一面, 得出的可見到角是負的。一般說来, 在这种情形下高斯积分給出可見到角的代数和。并且就是这一和称作对整个曲綫 (L) 的可見到的角, 因此我們了解可見到角为視綫从曲綫的起点轉到終点的全部变量。

如曲綫是閉的且圍繞着点 A , 則立刻就很清楚, 曲綫的可見角为 2π 。如閉曲綫不包圍点 A , 則可見角由于符号不同彼此相消結果加起来等于零。在简单的情形下, 如图 27 所示,

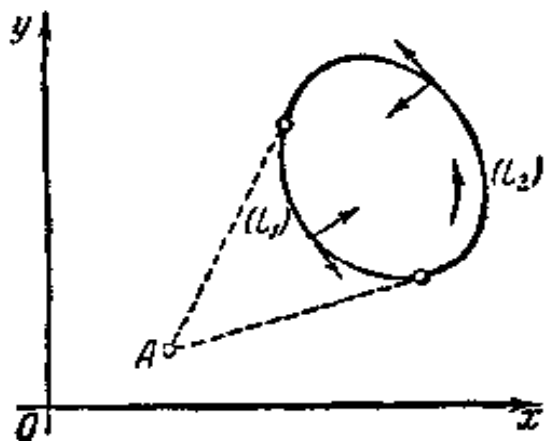


图 27

曲綫 (L) 可拆成两部分: (L_1) 及 (L_2) , 从 A 看来張同一角; 但对曲綫 (L_1) 这一角是正的, 而对 (L_2) 是負的。

这整个与上面所述完全相符合。

附注 从高斯积分的几何解說可以观察到, 当閉曲綫 (L) 通过 A 点且在此点有切綫时, 积分的值为 π 。如 A 点是一角点且在此点单側切綫間的交角为 α , 則 α 亦就是高斯积分的值。如要用分析法建立所述結果就应该先从 (L) 分割掉点 A 的某一邻域, 再紧縮这一邻域而变到极限。

539 空間的情形 整个上面的研究也可重复到空間的情形。

設有三函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ 定义于并連續于某

一空間的区域(V), 我們来討論沿在这区域中的任一曲綫(AB)而取的曲綫积分:

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz. \quad (13)$$

第 531 及 532 目中的推理立刻可不加改变搬到这里来。因此, 这里就有类似于第 530 目中定理 1 的一定理成立: 积分(13)与积分道路无关的問題可化为微分式

$$Pdx + Qdy + Rdz \quad (14)$$

是否为确切微分的問題, 亦即是否有一(“原”)函数 $\Phi(x, y, z)$ 存在, 其全微分

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz$$

与表示式(14)相同。

順便注意到, 如这样的函数存在, 則积分(13)就可表作它的两有限值的差:

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz = \Phi(B) - \Phi(A) = \Phi(M) \Big|_A^B \quad (15)$$

[比較 532(6*)]。

与前面一样, 以下就产生了确切微分判別的問題。設在区域(V)中有連續导数 $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}$.

于是, 如果(14)式是某一函数 $\Phi(x, y, z)$ 的微分, 故等式

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (16)$$

成立, 則

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}, & \frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z}, & \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}, \\ \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x}, & \frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y}. \end{aligned}$$

由假设,所有这些导数都连续,于是[181]等式

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad (\text{B})$$

皆成立。因此,不论(V)是怎样的区域,要使(14)式是确切微分因此积分(13)与道路无关,条件(B)是必要的。

转到这一条件充分性的问题上来,我们这里限制在区域(V)是长方体

$$(V) = [\alpha, b; c, d; e, f]$$

的情形。这里我们重复第 533 目的讨论。

为了要决定条件(16)中的函数 $\Phi(x, y, z)$, 我们将第一个式子对于 x 从 x_0 积分到 $x(a \leq x_0, x \leq b)$, 而将 y 及 z 任意地固定在对应的区间中, 我们得

$$\Phi(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \Phi(x_0, y, z).$$

在(16)的第二个方程中令 $x = x_0$ 并对 y 从 y_0 积分到 $y(c \leq y_0, y \leq d)$, 得

$$\Phi(x_0, y, z) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy + \Phi(x_0, y_0, z).$$

最后, 在(16)的第三个方程中令 $x = x_0, y = y_0$, 而对 z 从 z_0 积分到 $z(e \leq z_0, z \leq f)$:

$$\Phi(x_0, y_0, z) = \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz + \Phi(x_0, y_0, z_0).$$

显然, 常数值 $\Phi(x_0, y_0, z_0)$ 是依然可任意的, 如表作 C , 则最后得所求函数的如下表示式:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) = & \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy + \\ & + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz + C. \end{aligned} \quad (17)$$

在必要时如应用莱布尼兹规则, 现在很容易验证这一函数确乎满足(16)的所有条件。

这种原函数的直接构成法使我们相信, 至少对长方体的区域(V), ——要使(14)式是确切微分, 也就是说, 要使积分(13)与道路无关, 条件(B)是充分的。

要将这里推广到一般情形是可以的, 只要区域(V)满足某一条件(与平面区域单连性的条件相类似)。但因为这时要进行所有的推理是很困难的, 我们暂时丢开它。以后[616], 在熟悉了曲面积分与斯托克斯公式后, 我们再回到这些问题来。

最后, 我们注意, 第 536 目中全部所述的对空间的情形完全有效。因此, 特别: 要积分(13)与道路无关, 必要且充分地要对应的积分

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz$$

沿任何闭(且不自身相交的)路而取者等于零。

540 例 1) 沿任何闭路所取的曲线积分

$$\int_{(L)} (x^2 + y^2)(x dx + y dy)$$

是否为零?

答 为零, 因为积分号下的式子显然是函数 $\frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2$ 的全微分。

2) 不参照条件(A), 说明积分

$$\int_{(AB)} x dy - y dx$$

与积分道路有关与否。

答 有关(一般说来)。因为沿一不自身相交的闭路, 这类积分代表由这一闭路所范围的区域面积的两倍[526], 并且因此异于 0。

3) 对下列各微分式判定原函数的存在性并求出来:

(a) $(4x^3y^3 - 3y^2 + 5)dx + (3x^4y^2 - 6xy - 4)dy,$

(б) $(10xy - 8y)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy,$

(в) $(4x^3y^3 - 2y^2)dx + (3x^4y^2 - 2xy)dy,$

(г) $[(x + y + 1)e^x - ey]dx + [e^x - (x + y + 1)ey]dy.$

解 借可积分条件之助可知, 在(a), (6), (r)三情形下是确切微分, 而在情形(B)时不是的。

(a) 由公式(8), 令 $x_0 = y_0 = 0$, 有

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= \int_0^x 5dx + \int_0^y (3x^4y^2 - 6xy - 4)dy + C = \\ &= 5x + x^4y^3 - 3xy^2 - 4y + C.\end{aligned}$$

用公式(7)亦可同样得出:

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= \int_0^x (4x^3y^3 - 3y^2 + 5)dx + \int_0^y (-4)dy + C = \\ &= x^4y^3 - 3xy^2 + 5x - 4y + C.\end{aligned}$$

(6) 取 $x_0 = y_0 = 0$ 后可很方便由公式(8)计算出来, 因为第一个积分成为零了:

$$\Phi(x, y) = \int_0^y (5x^2 - 8x + 3)dy + C = (5x^2 - 8x + 3)y + C.$$

(r) 由上述任一公式得:

$$\Phi(x, y) = (x + y)(e^x - e^y) + C.$$

4) 求证条件 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 相当于恒等式

$$\int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy$$

(假设函数 $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 皆连续)。

5) 有时原函数的求法(如果可积条件满足)可与在 533 中所做的有所不同。用例 3)(a) 来说明这点。

由条件
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4x^3y^3 - 3y^2 + 5,$$

对 x 积分, 求得 Φ 的表示式 $x^4y^3 - 3xy^2 + 5x$, 但可相差一“积分常数”。这常数与我们对 x 所积分的 x 无关, 但可与“参数” y 有关; 故我们可将它取为 $\varphi(y)$ 形状。因此,

$$\Phi = x^4y^3 - 3xy^2 + 5x + \varphi.$$

当将 Φ 代入条件

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 3x^4y^2 - 6xy - 4$$

时, 得到

$$\frac{d\varphi}{dy} = -4,$$

于是 $\varphi = -4y + C$ 。最后

$$\Phi = x^4 y^3 - 3xy^2 + 5x - 4y + C.$$

6) 如不注意到可积条件不合适而将同一方法应用到例 3) (B) 上去, 则在决定 φ 时得条件

$$\frac{d\varphi}{dy} = 2xy.$$

这显然是矛盾的, 因为右端的式子包含有 x , 而同时 φ 又与 x 无关!

7) 一般地来弄清楚在实践上述方法时, 可积条件究竟起怎样的作用, 是很有趣的。

将等式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y)$$

对 x 积分, 与在特殊例子中一样, 得

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \varphi(y).$$

在决定 $\varphi(y)$ 时第二个等式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y)$$

$$\text{给出条件} \quad \frac{d\varphi}{dy} = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x P(x, y) dx = Q(x, y) - \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y} dx. \quad (18)$$

若右端式子实际上与 x 无关 (即当 $y = \text{const}$ 时不因 x 改变而改变), 则单纯地对 y 求积分就得到 φ 的式子。而如 (18) 式中包含 x , 则对 φ 所得的条件就是矛盾的, 因为 φ 必须与 x 无关。因此, 成功与否根本决定于 (18) 式是否与 x 有关, 而这非常简单地从 (18) 式对 x 的偏导数是否为零来判定。但这一导数等于 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, 因此条件 (A) 满足, 也只要它满足就能保证成功!

8) 函数 $F(x, y)$ 应满足怎样的条件才能使式子

$$F'(x, y)(x dx + y dy)$$

是一确切微分?

$$\text{答} \quad x \frac{\partial F}{\partial y} = y \frac{\partial F}{\partial x}.$$

9) 利用原函数的曲线积分表示式 [531(4)], 并一次取折线 ACM 而另一次取 ADM (图 28) 作为积分道路来推出第

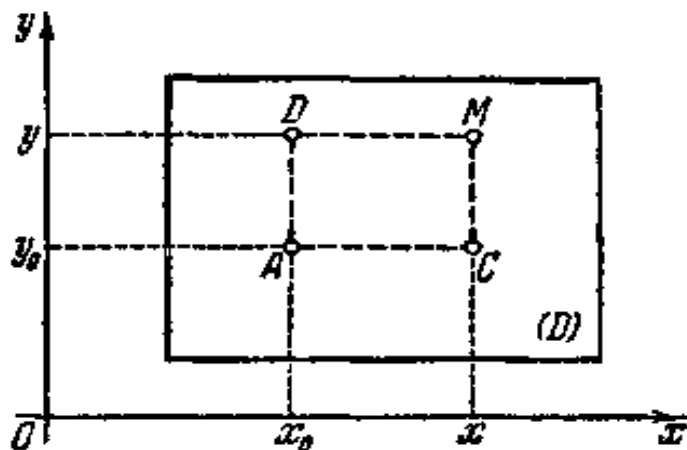


图 28

533 目中原函数的公式(7)与(8)。

10) 为了给出第 531 目中求原函数的一般公式(4)的另一应用例题, 我们由这一公式重新来解问题 3) (a), 取联结坐标原点及平面中一任意点 (x, y) 的直线段为积分道路(我们用另法来表示它的坐标是为了使不与积分道路上动点的坐标 x, y 相混淆)。

在积分

$$F(x', y') = \int_{(0,0)}^{(x', y')} (4x^2y^3 - 3y^2 + 5)dx + (3x^2y^2 - 6xy - 4)dy$$

中应以 $\frac{y'x}{x'}$ 代替 y (因为 $y = \frac{y'x}{x'}$ 恰为积分道路的方程), 且这就将问题变成计算对 x 的自 0 到 x 的普通定积分。结果得

$$\begin{aligned} F(x', y') &= \int_0^{x'} \left(\frac{7y'^3x^6}{x'^3} - \frac{9y'^2x^2}{x'^2} + 5 - \frac{4y'}{x'} \right) dx = \\ &= x'^4y'^3 - 3x'y'^2 + 5x' - 4y', \end{aligned}$$

除记号外, 这与上面求得的式子全同。

11) 确定一区域使表示式

$$Pdx + Qdy = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}dx + \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}dy *$$

在其中是一全微分, 并对这一区域求出其原函数。

解 我们有(当 $y \neq 0$ 时):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1 \right) = \frac{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{aligned}$$

且在第一式中正负号应取得与 y 的符号相一致。因此, 可积条件仅在 $y > 0$ 时才能适合。

因为这样的关系, 我们限制在上半平面中, 在还原原函数时我们利用与 10) 中相同的方法, 但将直线段方程取作参数形式:

$$x = xt, \quad y = y't \quad (0 \leq t \leq 1).$$

则

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x', y')} Pdx + Qdy = \\ &= \int_0^1 (x'\sqrt{\sqrt{x'^2 + y'^2} - x'} + y'\sqrt{\sqrt{x'^2 + y'^2} + x'})\sqrt{t} dt = \end{aligned}$$

* 与通常一样, 符号 $\sqrt{\quad}$ 代表算术根。

$$= \frac{2}{3} (x' \sqrt{\sqrt{x'^2 + y'^2} - x'} + y' \sqrt{\sqrt{x'^2 + y'^2} + x'}).$$

12) 令

$$P dx + Q dy = \frac{1}{2} \frac{x dy - y dx}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2} \quad (A, C, AC - B^2 > 0).$$

验证适合条件(A)并求对应于奇点(0,0)的循环常数。

提示 沿椭圆

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1 \quad (E)$$

来计算曲线积分最为简便,因为,这样,

$$\int_{(E)} P dx + Q dy = \frac{1}{2} \int_{(E)} x dy - y dx$$

就简单地成为[528, (10)]这椭圆的面积,这面积为我们大家所熟知[330, 6)]。比较 524, 9)。

13) 如可积条件满足,则有时即使有奇点时,曲线积分仍可与道路无关,而原函数为单值的。例如:对以坐标原点为奇点的式子

$$\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2},$$

例如,函数 $\log(x^2 + y^2)$ 就是一原函数,它与它的导数在整个平面中(除原点外)单值且连续。读者立刻自己可以想到,这是由于对应于原点的循环常数等于零的缘故。

14) 将微分式

$$z \left(\frac{1}{x^2 y} - \frac{1}{x^2 + z^2} \right) dx + \frac{z}{xy^2} dy + \left(\frac{x}{x^2 + z^2} - \frac{1}{xy} \right) dz$$

积分起来。

解 “可积条件”很容易验证:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{z}{x^2 y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{1}{xy^2}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{x^2 y} + \frac{z^2 - x^2}{(x^2 + z^2)^2}.$$

将公式(17)中的 x 及 z 的地位对调后按所得公式来进行计算,并令 $z_0 = 0$, 而 x_0 及 $y_0 > 0$. 则三个积分中只剩下一个了,立刻就得到

$$\Phi(x, y, z) = \int_0^z \left(\frac{x}{x^2 + z^2} - \frac{1}{xy} \right) dz + C = \operatorname{arctg} \frac{z}{x} - \frac{z}{xy} + C.$$

541 物理问题的应用 根据所述理论我们再回到若干以前讨论过的力学及物理学领域内的问题。

1) **力场的功** 在第 520 目中我们已经看到,当质量为 1 的质点自位置 A 位移到位置 B 时,力场的功可作曲线积分[参看 521(3)];

$$\mathbf{A} = \int_{(AB)} X dx + Y dy, \quad (19)$$

其中 $X = X(x, y)$ $Y = Y(x, y)$ 是力场强度在坐标轴上的射影, 而 (AB) 表质点的轨道。

很自然地要阐明在什么样的条件下, 场中力的功仅与点的开始位置与终止位置有关而与轨道的形状无关。显然这一问题相当于曲线积分(19)与积分道路无关的问题。故所求条件为等式

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad (20)$$

这时当然假设由场所范围的区域是单连的且无奇点。

这同一条件也可表为这种形式: 当质点由一个位置位移到另一位置时, 场中力的功当且仅当元素功

$$X dx + Y dy$$

为某一单值函数 $U(x, y)$ 的全微分时, 就与位移轨道的形状无关。这一函数通常称为力函数或位势函数; 在这函数存在的情况下, 场本身名叫位势场。

当点自位置 $A(x_0, y_0)$ 位移到位置 $B(x_1, y_1)$ 时, 位势场的功就等于[参考 532(6)]力函数对应的增量。

$$U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0) = U(B) - U(A).$$

作为一例题, 我们来考察牛顿引力场。如在坐标原点 O 处放一质量 μ , 而在点 A 处放一质量 1 , 则后面这一点就被 O 以一力 $\vec{F}$ 向中心吸引, 其大小等于

$$F = \frac{\mu}{r^2},$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为原点到点 A 的距离。因为这一力与坐标轴间夹角的余弦为 $-\frac{x}{r}$ 及 $-\frac{y}{r}$, 故力 $\vec{F}$ 在坐标轴上的射影可表作:

$$X = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad Y = -\frac{\mu y}{r^3}.$$

直接可以看清楚, 牛顿场是位势场, 因为式子

$$-\frac{\mu x}{r^3} dx - \frac{\mu y}{r^3} dy \quad (21)$$

是函数

$$U = \frac{\mu}{r}$$

的微分, 而 U 在这里就起位势函数的作用; 它称为(点 O 的场的) 牛顿位势。尽管有一奇点(坐标原点)存在, 这一函数是单值的; (21)式沿一闭路的积分即使包围原点时也为零(此处“循环常数”等于零)。

当点自位置 A 移到位置 B 时, 场的力做功

$$A = \frac{\mu}{r_B} - \frac{\mu}{r_A},$$

其中 r_A 及 r_B 是中心到点 A 及 B 的距离。当将点 B 移到无穷远时, 功就成为 $-\frac{\mu}{r_A}$; 如点从无穷远处移到位置 A 时, 它就恰恰等于牛顿位势的大小 $\frac{\mu}{r_A}$ 。[比照第 524 目, 13)。]

在第 524 目练习 14) 及 15) 中所考察的场是非位势场的例子。

整个这里所述的可很容易地移到空间力场的情形去。

2) 平面中流体的定常流动 如以 u, v 表向量速度沿坐标轴的分量, 则, 在第 529 目中我們已看到, 在单位时间内通过闭路 (K) 流到里面去的流量等于

$$Q = \int_{(K)} v dx - u dy$$

[参看 529 (18)]。在不可压缩流体的情况下, 当没有泉源或漏洞时, 这一积分恒等于零。由此推得, 向量速度的分量 u, v 必须适合条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

因此积分号下的式子 $v dx - u dy$ 就有一原函数 $\varphi(M) = \varphi(x, y)$, 在流体力学中称为流函数。

如取联结点 A 及 B 的任一曲线 (AB) , 则如已经知道的 [529 (18)], 在单位时间内通过它流向确定的一侧流量可用积分

$$Q = \int_{(AB)} v dx - u dy$$

来表示, 且曲线 (AB) 的方向必须是这样, 使朝向所提到的这一侧的法线与正的切线方向交于一角 $+\frac{\pi}{2}$ 。现在我們看到, 这一量恰恰就等于流函数在曲线两端的值的差 $\varphi(B) - \varphi(A)$ 。

3) 气体所吸收的热 现在我們重新来考虑 [529, 2)] 一问题, 就是一已知质量 (例如, 1 千克) 的理想气体当改变它的状态时它所得到的热量。如果气体状态变化过程的本身用 v_p 平面中的曲线 (K) 来说明, 则, 如在第 529 目 2) 中已见的, 这一热量可表作曲线积分 [参看该处 (19)]:

$$U = \int_{(K)} \frac{c_p}{R} p dv + \frac{c_v}{R} v dp$$

(我們保持原来的記号)。

如果与通常一样, 认为气体热容量 c_v 及 c_p (分别当体积固定及当压力固定时) 不变, 则可积条件这里显然不成立。实际上, 因为 $c_p \neq c_v$,

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{c_p}{R} p \right) = \frac{c_p}{R} \neq \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{c_v}{R} v \right) = \frac{c_v}{R}.$$

由此推得, 热量 U 不是气体状态的函数, 而与如何得到这一状态的过程有关。甚至在一个循环过程中气体回到它最初状态时, 气体可能得到(或失去)若干热量。

如在元素热量的式子

$$dU = \frac{c_v}{R} p dv + \frac{c_p}{R} v dp$$

中乘上 $\frac{1}{T}$, 其中 $T = \frac{pv}{R}$ 是气体的绝对温度, 则得一式子

$$\frac{dU}{T} = c_p \frac{dv}{v} + c_v \frac{dp}{p},$$

很清楚这是一全微分。其原函数为

$$S = c_p \log v + c_v \log p.$$

曲线积分

$$\int_{(v_0, p_0)}^{(v, p)} \frac{dU}{T}$$

已经不再与联结定点 (v_0, p_0) 与动点 (v, p) 的积分道路有关, 且仅与上面所示的函数 S 只差一常数。由这一积分决定某一物理量(所谓“熵”), 它已经是气体状态的函数且在热量计算中起重要的作用。

§ 4 有界变差函数

542 有界变差函数的定义 本节所谈的是某一离这一章主题较远的东西。我们向读者介绍一类重要函数(在标题中已说明), 这是若当(C. Jordan)首先引导到科学中来的。这一类函数将在我们下一节中所讨论的定积分概念的推广中起主导作用。并且, 在许多其它数学分析问题中有界变差的函数类也有重要的意义。

设函数 $f(x)$ 定义于某一有限区间 $[a, b]$ 中, 其中 $a < b$ 。用任意的方法借分点

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

之助将这一区间分为许多部分(这与我们在建立定积分概念时, 当形成积分和或黎曼和时所做的相似)。从对应于各个部分区间的函数增量

的绝对值, 作和

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|. \quad (1)$$

現在整个的問題是: 用各种不同方法細分区間 $[a, b]$ 为許多部分时, 这些数的集合是否有上界。

若和(1)在其集合中有上界, 就說函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 中为有界变差(或有界变动)。这时, 这一和的上确界就称为函数在这区間上的全变差(或全变动), 并用記号

$$\bigvee_a^b f(x) = \sup \{v\}$$

来表示。这一概念亦可应用到非有界变差函数的情形, 不过这时全变差将等于 $+\infty$ 。

由上确界定义本身, 在这两种情况下, 适当地选取区間 $[a, b]$ 的細分后, 可使和 v 任意接近于全变差 $\bigvee_a^b f(x)$ 。換句話說, 可以选取一細分的序列使全变差为对应的和 v 的序列的极限。

有时会遇到在一无穷区間內函数 $f(x)$ 变差的有界性問題, 例如在区間 $[a, +\infty]$ 內。如果 $f(x)$ 在这区間的任何有限部分 $[a, A]$ 上为有界变差函数, 且全变差 $\bigvee_a^A f(x)$ 在其集合中是有界的, 我們就說函数 $f(x)$ 在区間 $[a, +\infty]$ 中为有界变差的。在所有情況下, 我們令

$$\bigvee_a^{+\infty} f(x) = \sup_{A > a} \left\{ \bigvee_a^A f(x) \right\}. \quad (2)$$

注意, 在这些定义中函数 $f(x)$ 連續性的問題並沒有起任何作用。

任何有界单調函数可作为有限或无穷区間 $[a, b]$ 上有界变差函数的例子。如区間 $[a, b]$ 为有限的, 則它立刻可由下面推出:

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \right| = |f(b) - f(a)|,$$

故亦 $\bigvee_a^b f(x) = |f(b) - f(a)|$ 。对区间 $[a, +\infty]$, 显然有

$$\bigvee_a^{+\infty} f(x) = \sup_{A > a} \{ |f(A) - f(a)| \} = |f(+\infty) - f(a)|,$$

与通常一样, 我们将 $f(+\infty)$ 了解为极限 $\lim_{A \rightarrow +\infty} f(A)$ 。

现在举一个連續函数但不是有界变差函数的例子。令

$$f(x) = x \cos \frac{\pi}{2x} \quad (\text{对 } x \neq 0), \quad f(0) = 0,$$

我们来考察, 例如, 区间 $[0, 1]$ 。如取点

$$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \cdots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$$

为这一区间的分点, 则容易证明,

$$v = v_n > 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = H_n$$

而[参看 356, 1)]

$$\bigvee_0^1 f(x) = \sup \{ v \} = +\infty.$$

543 有界变差函数类 我們已經提到过, 單調函数 是有界变差的。可以用下面的方法推广这一函数类:

1° 如在区间 $[a, b]$ 中給出的函数 $f(x)$ 是这样的: 可使区间分为有限个部分

$$[a_k, a_{k+1}] \quad (k=0, 1, \cdots, m-1; a_0=a, a_m=b),$$

而在每一部分上 $f(x)$ 是單調的*, 則它在 $[a, b]$ 上为有界变差的。

用任意方法将区间 $[a, b]$ 分为許多部分, 作和 v 。因为加入每一新

* 这种函数我們称它在区间 $[a, b]$ 上分段單調。

的分点只可能使 v 增加*, 故若将所有上面所談到的点 a_k 一起加到分点中去, 我們就得一和 $\bar{v} \geq v$ 。如在和 $\bar{v}$ 中集出与区間 $[a_k, a_{k+1}]$ 有关的項, 則在上面用一符号 (k) 表它們的和时, 我們將有

$$\bar{v}^{(k)} = |f(a_{k+1}) - f(a_k)|,$$

所以
$$\bar{v} = \sum_{k=0}^{n-1} |f(a_{k+1}) - f(a_k)|.$$

因为任意的和 v 不会超过这一数, 故它就是函数的全变差。

2° 如函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 中滿足条件

$$|f(\bar{x}) - f(x)| \leq L|\bar{x} - x|, \quad (3)$$

其中 $L = \text{const}$, 而 $\bar{x}$ 及 x 是区間的两任意点**, 則它是有界变差的, 且

$$\bigvee_a^b f(x) \leq L(b-a).$$

这可由下面不等式推得:

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq L \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = L(b-a).$$

特別,

3° 如函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上有有界的导数: $|f'(x)| \leq L$ (其中 $L = \text{const}$), 則它在这区間上是一有界变差的函数。

事实上, 由中值定理, 这时

$$|f(\bar{x}) - f(x)| = |f'(\xi)(\bar{x} - x)| \leq L(\bar{x} - x) \quad (x \leq \xi \leq \bar{x}),$$

故李潑西茨条件(3)适合。

由这一注意可以推断, 例如, 函数

$$f(x) = x^2 \sin \frac{\pi}{x} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0$$

* 如在 x_i 及 x_{i+1} 間插入一点 x' , 則項 $|f(x_{i+1}) - f(x_i)|$ 就代之以和

$$|f(x_{i+1}) - f(x')| + |f(x') - f(x_i)| \geq |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

** 这一条件通常称为李潑西茨(R. Lipschitz)条件。

在任何有限区间上变差的有界性, 因为它的导数

$$f(x) = 2x \sin \frac{\pi}{x} - \pi \cos \frac{\pi}{x} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0$$

是有界的。很有趣的, 我们注意, 在包含点 0 的每一区间中, 这函数“无限地振动”, 亦即无数次地从增加变成减少, 无数次地从减少变成增加。

有界变差函数的一般类可由下面的命题给出:

4° 如 $f(x)$ 在一有限(或甚至在一无穷)区间 $[a, b]$ 上可表作一有变动上限的积分的形状时:

$$f(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt, \quad (4)$$

其中 $\varphi(t)$ 假定在这一区间上是绝对可积的, 则 $f(x)$ 在这区间上是有界变差的。这时

$$\bigvee_a^b f(x) \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

设 $[a, b]$ 是一有限区间, 则

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(t) dt \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\varphi(t)| dt = \int_a^b |\varphi(t)| dt, \end{aligned}$$

由此就推得我们的断言。

如果我们所谈的是无穷区间 $[a, +\infty]$, 则只要注意

$$\bigvee_a^A f(x) \leq \int_a^A |\varphi(t)| dt \leq \int_a^{+\infty} |\varphi(t)| dt$$

就够了。

附注 可以证明, 在有限的区间或无限区间的情形, 实际上准确的等式

$$\bigvee_a^b f(x) = \int_a^b |\varphi(t)| dt$$

成立。若函数 $\varphi(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积但不是绝对可积的, 则 $f(x)$ 的全变差根本就是无穷的。我们不想讨论这了, 但仅用一些例题来说明后面讲的这一点。

设 $f(x) = x^2 \sin \frac{\pi}{x^2}$ ($x \neq 0$), $f(0) = 0$, 所以

$$f'(x) = \varphi(x) = 2x \sin \frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x^2} \quad (x \neq 0); \quad f'(0) = \varphi(0) = 0.$$

因此, 例如对 $0 \leq x \leq 2$,

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t) dt,$$

但在第 446 目中我们已证, 这一积分不是绝对收敛的。利用与在那里相同的思想, 将区间 $[0, 2]$ 用点

$$0, \frac{1}{\sqrt{n}}, \sqrt{\frac{2}{2n-1}}, \frac{1}{\sqrt{n-1}}, \\ \sqrt{\frac{2}{2n-3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 1, \sqrt{2}, 2$$

分开, 对于其对应的和 v 显然有:

$$v > \sum_{k=1}^n \left| f\left(\sqrt{\frac{2}{2k-1}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \right| \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n,$$

由此推得

$$\bigvee_0^2 f(x) = +\infty.$$

与此相类似, 容易证明函数

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

在区间 $[0, +\infty]$ 中不是有界变差的[比照 439].

544 有界变差函数的性质 这里一切函数所讨论的区间 $[a, b]$ 假定为有限的。

1° 任一有界变差函数是有界的。

事实上, 当 $a < x' \leq b$ 时我们有

$$v' = |f(x') - f(a)| + |f(b) - f(x')| \leq \bigvee_a^b f(x),$$

于是 $|f(x')| \leq |f(x') - f(a)| + |f(a)| \leq |f(a)| + \bigvee_a^b f(x)$.

2° 两有界变差函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的和、差及积同样是有界变差函数。

設 $s(x) = f(x) \pm g(x)$, 則

$$|s(x_{i+1}) - s(x_i)| \leq |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |g(x_{i+1}) - g(x_i)|,$$

对附标 i 相加,

$$\begin{aligned} \sum_i |s(x_{i+1}) - s(x_i)| &\leq \\ &\leq \sum_i |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + \sum_i |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leq \\ &\leq \bigvee_a^b f(x) + \bigvee_a^b g(x), \end{aligned}$$

由此推得 $\bigvee_a^b s(x) \leq \bigvee_a^b f(x) + \bigvee_a^b g(x)$.

今令 $p(x) = f(x)g(x)$, 并設对 $a \leq x \leq b$,

$$|f(x)| \leq K, |g(x)| \leq L \quad (K, L = \text{const.})$$

[参看 1°]。显然,

$$\begin{aligned} |p(x_{i+1}) - p(x_i)| &= \\ &= |f(x_{i+1})[g(x_{i+1}) - g(x_i)] + g(x_i)[f(x_{i+1}) - f(x_i)]| \leq \\ &\leq K \cdot |g(x_{i+1}) - g(x_i)| + L \cdot |f(x_{i+1}) - f(x_i)|, \end{aligned}$$

由此已很容易得到

$$\bigvee_a^b p(x) \leq K \bigvee_a^b g(x) + L \bigvee_a^b f(x).$$

3° 若 $f(x)$ 及 $g(x)$ 为有界变差函数且 $|g(x)| \geq \sigma > 0$, 则商 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 亦为有界变差函数。

由性质 2°, 只要求证函数 $h(x) = \frac{1}{g(x)}$ 为有界变差函数就够了。我們有

$$|h(x_{i+1}) - h(x_i)| = \frac{|g(x_{i+1}) - g(x_i)|}{|g(x_i)| \cdot |g(x_{i+1})|} \leq \frac{1}{\sigma^2} |g(x_{i+1}) - g(x_i)|,$$

所以

$$\bigvee_a^b h(x) \leq \frac{1}{\sigma^2} \bigvee_a^b g(x).$$

4° 設函数 $f(x)$ 定义于区間 $[a, b]$ 上且 $a < c < b$ 。若函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上为有界变差, 則它在区間 $[a, c]$ 及 $[c, b]$ 上亦为有界变差, 反过来也是如此。这时,

$$\bigvee_a^b f(x) = \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x). \quad (5)$$

設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中有有界变差。我們將区間 $[a, c]$ 及 $[c, b]$ 分别分成許多部分:

$$y_0 = a < y_1 < \cdots < y_m = c, \quad z_0 = c < z_1 < \cdots < z_n = b; \quad (6)$$

这样整个区間 $[a, b]$ 亦分成許多部分。对区間 $[a, c]$ 及 $[c, b]$ 分别作和:

$$v_1 = \sum_k |f(y_{k+1}) - f(y_k)|, \quad v_2 = \sum_i |f(z_{i+1}) - f(z_i)|;$$

对于区間 $[a, b]$ 的对应和将为 $v = v_1 + v_2$ 。于是

$$v_1 + v_2 \leq \bigvee_a^b f(x),$$

因此, 每一和 v_1, v_2 都是有界的, 即函数 $f(x)$ 在区間 $[a, c]$ 及 $[c, b]$ 上是有界变差的。选择許多細分(6)使和 v_1 及 v_2 趋近于对应的全变差, 到极限时得

$$\bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) \leq \bigvee_a^b f(x). \quad (7)$$

現設 $f(x)$ 在每一區間 $[a, c]$ 及 $[c, b]$ 中都是有界變差的。將區間 $[a, b]$ 任意地分成許多部分。如點 c 不在諸分點之列，則我們將它補充進去，我們已知^{*}，這樣得出的和 v 只可能增大。仍用以前的記號，將有

$$v \leq v_1 + v_2 \leq \sum_a^c f(x) + \sum_c^b f(x).$$

由此立刻可以推得 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 上的有界變差性及不等式

$$\sum_a^b f(x) \leq \sum_a^c f(x) + \sum_c^b f(x). \quad (8)$$

最後，由(7)及(8)推出(5)。

從已證的一些定理，特別可推得：

5° 如在區間 $[a, b]$ 中函數 $f(x)$ 有有界變差，則對 $a \leq x \leq b$ ，全變差

$$g(x) = \sum_a^x f(t)$$

為 x 的單調增加，(且為有界)函數。

事實上，若 $a \leq x' < x'' \leq b$ ，則

$$\sum_a^{x''} f(t) = \sum_a^{x'} f(t) + \sum_{x'}^{x''} f(t),$$

故

$$g(x'') - g(x') = \sum_{x'}^{x''} f(t) \geq 0 \quad (9)$$

(因為由全變差定義本身它不會是負數)。

現在很清楚了，在無窮區間 $[b, +\infty]$ 中全變差的定義可不用(2)而寫作下面的形式：

$$\sum_a^{+\infty} f(x) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \sum_a^A f(x). \quad (2^*)$$

用這一說明，這一目中的定理很容易推廣到無窮區間的情形。

^{*} 參看第 71 頁上底注^{*}。

545 有界变差函数的判定法 設函数 $f(x)$ 定义于一有限的或无穷的区間 $[a, b]$ 上。

6° 要使函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上为有界变差的, 必要与充分条件是: 对于它, 在这一区間上有这样的一有界单調增加函数 $F(x)$ 存在, 使在区間 $[a, b]$ 的任何部分 $[x', x''] (x' < x'')$ 上, 函数 f 的增量絕對值不超过函数 F 的对应的增量:

$$|f(x'') - f(x')| \leq F(x'') - F(x'). *$$

[有这种性质的函数 $F(x)$ 自然地称为函数 $f(x)$ 的强函数。]

必要性 可从下面推得: 对有界变差的函数 $f(x)$, 例如, 函数

$$g(x) = \bigvee_a^x f(t)$$

可作为强函数, 由 5° 它是有界单調增加的。由函数全变差定义本身, 就能推出不等式

$$|f(x'') - f(x')| \leq g(x'') - g(x') = \bigvee_{x'}^{x''} f(t).$$

对有限区間的情形, 充分性 从不等式

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} [F(x_{i+1}) - F(x_i)] = F(b) - F(a)$$

立刻可以看出, 而对无穷区間的情形, 可由极限过程得出。

判定法的下一另外形式非常重要:

7° 要函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上有有界变差, 必要与充分条件是它在这一区間中能表作两个有界单調增加函数的差:

$$f(x) = g(x) - h(x). \quad (10)$$

必要性 由 6°, 对有界变差函数 $f(x)$ 应有一有界单調增加的强函

* 但亦可用不带絕對值記号的不等式:

$$f(x'') - f(x') \leq F(x'') - F(x').$$

数 $F(x)$ 存在。令

$$g(x) = F(x), \quad h(x) = F(x) - f(x),$$

所以(10)式适合。还要证明的是函数 $h(x)$ 的单调性；但当 $x' < x''$ 时，由强函数的定义，

$$h(x'') - h(x') = [F(x'') - F(x')] - [f(x'') - f(x')] \geq 0.$$

充分性 可从下面看出来：当有等式(10)时，函数

$$F(x) = g(x) + h(x)$$

就是强函数，因为

$$|f(x'') - f(x')| \leq [g(x'') - g(x')] + [h(x'') - h(x')] = F(x'') - F(x').$$

留给读者两习题：

1) 根据所述判定法，重新证明前目中断言 $1^\circ - 4^\circ$ ，

2) 对在第 543 目中所考察的有界变差函数类，直接证明单调强函数的存在，并将它表作两单调函数差的可能性。

关于定理 7° 我们将作一补充说明。因为函数 g 及 h 都是有界的，故在它们上面各加上同一常数恒可使它们都变成正的。同样，在函数 g 及 h 上加上任何一个严格增加的有界函数（例如， $\arctg x$ ），我们便得到一个形如(10)的拆开来的式子，其中两个函数都已经是严格增加的。

由 7° 中所建立的，有界变差函数在某种意义上化为单调函数的可能性，读者不要幻想到有界变差函数的性质很“简单”：试看，在第 543 目曾考察过的无限振动函数

$$f(x) = x^2 \sin \frac{\pi}{x} (x \neq 0), \quad f(0) = 0$$

也可表作两单调函数的差的形状！

然而，就是因为(10)式的关系，单调函数的某些性质也搬到有界变差函数上来了。例如，如果回忆到，对任何的 $x = x_0$ ，单调有界函数 $f(x)$ 的右侧的及左侧的单侧极限都存在，

$$f(x_0-0) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x), \quad f(x_0+0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \quad (11)$$

[71, 1°], 则, 应用这一性质到每个函数 g 及 h , 亦可得出结论:

8° 在区间 $[a, b]$ 上有界变差的函数 $f(x)$ 在这一区间的任何点 $x = x_0$ 处有有限单侧极限 (11) 存在*。

546 连续的有界变差函数

9° 设在区间 $[a, b]$ 中给出一有界变差函数 $f(x)$ 。如 $f(x)$ 在某一点 $x = x_0$ 连续, 则在同一点, 函数

$$g(x) = \bigvee_a^x f(t)$$

也连续。

假定 $x_0 < b$, 求证 $g(x)$ 在点 x_0 处右连续。为达此目的, 取一正数 $\varepsilon > 0$ 后, 用点

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

将区间 $[x_0, b]$ 分为许多部分使

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| > \bigvee_{x_0}^b f(t) - \varepsilon. \quad (12)$$

依据函数 $f(x)$ 的连续性, 这里可以假定, x_1 已经非常靠近 x_0 , 使不等式

$$|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$$

适合 (在必要时, 可以再插入一分点, 这样, 和 v 只会增加)。因此, 由 (12) 应得

$$\begin{aligned} \bigvee_{x_0}^b f(t) &< \varepsilon + \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| < \\ &< 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq 2\varepsilon + \bigvee_{x_1}^b f(t), \end{aligned}$$

因而,

$$\bigvee_{x_0}^{x_1} f(t) < 2\varepsilon,$$

* 当然, 如果 x_0 是区间的端点之一, 则只能谈到这两个极限中的一个。

或最后, $g(x_1) - g(x_0) < 2s$.

于是更加有

$$0 \leq g(x_0 + 0) - g(x_0) < 2s,$$

因为 s 是任意的, 因此

$$g(x_0 + 0) = g(x_0).$$

同样可证明(当 $x_0 > a$ 时)

$$g(x_0 - 0) = g(x_0),$$

亦即 $g(x)$ 在点 x_0 处左連續。

从证得的定理得出这样一推論:

10° 連續的有界变差函数可表作两連續增加函数差的形状。

事实上, 如回到命题 7° 的证明(特别, 关于必要性一方面), 并取函数(且由 9°, 是一連續的函数)

$$g(x) = \bigvee_a^x f(t)$$

作为单调强函数时, 就能得到所求的分拆开的式子。

最后我們指出, 对連續函数, 在全变差的定义

$$\bigvee_a^b f(x) = \sup \{v\}$$

中, 不論全变差是有限的或无穷的, “sup”都可用一极限来代替。

11° 設函数 $f(x)$ 連續于一有限区間 $[a, b]$ 上。将这一区間用点

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$$

分成許多部分并作和

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

后, 就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v = \bigvee_a^b f(x), \quad (13)$$

其中 $\lambda = \max(x_{i+1} - x_i)^*$ 。

已经说过, 在添加一新的分点时和 v 不会减少^{**}。另一方面, 如这一新分点落在 x_k 及 x_{k+1} 间的区间内时, 则由这一点所产生的和 v 的增加不会超过函数 $f(x)$ 在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上振动的两倍。

注意到这一点以后, 我们取任何一数

$$A < \bigvee_a^b f(x)$$

并求得一和 v^* 使

$$v^* > A. \quad (14)$$

设这一和对应于下一分法:

$$x_0^* = a < x_1^* < \cdots < x_m^* = b.$$

现选取一非常小的 $\delta > 0$, 使只要 $|x'' - x'| < \delta$ 时,

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{v^* - A}{4m}$$

(由函数 f 的一致连续性这是办得到的)。我们来证明, 对任何的分法其 $\lambda < \delta$ 者, 有

$$v > A. \quad (15)$$

事实上, 有了这样一分法(I), 我们就在(I)上添加这些点 x_k^* 后得一新分法(II)。如对应于分法(II)的和为 v_0 , 则

$$v_0 \geq v^*. \quad (16)$$

另一方面, 分法(II)是由(I)经过(至多) m 次添加一个点而得来的。因为每次添加所引起和 v 的增加小于 $\frac{v^* - A}{2m}$, 故

$$v_0 - v < \frac{v^* - A}{2}.$$

从这里以及(16)与(14), 得

$$v > v_0 - \frac{v^* - A}{2} \geq \frac{A + v^*}{2} > A.$$

* 这里, 极限过程与对黎曼和或达布和[283, 289]时的极限为同一类型。

** 参看第 71 页底注*。

这样, 当 $\lambda < \delta$ 时 (15) 式适合; 但既然恒有

$$v \leq \bigvee_a^b f(x),$$

故的确 (13) 式成立, 这就是要求证的。

547 可求长曲线 有界变差函数的概念在曲线的可求长问题上有应用, 所称概念就是在联系到这一问题时首先被若当介绍的。我们想来叙述这一问题作为本节的结束。

设一曲线 (K) 以参数方程

$$x = \varphi(t), y = \psi(t) \quad (17)$$

给出, 其中函数 $\varphi(t)$ 及 $\psi(t)$ 仅假定为连续的。同时设曲线没有重点。

取曲线上对应于参数值

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T \quad (18)$$

的点为曲线内接折线的顶点, 对折线的周长我们有表示式

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]^2 + [\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)]^2}.$$

如我们所知 [318], 所考察的曲线其弧长 s 可定义为折线周长 p 当所有的差 $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ (或更正确地, 其中的最大者 $\lambda^* = \max \Delta t_i$) 趋近于零时的极限。当这一有限极限存在时, 曲线就称为可求长的。可求长的充分条件我们在第二卷中已说明过 [320]。现在我们要建立最一般的——必要及充分——条件。

首先我们证明这一命题: 要使曲线 (K) 可求长必要且充分地须内接于它的折线的周长 p 的集合有上界, 且弧长 s 就是这些周长的上确界:

$$s = \sup \{p\}.$$

为达此目的, 我们注意周长 p 的下一重要性质。若它对应于区间 $[t_0, T]$ 的某一分法 (18), 并再插入一分点 $\bar{t}$:

$$t_k < \bar{t} < t_{k+1},$$

则周长 p 只会增大, 且其增大不会超过函数 $\varphi(t)$ 及 $\psi(t)$ 在区间 $[t_k, t_{k+1}]$

上振动的和的两倍。实际上, 添加一新点 $\bar{t}$ 使在和 p 中的一项(边的长)

$$\sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2} \quad (19)$$

用两项的和(两边长的和)

$$\begin{aligned} & \sqrt{[\varphi(\bar{t}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(\bar{t}) - \psi(t_k)]^2} + \\ & + \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(\bar{t})]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(\bar{t})]^2} \end{aligned} \quad (20)$$

来代替, 在任何情况下它不会小于(19)。

另一方面, 整个和(20)显然不超过和

$$\begin{aligned} & |\varphi(\bar{t}) - \varphi(t_k)| + |\psi(\bar{t}) - \psi(t_k)| + |\varphi(t_{k+1}) - \varphi(\bar{t})| + \\ & + |\psi(t_{k+1}) - \psi(\bar{t})|, \end{aligned}$$

因此, 周长 p 的增大更不会超过此数, 而此数显然小于所說的振动的两倍。

于是, 特别, 曲綫(K)的弧长 s ——当这一曲綫可求长时——不小于周长 p 的随便那一个。

这样一来, 所述条件的必要性就证明了。

现在来证明它的充分性。設集合 $\{p\}$ 有上界且 $s = \sup\{p\}$ 。我們来证明 s 是周长 p 当 $\lambda^* \rightarrow 0$ 时的极限。

对任意小的数 $\varepsilon > 0$, 由上确界的定义, 可找得一方法, 用点

$$t_0^* = t_0 < t_1^* < t_2^* < \cdots < t_m^* = T \quad (21)$$

分区间 $[t_0, T]$ 为許多部分使对应的周长 p^* 适合不等式

$$p^* > s - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (22)$$

由于函数 $\varphi(t)$ 及 $\psi(t)$ 一致連續的关系, 有一非常小的数 $\delta > 0$ 存在, 使得只要 $|t'' - t'| < \delta$ 就有

$$|\varphi(t'') - \varphi(t')| < \frac{\varepsilon}{8m}, \quad |\psi(t'') - \psi(t')| < \frac{\varepsilon}{8m}.$$

現在用点(18)分区间 $[t_0, T]$ 为許多部分, 唯一的条件要 $\lambda^* < \delta$; 并作对应的和 p 。

考察区间 $[t_0, T]$ 的一个第三种分法, 使方法(18)中的一切点及方

法(21)中的一切点 t_k^* 就是这里的分点; 設对应于它的周长为 p_0 。因为这一方法是从(21)加上一些新点而得来的, 由一开头我們所說的,

$$p_0 \geq p^*. \quad (23)$$

另一方面, 这同一方法也是从(18)加上点 t_k^* 而得来的。每加一个点 t_k^* , p 的增加不大于函数 $\varphi(t)$ 及 $\psi(t)$ 对应振动和的两倍, 也即小于 $\frac{s}{2m}$ 。因为这一手續至多重复 m 次, 故 p_0 超过 p 的数小于 $\frac{s}{2}$:

$$p_0 < p + \frac{s}{2}. \quad (24)$$

由不等式(24), (23), (22)得

$$p > s - s,$$

故 $0 < s - p < s$, 由此推得所要证明的断言:

$$s = \lim_{\lambda^* \rightarrow 0} p,$$

故曲线 (K) 是可求长的且 s 就是它的长。

所证得的结果使下面这一个为本目主要内容的定理其证明简化了。

若当定理 曲线(17)可求长的必要充分条件为函数 $\varphi(t)$ 及 $\psi(t)$ 在区间 $[t_0, T]$ 上皆为有界变差。

必要性 如曲线可求长且长为 s , 則对区间 $[t_0, T]$ 的任何細分(18)有

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]^2 + [\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)]^2} \leq s,$$

于是, 由显明的不等式

$$|\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)| \leq \sqrt{[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]^2 + [\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)]^2}$$

得出

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)| \leq s,$$

所以函数 $\varphi(t)$ 的确是有界变差的。同样的結論可加到函数 $\psi(t)$ 上。

充分性 現設函数 $\varphi(t)$ 及 $\psi(t)$ 都是有界变差的。由显明的不等式

$$\begin{aligned} p &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]^2 + [\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)]^2} \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)| + \sum_{i=0}^{n-1} |\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)| \end{aligned}$$

可以推断: 所有数 p 上面有界, 例如以数

$$\bigvee_{t_0}^T \varphi(t) + \bigvee_{t_0}^T \psi(t)$$

为上界, 于是由上所证就能推得曲綫 (K) 的可求长性。

我們还加两个重要的說明于后。

由剛才所述的, 很清楚, 曲綫(17)的全长滿足不等式

$$s \leq \bigvee_{t_0}^T \varphi(t) + \bigvee_{t_0}^T \psi(t).$$

考察一对应于区間 $[t_0, t]$ 中参数变化的变动弧 $s = s(t)$, 应用上面不等式到区間 $[t, t + \Delta t]$ 上去, 其中 Δt , 譬如說, > 0 , 則

$$0 < \Delta s < \bigvee_t^{t+\Delta t} \varphi(t) + \bigvee_t^{t+\Delta t} \psi(t).$$

因为对无限小的 Δt , 右端的两个变动量[由 546, 9°]与 Δs 一起同样亦是无限小, 故我們得到結論: 对可求长的連續曲綫, 动弧 $s(t)$ 是参数的連續函数。

因为这一函数自 0 单调增加到整个曲綫的长 S , 故不論 n 为怎样的自然数, 我們可以設想这一曲綫分为 n 部分, 每分长 $\frac{S}{n}$ [科西定理, 81!]。如平面被一边长 $\frac{S}{n}$ 的正方形网掩盖起来, 則上述每一小段至多只能与四个这种正方形相交。因此, 所有与曲綫相交的正方形面积的和在任何情形下不会超过 $4n \cdot \frac{S^2}{n^2}$, 可使它任意小: 曲綫有面积零。

由此得一有趣的推論: 由一可求长曲綫(或若干个这种曲綫)所圍的区域显然是可求面积的, 亦即有一面积[328]。

§ 5 斯底尔吉斯积分

548 斯底尔吉斯积分的定义 斯底尔吉斯(Th. J. Stieltjes)积分是通常的黎曼定积分[283]的直接推广。它用下法来定义。

設在区間 $[a, b]$ 上已給两个有界函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 。用点

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \quad (1)$$

将区間 $[a, b]$ 分成許多部分, 命 $\lambda = \max \Delta x_i$ 。在每一部分 $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \cdots, n-1$) 上取一点 ξ_i , 計算出函数 $f(x)$ 的值 $f(\xi_i)$, 并将它乘上函数 $g(x)$ 对应于区間 $[x_i, x_{i+1}]$ 的增量:

$$\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i).$$

最后, 作所有这些乘积的和:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta g(x_i). \quad (2)$$

这一和称为斯底尔吉斯积分和。

如当 λ 趋近于零时斯底尔吉斯和 σ 有一确定的有限极限, 且这一极限既与区間 $[a, b]$ 分成許多部分的方法无关, 又与在部分区間中点 ξ_i 的选择无关, 則这一极限称作函数 $f(x)$ 对函数 $g(x)$ 的斯底尔吉斯积分, 并表作記号

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta g(x_i)^*. \quad (3)$$

有时候, 为了要特別強調积分是在斯底尔吉斯意义下考察的, 就采用記号

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) \text{ 或 } \overset{S}{\sum}_b^a f(x) dg(x).$$

* 为明确起見我們假定 $a < b$, 不难同样地討論 $a > b$ 的情形。但由等式 $\int_a^b = -\int_b^a$, 它立刻可化为前者。

这里的极限其意义与在通常的定积分情况下相同。更精确地说, 数 I 称作斯底尔吉斯积分, 如对于任何数 $\varepsilon > 0$, 有一数 $\delta > 0$ 存在, 使得只要区间 $[a, b]$ 分成许多部分其 $\lambda < \delta$ 时, 不论点 ξ_i 在对应的区间中如何选取, 不等式

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

总能满足。

当积分(3)存在时, 也这样说: 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上对函数 $g(x)$ 可积分。

读者可以看见, 上面所给定义与通常黎曼积分定义间唯一的(但为实质上的)区别是: $f(\xi_i)$ 不是用独立变数的增量 Δx_i 来乘, 而是用第二个函数的增量 $\Delta g(x_i)$ 来乘。因此, 当取独立变数 x 本身作为函数 $g(x)$ 时:

$$g(x) = x,$$

可见黎曼积分是斯底尔吉斯积分的一特殊情形。

549 斯底尔吉斯积分存在的一般条件 在函数 $g(x)$ 单调增加的限制下, 我们来建立斯底尔吉斯积分存在的一般条件。

于是, 当 $a < b$ 时, 与早前的 $\Delta x_i > 0$ 一样, 现在所有的 $\Delta g(x_i) > 0$ 。只要将 Δx_i 换作 $\Delta g(x_i)$, 就可以逐字逐句地重复整个第 284 及 285 目的论证。

首先, 与达布和同样, 在这里最好引入不列和数

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta g(x_i), \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta g(x_i),$$

其中 m_i 及 M_i 分别表函数 $f(x)$ 在第 i 个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的下确界及上确界。我们将称这些和为达布-斯底尔吉斯下和及上和。

首先很清楚的(对同一分法),

$$s \leq \sigma \leq S,$$

且 s 及 S 为斯底尔吉斯和 σ 的确界。

与最简单的情形 [284] 一样, 达布-斯底尔吉斯和本身有下列二

性质:

第一性质 如在已有的分点中加上新的点, 则达布-斯底尔吉斯下和只会增加, 上和只会减少。

第二性质 每一达布-斯底尔吉斯下和不会超过每一上和, 即使是对应于区间另一分法的上和。

如引进达布-斯底尔吉斯下积分及上积分:

$$I_* = \sup\{s\} \text{ 及 } I^* = \inf\{S\},$$

则
$$s \leq I_* \leq I^* \leq S.$$

最后, 借达布-斯底尔吉斯和之助, 对所考察的情形很容易给斯底尔吉斯积分的存在建立一基本判定法:

定理 斯底尔吉斯积分存在的必要充分条件为:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0$$

或
$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta g(x_i) = 0, \quad (4)$$

与通常一样, ω_i 了解为函数 $f(x)$ 在第 i 个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振动 $M_i - m_i$.

所有的证明, 我们已说过, 与在第 284, 285 目中所引用的对应证明全类似, 我们把它們留给讀者。

在下一目中, 我们将应用这一判定法来求出若干类有斯底尔吉斯积分的重要函数偶 $f(x)$ 及 $g(x)$ 。

550 斯底尔吉斯积分存在情况的若干类

I. 若函数 $f(x)$ 連續而函数 $g(x)$ 的变差是有界的, 則斯底尔吉斯积分

$$\int_a^b f(x) dg(x) \quad (5)$$

存在。

开始我們假定 $g(x)$ 单调增加, 我們就应用前目中的判定法。对任

一已給的 $\varepsilon > 0$, 由函数 $f(x)$ 的一致連續性, 可找得 $\delta > 0$ 使 $f(x)$ 在任一长小于 δ 的区間上振动小于 $\frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}$. 現設区間 $[a, b]$ 任意地分成許多部分, 其 $\lambda = \max \Delta x_i < \delta$. 則所有的 $\omega_i < \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}$, 且

$$\sum_i \omega_i \Delta g(x_i) < \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)} \cdot \sum_i [g(x_{i+1}) - g(x_i)] = \varepsilon,$$

由此, 可知条件(4)适合, 因而积分也存在。

在一般情形下, 如函数 $g(x)$ 为有界变差的, 則它可表为两有界增加函数差的形状: $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$ [545, 7°]. 与此相应, 对应于函数 $g(x)$ 的斯底尔吉斯积分就变成:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta g(x_i) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta g_1(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta g_2(x_i) = \sigma_1 - \sigma_2. \end{aligned}$$

因为由已經证明的論断可知每一和 σ_1 及 σ_2 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时趋近于有限的极限, 故对和 σ 也是如此, 这就是要求证的。

如加强对函数 $g(x)$ 的要求, 同时就可減輕加到函数 $f(x)$ 上的条件:

II. 如函数 $f(x)$ 在黎曼意义下在区間 $[a, b]$ 上可积而 $g(x)$ 满足李泼西茨条件:

$$\begin{aligned} |g(\bar{x}) - g(x)| &\leq L(\bar{x} - x) \\ (L = \text{const.}, a \leq x < \bar{x} \leq b), \end{aligned} \quad (6)$$

則积分(5)存在。

为了又有可能应用前面讲的判定法, 开始时我們假設函数 $g(x)$ 不仅滿足条件(6), 且单調增加。

由(6), 显然, $\Delta g(x_i) \leq L \Delta x_i$, 故

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta g(x_i) \leq L \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i.$$

但由函数 $f(x)$ 的可积性 (在黎曼意义下), 后面的和当 $\lambda \rightarrow 0$ 时本身也趋近于 0, 因而第一个和也趋近于零, 这就证明了积分 (5) 的存在。

在一般情形 $g(x)$ 仅满足李潑西茨条件 (6) 时, 将它表作差

$$g(x) = Lx - [Lx - g(x)] = g_1(x) - g_2(x).$$

函数 $g_1(x) = Lx$ 显然满足李潑西茨条件且同时单调增加。同样, 函数 $g_2(x) = Lx - g(x)$ 也是如此, 因为由 (6), 当 $a \leq x \leq \bar{x} \leq b$ 时,

$$g_2(\bar{x}) - g_2(x) = L(\bar{x} - x) - [g(\bar{x}) - g(x)] \geq 0$$

且 $|g_2(\bar{x}) - g_2(x)| \leq L(\bar{x} - x) + |g(\bar{x}) - g(x)| \leq 2L(\bar{x} - x).$

在这种情况下, 推理与上面一样。

Ⅲ. 如函数 $f(x)$ 在黎曼意义下可积, 而函数 $g(x)$ 可表作有变动上限的积分的形状:

$$g(x) = c + \int_a^{\bar{x}} \varphi(t) dt, \quad (7)$$

其中 $\varphi(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上对绝对可积, 则积分 (5) 存在。

设 $\varphi(t) \geq 0$, 故 $g(x)$ 单调增加。如 $\varphi(t)$ 在正常意义下可积分因而有界: $|\varphi(t)| \leq L$, 则对 $a \leq x < \bar{x} \leq b$ 我们有

$$|g(\bar{x}) - g(x)| = \left| \int_x^{\bar{x}} \varphi(t) dt \right| \leq L(\bar{x} - x).$$

因此, 在这种情形下, $g(x)$ 满足李潑西茨条件, 由 II, 积分存在。

现在假定, $\varphi(t)$ 在广义的意义下可积。我们只讨论一个奇点的情形, 例如 b 。首先, 对任意取定的 $\varepsilon > 0$, 选一 $\eta > 0$ 使

$$\int_{b-\eta}^b \varphi(t) dt < \frac{\varepsilon}{2\Omega}, \quad (8)$$

其中 Ω 是函数 $f(x)$ 在所考察的区间中总的振动。

将区间 $[a, b]$ 任意地分成许多部分并作和

$$\Sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta g(x_i).$$

将它拆成两个和 $\Sigma = \Sigma' + \Sigma''$, 第一个和对应于完全包含在区間 $\left[a, b - \frac{\eta}{2}\right]$ 中的一些区間, 第二个和对应于其余的区間。只要 $\lambda = \max \Delta x_i < \frac{\eta}{2}$, 后面的一些区間就一定在区間 $[b - \eta, b]$ 中; 故由(8),

$$\Sigma'' < \Omega \int_{b-\eta}^b \varphi(t) dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面, 因为在区間 $\left[a, b - \frac{\eta}{2}\right]$ 中函数 $\varphi(t)$ 在常义下可积, 故由已經证明的, 当 λ 相当小时和 Σ' 就小于 $\frac{\varepsilon}{2}$ 。因此得(4), 这就是所要证明的。

在一般情形, 当函数 $\varphi(t)$ 在区間 $[a, b]$ 上绝对可积时, 我們就考察函数 $\varphi_1(t) = \frac{|\varphi(t)| + \varphi(t)}{2}$, $\varphi_2(t) = \frac{|\varphi(t)| - \varphi(t)}{2}$,

显然, 它們在上述区間上为非負的且可积的。因为

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t),$$

故与上面一样, 問題归結到已討論的情形。

附注 設函数 $g(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上連續, 且除可能有限个点外, 有导数 $g'(x)$, 又这一导数*自 a 到 b (在常义或广义的意义下) 可积; 則如大家所熟知[445°, 附注], 形如(7)的公式

$$g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t) dt$$

成立。如 $g'(x)$ 绝对可积, 則 III 中所述可完全应用到函数 $g(x)$ 上去。

551 斯底尔吉斯积分的性质 由斯底尔吉斯积分的定义立刻可

* 如在导数不存在的点处, 其值任意地选取。

推得它的下列各性质:

$$1^\circ \int_a^b dg(x) = g(b) - g(a);$$

$$2^\circ \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] dg(x) = \int_a^b f_1(x) dg(x) \pm \int_a^b f_2(x) dg(x);$$

$$3^\circ \int_a^b f(x) d[g_1(x) \pm g_2(x)] = \int_a^b f(x) dg_1(x) \pm \int_a^b f(x) dg_2(x);$$

$$4^\circ \int_a^b kf(x) d[lg(x)] = kl \cdot \int_a^b f(x) dg(x) \quad (k, l = \text{const.}).$$

同时在 $2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$ 的情形下, 从右端积分的存在可推得左端积分的存在。

再, 我們还有

$$5^\circ \int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^c f(x) dg(x) + \int_c^b f(x) dg(x),$$

于其中, 我們假定 $a < c < b$, 且三积分皆存在。

要证明这一公式, 只要注意在作积分 $\int_a^b f dg$ 的斯底尔吉斯和时将点 c 放入区间 $[a, b]$ 的分点之中就可以了。

与这一公式有关, 我們提出一些注意。首先, 由积分 $\int_a^b f dg$ 的存在就得出积分 $\int_a^c f dg$ 及 $\int_c^b f dg$ 的存在。

对于由斯底尔吉斯和得出斯底尔吉斯积分的特殊极限手續來說,

波尔桑諾-科西收敛原理成立*。因此, 給出一 $\varepsilon > 0$, 由积分 $\int_a^b f dg$ 的存在可求得一 $\delta > 0$ 使任何二斯底尔吉斯和 σ 及 $\bar{\sigma}$ 当其对应的 λ 及 $\bar{\lambda} < \delta$ 时它們相差小于 ε 。如同时命分点中包含 c 点, 而在区間 $[c, b]$ 内的分点在此两种情况下都取相同的点, 則差 $\sigma - \bar{\sigma}$ 就化成已經变到区間 $[a, c]$ 上的两斯底尔吉斯和的差 $\sigma_1 - \bar{\sigma}_1$, 因为其它各項彼此相消掉了。应用同一收敛原理到区間 $[a, c]$ 并計算它上面的斯底尔吉斯和时, 我們得出积分 $\int_a^c f dg$ 存在的結論。同样可建立积分 $\int_c^b f dg$ 的存在。

特別值得注意的是前所未有的事实, 即从积分 $\int_a^c f dg$ 及 $\int_c^b f dg$ 都存在, 一般說来不能推出积分 $\int_a^b f dg$ 存在。

为了要相信这一点, 只要考察一个例子。設在区間 $[-1, 1]$ 上用下列等式給出二函数 $f(x)$ 及 $g(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 & \text{当 } 0 < x \leq 1; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } -1 \leq x < 0, \\ 1 & \text{当 } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

易見, 积分 $\int_{-1}^0 f(x) dg(x), \quad \int_0^1 f(x) dg(x)$

皆存在且等于 0, 因为对应于它們的斯底尔吉斯和皆等于 0: 对于第一个來說这是由于 $f(x)$ 永远 = 0, 对于第二个來說, 因为 $\Delta g(x_i)$ 永远 = 0 而函数 $g(x)$ 是常数。

这对积分 $\int_{-1}^1 f(x) dg(x)$

不存在。将区間 $[-1, 1]$ 分为許多部分使点 0 不是分点, 作和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta g(x_i).$$

如点 0 在区間 $[x_k, x_{k+1}]$ 中, 因此 $x_k < 0 < x_{k+1}$, 則在和 σ 中只剩下一个第 k 項, 其余的皆

* 对已熟知第二卷附录的讀者來說, 很清楚的, 这里所实践的极限手續是在那里所討論的一般方式下进行的。特別, 关于收敛性原理的推演, 參看 512。

为零,这是因为对 $i \neq k$, $\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i) = 0$. 这样,

$$\sigma = f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)] = f(\xi_k).$$

由 $\xi_k \leq 0$ 或 $\xi_k > 0$ 因而 $\sigma = 0$ 或 $\sigma = 1$, 故 σ 没有极限.

上面所述的特殊情况是因为函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $x=0$ 处不连续之故[参看 559, 3 及 4].

552 分部积分法 对斯底尔吉斯积分, 公式

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) df(x) \quad (9)$$

成立, 于此假定, 这两积分之一存在; 另一积分的存在从这里可推出来. 这一公式叫做分部积分法公式. 我们来证明它.

设积分 $\int_a^b g df$ 存在. 将区间 $[a, b]$ 分为许多部分 $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0,$

$1, \dots, n-1$) 后, 在这些部分中任意取点 ξ_i , 故

$$\begin{aligned} a = x_0 \leq \xi_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{i-1} \leq \xi_{i-1} \leq x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1} \leq \\ \leq \dots \leq x_{n-1} \leq \xi_{n-1} \leq x_n = b. \end{aligned}$$

积分 $\int_a^b f dg$ 的斯底尔吉斯和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)]$$

可表作下形:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{i=1}^n f(\xi_{i-1})g(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)g(x_i) = \\ &= -\{g(a)f(\xi_0) + \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)[f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})] - g(b)f(\xi_{n-1})\}. \end{aligned}$$

如在右端加减一式子

$$f(x)g(x) \Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

則 σ 可重写为:

$$\sigma = f(x)g(x) \Big|_a^b - \{g(a)[f(\xi_0) - f(a)] + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)[f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})] + g(b)[f(b) - f(\xi_{n-1})]\}.$$

在大括弧中的式子是积分 $\int_a^b gdf$ (其存在为假定了的!) 的斯底尔吉

斯和。它对应于区間 $[a, b]$ 用分点

$$a \leq \xi_0 \leq \xi_1 \leq \cdots \leq \xi_{i-1} \leq \xi_i \leq \cdots \leq \xi_{n-1} \leq b$$

时的分法, 并在区間 $[\xi_{i-1}, \xi_i]$ ($i=1, \dots, n-1$) 中取 x_i 为选定的点, 而对区間 $[a, \xi_0]$ 及 $[\xi_{n-1}, b]$ 分別取 a 及 b 。与通常一样, 如命 $\lambda = \max(x_{i+1} - x_i)$, 則現在所有部分区間的长不超过 2λ 。当 $\lambda \rightarrow 0$ 时,

在大括弧中的和趋近于 $\int_a^b gdf$, 因此, σ 的极限也存在, 即积分 $\int_a^b f dg$ 存在且这一积分为公式(9)所确定。

作为我們推理中的一推論, 我們特別注意一奇怪的事实: 如函数 $g(x)$ 在区間 $[a, b]$ 內对函数 $f(x)$ 可积, 則函数 $f(x)$ 对函数 $g(x)$ 也可积。

在 550 所考察的斯底尔吉斯积分存在的情形中, 将函数 f 及 g 的地位交換后, 由这一注意点可增加許多新的情形到上面去。

553 化斯底尔吉斯积分为黎曼积分 設函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上連續, 而 $g(x)$ 在这一区間上單調增加, 且在严格的意义下單調增加*。則萊彼格 (H. Lebesgue) 证明了, 斯底尔吉斯积分 $(S) \int_a^b f(x) dg(x)$ 用代換法 $v = g(x')$ 立刻化为黎曼积分。

在图 29 中作出了函数 $v = g(x)$ 的图形。对于那些地方 $x = x'$, $g(x)$ 在該处断掉时(因为我們完全沒有假定 $g(x)$ 非連續不可), 我們用連接点 $(x', g(x' - 0))$ 及 $(x', g(x + 0))$ 的一垂直直綫段来补充这一图形。这样就做成了一連續曲綫, 在它上面对于在 $v_0 = g(a)$ 及 $V = g(b)$ 間的每一值 v 就决定一个在 a 及 b 間的一确定值。这一函数 $x = g^{-1}(v)$ 显然連續

* 我們假定这, 完全是为了使叙述简单些。

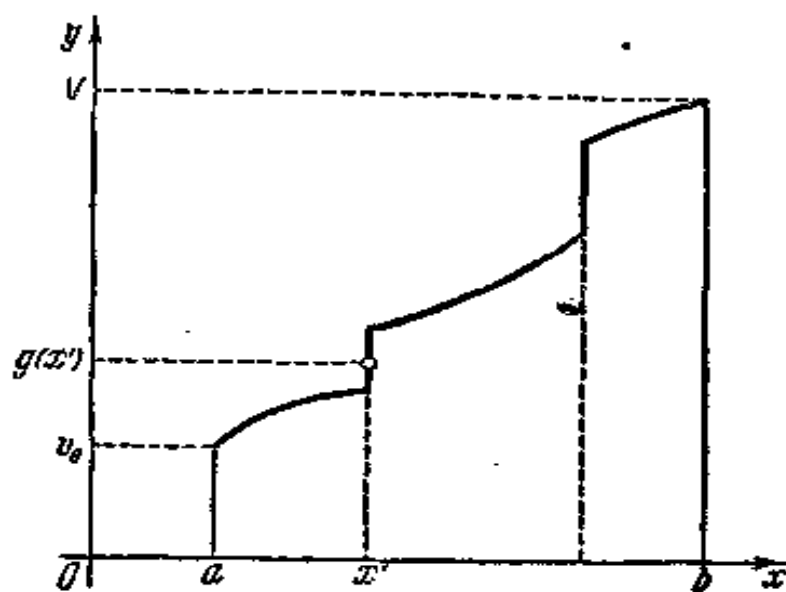


图 29

且在广义的意义下单调增加；它可视为函数 $v = g(x)$ 的某种反函数。

如只限制于函数 $v = g(x)$ 当 x 自 a 变到 b 时所取的 v 的值，则 $x = g^{-1}(v)$ 就是在通常意义下的反函数，亦即将 v 变成使 $g(x) = v$ 的值 x 。但当 v 值取于函数 $g(x)$ 跳跃处的区间

$$[g(x' - 0), g(x' + 0)]$$

内时，只有一个值 $v = v' = g(x')$ 有对应的值 $x = x'$ ，而在这一区间中的其它 v 值显然没有任何 x 的值与它对应。

但我们同意将它们也变到同一值 $x = x'$ ，几何上这就可以用在函数 $y = g(x)$ 的图形上补充许多垂直线段来表示。

现在我们来求证

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_{v_0}^V f(g^{-1}(v)) dv, \quad (10)$$

其中后面的积分是在通常意义下取的；它的存在是有了保证的，因函数 $g^{-1}(v)$ 连续，因而复合函数 $f(g^{-1}(v))$ 也是连续的。

为达此目的，将区间 $[a, b]$ 用分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

分成许多部分并作斯底尔吉斯和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) [g(x_{i+1}) - g(x_i)].^*$$

如令 $v_i = g(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$)，则我们将有

$$v_0 < v_1 < \cdots < v_i < v_{i+1} < \cdots < v_n = V.$$

因为 $x_i = g^{-1}(v_i)$ ，故

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(g^{-1}(v_i)) \Delta v_i \quad (\Delta v_i = v_{i+1} - v_i).$$

这一式子是积分

* 为简单起见，在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 中就选取点 x_i 。

$$\int_{v_0}^V f(g^{-1}(v))dv$$

的一黎曼和。

但从这里还不可立刻作出结论。当变到极限时等式(10)成立。因为即使 $\Delta x_i \rightarrow 0 (\lambda \rightarrow 0)$ 还可能 Δv_i 不趋近于零, 例如, 当 x_i 及 x_{i+1} 无限接近时如果值 $x = x'$ 总夹在中间而函数 $g(x)$ 在这里跳跃了一下, 这时就是如此的。故我们要换一方法来推理。

我們有
$$\int_{v_0}^V f(g^{-1}(v))dv = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(g^{-1}(v))dv$$

且
$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{v_i}^{v_{i+1}} f(x_i)dv,$$

所以
$$\sigma - \int_{v_0}^V f(g^{-1}(v))dv = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{v_i}^{v_{i+1}} [f(x_i) - f(g^{-1}(v))]dv.$$

现在假定 Δx_i 如此小, 使函数 $f(x)$ 在整个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振动小于事先任意指定的一数 $\epsilon > 0$ 。因为当 $v_i \leq v \leq v_{i+1}$ 时显然

$$x_i \leq g^{-1}(v) \leq x_{i+1},$$

故同时也
$$|f(x_i) - f(g^{-1}(v))| < \epsilon.$$

这时
$$|\sigma - \int_{v_0}^V f(g^{-1}(v))dv| < \epsilon(V - v_0).$$

这就证明了
$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \int_{v_0}^V f(g^{-1}(v))dv,$$

由此可得(10)。

不管所得的结果在原则上如何重要, 但它在实际上并不能算作计算斯底尔吉斯积分的方便工具。我们将在下一目中指出在若干极简单的情况下如何进行计算。

554 斯底尔吉斯积分的计算 我们来求证下面的定理:

1° 如函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上在黎曼意义下可积, 而 $g(x)$ 可表作积分

$$g(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt,$$

其中函数 $\varphi(t)$ 在 $[a, b]$ 上绝对可积, 则

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_a^b f(x) \varphi(x) dx. \quad (11)$$

右端的积分存在 [287, 446]。在所作假定下斯底尔吉斯积分的存在已经证明过了 [550, III]。

剩下的只要确立等式 (11)。

不失一般性我们可假定函数 $\varphi(x)$ 是正的 [参照第 91 页]。

与通常一样, 作斯底尔吉斯和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(x_{i+1}) - g(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\xi_i) \varphi(x) dx.$$

因为在另一方面可以写

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \varphi(x) dx.$$

$$\text{故有 } \sigma - \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(\xi_i) - f(x)] \varphi(x) dx.$$

显然, 对 $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, $|f(\xi_i) - f(x)| \leq \omega_i$, 其中 ω_i 表函数 $f(x)$ 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振动。由此推出上面所写的差的这样一估计:

$$\left| \sigma - \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta g(x_i).$$

但我们已经知道 [550, III], 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时最后一和趋近于 0, 因此,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx,$$

这就证明了公式 (11)。

特别, 由所证定理推得 [如注意到第 550 目末的附注] 在实际中直接应用起来很方便的一推论:

2° 对函数 $f(x)$ 同以前的假定, 設函数 $g(x)$ 在整个区間 $[a, b]$ 上連續, 且可能除有限个点外, 在这区間上有导数 $g'(x)$, 而 $g'(x)$ 在 $[a, b]$ 上绝对可积*。則

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_a^b f(x) g'(x) dx. \quad (12)$$

特別有趣的是, 如将符記 $dg(x)$ 表面上 当作微分, 而用式子 $g'(x)dx$ 代替它时, 公式(12)中右端的积分形式上可从左端的积分得来。

我們回到函数 $g(x)$ 不連續的情形 (以后将看到, 这在实践中特別重要, 首先考虑由等式

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x \leq 0, \\ 1 & \text{当 } x > 0 \end{cases}$$

所定义的“标准”不連續函数。

它在点 $x=0$ 的右边有一第一种不連續——跳跃, 且跳跃的值 $\rho(+0) - \rho(0)$ 等于 1; 在点 $x=0$ 的左边及其余的点处, 函数 $\rho(x)$ 連續。函数 $\rho(x-c)$ 在点 $x=c$ 的右边也有一同样的不連續; 反过来, $\rho(c-x)$ 在点 $x=c$ 的左边有一类似的不連續, 且跳跃的值等于 -1。

假定函数 $f(x)$ 在点 $x=c$ 处連續, 我們来計算 $(S) \int_a^b f(x) d\rho(x-c)$,

其中 $a \leq c < b$ (当 $c=b$ 时这一积分等于零)。

作斯底尔吉斯和:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta \rho(x_i - c).$$

設点 c , 例如, 落在第 k 个区間中, 即 $x_k \leq c < x_{k+1}$ 。則 $\Delta \rho(x_k - c) = 1$, 而当 $i \neq k$ 时显然 $\Delta \rho(x_i - c) = 0$ 。因此, 整个和 σ 化成一項: $\sigma = f(\xi_k)$ 。現命 $\lambda \rightarrow 0$ 。由連續性, $f(\xi_k) \rightarrow f(c)$ 。因此

* 參看第 91 頁底注。

$$(S) \int_a^b f(x) d\rho(x-c) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = f(c) \quad (13)$$

存在(当 $a \leq c < b$ 时)。

同样可证明(当 $a < c \leq b$ 时)

$$(S) \int_a^b f(x) d\rho(c-x) = -f(c) \quad (14)$$

(当 $c=a$ 时这一积分为零)。

现在我们进而证明一定理, 在某种意义下较 2° 更广泛, 也就是, 放弃对函数 $g(x)$ 连续的要求:

3° 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 而 $g(x)$, 可能除有限个点外, 在这一区间上有导数 $g'(x)$, 且 $g'(x)$ 在 $[a, b]$ 上绝对可积。同时设函数 $g(x)$ 在有限个点

$$c_0 = a < c_1 < \cdots < c_k < \cdots < c_m = b$$

处有第一种不连续。则斯底尔吉斯积分存在且可表作公式

$$\begin{aligned} (S) \int_a^b f(x) dg(x) &= (R) \int_a^b f(x) g'(x) dx + f(a)[g(a+0) - g(a)] + \\ &+ \sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)[g(c_k+0) - g(c_k-0)] + \\ &+ f(b)[g(b) - g(b-0)]. \end{aligned} \quad (15)$$

积分外面的和的出现在这里显示了函数 $g(x)$ 有(在点 a 及 b 处是单侧的*)跳跃的特征。

为了记起来简单些, 对函数 $g(x)$ 在左边及在右边的跳跃我们引用下列记号:

$$\alpha_k^+ = g(c_k+0) - g(c_k) \quad (k=0, 1, \cdots, m-1),$$

$$\alpha_k^- = g(c_k) - g(c_k-0) \quad (k=1, 2, \cdots, m);$$

* 在这两点中的任何一点处如没有跳跃, 则实际上对应的被加项就是零。

显然, 对 $1 \leq k \leq m-1$, $\alpha_k^+ + \alpha_k^- = g(c_k + 0) - g(c_k - 0)$.

作一輔助函数:

$$g_1(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^+ \rho(x - c_k) - \sum_{k=1}^m \alpha_k^- \rho(c_k - x),$$

好像在它里面吸收了函数 $g(x)$ 的所有不連續点; 我們日下就要证明, 差 $g_2(x) = g(x) - g_1(x)$ 就已經是連續的了。

对异于所有 c_k 的值 x , 函数 $g_2(x)$ 連續不会有疑問, 因为对这些值, 函数 $g(x)$ 及 $g_1(x)$ 皆連續。現在求证 $g_2(x)$ 在点 $c_k (k < m)$ 的右边連續。 $g_1(x)$ 中所有各項除 $\alpha_k^+ \rho(x - c_k)$ 外在 $x = c_k$ 的右边都連續, 故只要研究式子 $g(x) - \alpha_k^+ \rho(x - c_k)$ 的性质。当 $x = c_k$ 时它的值是 $g(c_k)$, 而当 $x \rightarrow c_k + 0$ 时它的极限也是如此:

$$\lim_{x \rightarrow c_k + 0} [g(x) - \alpha_k^+ \rho(x - c_k)] = g(c_k + 0) - \alpha_k^+ = g(c_k).$$

同样可验证函数 $g_2(x)$ 在点 $c_k (k > 0)$ 的左边連續。

其次, 如取一点 x (异于所有的 c_k), 函数 $g(x)$ 在該处有导数者, 則 $g_1(x)$ 在这一点附近保持一常数值, 因此在該处函数 $g_2(x)$ 也有导数, 且

$$g_2'(x) = g'(x).$$

对連續函数 $g_2(x)$, 由前面的定理, 斯底尔吉斯积分存在:

$$(S) \int_a^b f(x) dg_2(x) = (R) \int_a^b f(x) g_2'(x) dx = (R) \int_a^b f(x) g'(x) dx.$$

同样也很容易計算积分 [参看 (13), (14)]

$$\begin{aligned} (S) \int_a^b f(x) dg_1(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^+ \cdot (S) \int_a^b f(x) d\rho(x - c_k) - \\ &\quad - \sum_{k=1}^m \alpha_k^- \cdot (S) \int_a^b f(x) d\rho(c_k - x) = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^+ f(c_k) + \sum_{k=1}^m \alpha_k^- f(c_k) = f(a) [g(a+0) - g(a)] + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)[g(c_k+0) - g(c_k-0)] + f(b)[g(b) - g(b-0)].$$

将这两等式两边相加, 我們便得到等式(15); $f(x)$ 对函数 $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$ 的斯底尔吉斯积分的存在性也附带建立了[551, 3°].

555 例 1) 用公式(11)計算积分:

$$(a) (S) \int_0^2 x^2 d \log(1+x), \quad (6) (S) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \sin x, \quad (B) (S) \int_{-1}^1 x d \operatorname{arctg} x.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (a) \quad (S) \int_0^2 x^2 d \log(1+x) &= (R) \int_0^2 \frac{x^2}{1+x} dx = \\ &= \left(\frac{1}{2} x^2 - x + \log(1+x) \right) \Big|_0^2 = \log 3, \text{ 等等.} \end{aligned}$$

$$\text{答} \quad (6) \frac{\pi}{2} - 1, \quad (B) 0.$$

2) 用公式(15)計算积分:

$$\begin{aligned} (a) \quad (S) \int_{-1}^3 x dg(x), \text{ 其中 } g(x) &= \begin{cases} 0 & \text{当 } x = -1, \\ 1 & \text{当 } -1 < x < 2, \\ -1 & \text{当 } 2 \leq x \leq 3, \end{cases} \\ (6) \quad (S) \int_0^2 x^2 dg(x), \text{ 其中 } g(x) &= \begin{cases} -1 & \text{当 } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{当 } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}, \\ 2 & \text{当 } x = \frac{3}{2}, \\ -2 & \text{当 } \frac{3}{2} < x \leq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

解 (a) 函数 $g(x)$ 当 $x = -1$ 时有一跳跃 1, 当 $x = 2$ 时有一跳跃 -2 ; 在其余的点处 $g(x) = 0$. 故

$$(S) \int_{-1}^3 x dg(x) = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = -5.$$

(6) 当 $x = \frac{1}{2}$ 时跳跃为 1, 当 $x = \frac{3}{2}$ 时跳跃为 -2 (函数 g 当 $x = \frac{3}{2}$ 时的值对結果沒有影响); 在其余的点处 $g'(x) = 0$. 故有:

$$(S) \int_0^2 x^2 dg(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot (-2) = -\frac{17}{4}.$$

3) 用公式(15)计算积分:

$$(a) \int_{-2}^2 x dg(x), \quad (b) \int_{-2}^2 x^2 dg(x), \quad (B) \int_{-2}^2 (x^3 + 1) dg(x),$$

其中

$$g(x) = \begin{cases} x+2 & \text{当 } -2 \leq x \leq -1, \\ 2 & \text{当 } -1 < x < 0, \\ x^2+3 & \text{当 } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

解 函数 $g(x)$ 当 $x = -1$ 及 $x = 0$ 时有等于 1 的跳跃。导数

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } -2 \leq x < -1, \\ 0 & \text{当 } -1 < x < 0, \\ 2x & \text{当 } 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

所以

$$\int_{-2}^2 x dg(x) = \int_{-2}^{-1} x dx + 2 \int_0^2 x^2 dx + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2\frac{5}{6}.$$

同样,

$$\int_{-2}^2 x^2 dg(x) = 11\frac{1}{3} \quad \text{及} \quad \int_{-2}^2 (x^3 + 1) dg(x) = 15\frac{1}{2}.$$

4) 假定沿着 x 轴上的线段 $[a, b]$ 分布着有质量, 在个别的点处集中着, 一般则连续地分布着。将它们不加区别, 对 $x > a$ 以 $\Phi(x)$ 表分布在区间 $[a, x]$ 上的所有质量的和; 此外, 并令 $\Phi(a) = 0$ 。显然, $\Phi(x)$ 是一单调增加函数。我们的问题是求出这些质量对坐标原点的静矩。

将区间 $[a, b]$ 用点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

分成许多部分。当 $i > 0$ 时在 綫段 $(x_i, x_{i+1}]$ 上显然包含有质量 $\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i) = \Delta\Phi(x_i)$ 。同样在綫段 $[a, x_1]$ 上含有质量 $\Phi(x_1) - \Phi(x_0) = \Delta\Phi(x_0)$ 。在一切情形下, 把质量认为是集中在例如区间的右端, 我们便得所求静矩的近似式

$$M \doteq \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} \Delta\Phi(x_i).$$

当所有 Δx_i 趋近于 0 时, 变到极限就得到准确的结果:

$$M = (S) \int_a^b x d\Phi(x). \quad (16)$$

与在第二卷对通常定积分所说明的一样[339], 这里也可以首先确立对应于轴上自 x 到 $x+dx$ 的“元素”静矩 $dM = x d\Phi(x)$, 然后将这些元素“相加”。

同样, 关于这些同样的质量对原点的惯矩 I 我们有公式

$$I = (S) \int_a^b x^2 d\Phi(x). \quad (17)$$

特别着重指出, 斯底尔吉斯积分给出了可能, 用一个积分公式就将连续分布的质量与集中的质量两种不同情况联结在一起。

设连续分布的质量其线性密度为 $\rho(x)$, 此外设在点 $x = c_1, c_2, \dots, c_k$ 处放置有集中的质量 $m_1, m_2, \dots, m_k$ 。则除这些点外, 函数 $\Phi(x)$ 有导数

$$\Phi'(x) = \rho(x).$$

在每一点 $x = c_j (j = 1, 2, \dots, k)$ 处函数有一跳跃, 等于集中在这一点处的质量 m_j 。

现在如将积分(16)按公式(15)展开, 则得

$$M = (S) \int_a^b x d\Phi(x) = (R) \int_a^b x \rho(x) dx + \sum_{j=1}^k c_j m_j.$$

将右端仔细观察后, 容易知道第一项是连续分布质量的静矩, 而第二项是集中质量的静矩。对积分(17)也可得同样的结果。

5) 为了更好地说明前一练习题的涵义, 要求:

(a) 对下面的质量分布情形组成表示式 $\Phi(x)$ 并作它的图形: 在点 $x = 1, 2, 3$ 处质量大小为 1, 在区间 $[1, 3]$ 上连续分布的质量密度为 2;

(b) 同样, 对这样的分布: 当 $x = 2, 4$ 时质量大小为 2, 在区间 $[0, 5]$ 上连续分布的质量密度为 $2x$ 。

(B) 如 $\Phi(x)$ 等于问题 3) 中的函数 $g(x)$, 说明质量的分布情形。

答 (a) 在区间 $[1, 3]$ 上我们有

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{对 } x = 1, \\ 2x - 1 & \text{对 } 1 < x < 2, \\ 2x & \text{对 } 2 \leq x < 3, \\ 7 & \text{对 } x = 3. \end{cases}$$

(b) 在区间 $[0, 5]$ 上我们有

$$\Phi(x) = \begin{cases} x^2 & \text{对 } 0 \leq x < 2, \\ x^2 + 2 & \text{对 } 2 \leq x < 4, \\ x^2 + 4 & \text{对 } 4 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

(n) 在点 $x = -1$ 及 0 处质量大小为 1 , 在区间 $[-2, -1]$ 上连续分布的质量密度为 1 , 在区间 $[0, 2]$ 上密度变为 $2x$ 。

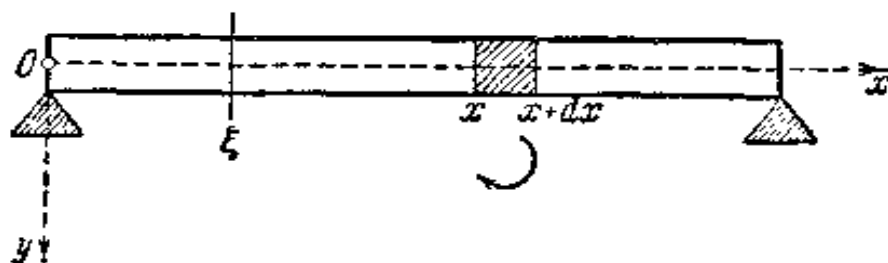


图 30

6) 考察另一问题, 斯底尔吉斯积分在它里面所起的作用与习题 4) 中的相同。假定在安置在两支座上的一梁上(图 30), 除连续分布的负荷外还有集中力作用着。沿梁的轴取 x 轴, 而 y 轴垂直地朝下(见图)。将作用的力不加区别, 对 $x > 0$ 以 $F(x)$ 表所有作用于梁的线段 $[0, x]$ 上的力, 包括支座的反作用力在内; 再令 $F(0) = 0$, 力 $F(x)$ 称作梁在断面 x 处的剪力。这时向下的力将算作正的, 而向上的力算作负的。

我们的任务是要确定梁在任意断面 $x = \xi$ 处的弯矩 M 。所谓弯矩就是梁的右(或左)部上所有的作用力对断面的矩的和。这时, 如说到的是梁的右部, 而这一矩使这一部分以时针向转动, 则矩就算是正的。(对左部来说, 以相反规则。)

因为在梁的右部元素 $(x, x+dx]$ 上作用的力为 $F(x+dx) - F(x) = dF(x)$, 它构成一元素矩

$$dM = (x - \xi) dF(x),$$

故“相加”得

$$M = M(\xi) = (S) \int_{\xi}^l (x - \xi) dF(x).$$

同样, 自梁的左部出发, 可得(在计算矩时要改变正向)

$$M(\xi) = (S) \int_0^{\xi} (\xi - x) dF(x). \quad (18)$$

很容易直接看到, 这两个表示弯矩的式子实际上是相等的。这就相当于条件

$$\int_0^l x dF(x) - \xi F(l) = 0,$$

这是由平衡条件即作用于梁上的一切力的和等于零及这些力(对原点)的矩的和等于零;

* 我们做这一假定仅仅是为了简单起见。

$$F'(l) = 0, \int_0^l x dF'(x) = 0$$

而得來的結果。

如以 $q(x)$ 表連續分布的荷載的強度，則除掉有集中力作用的點外，有

$$\frac{dF'(x)}{dx} = q(x).$$

設集中力 $F'_j (j=1, 2, \dots, k)$ 作用于點 $x=x_j$ 。則，顯然，剪力在這些點處有跳躍，分別等於 F'_j 。再，將公式(15)应用到，例如，積分(18)時，得

$$M(\xi) = \int_0^\xi (\xi - x) q(x) dx + \sum_{x_j < \xi} (\xi - x_j) F'_j.$$

右端的两項容易認識為連續荷載及集中力分別所產生的矩：斯底爾吉斯積分將它們統一為一個積分形式。

我們還證明一事實，在材料力學理論中有用處的。在公式(18)中進行分部積分，得

$$M(\xi) = \int_0^\xi (\xi - x) dF'(x) = (\xi - x) F'(x) \Big|_0^\xi - \int_0^\xi F'(x) d(\xi - x) = \int_0^\xi F'(x) dx.$$

由此就很清楚，除開有集中力作用的點外，等式

$$\frac{dM}{d\xi} = F'(\xi)$$

成立。

7) 例 設一長 $l=3$ 的梁帶有(圖 31) 強度為 $\frac{2}{3}x$ 的“三角形”荷載，此外，設有一等於 3 的集中力加在點 $x=1$ 處，又支座的反作用都等於 -3 (由杠桿定律它們平衡)。試決定剪力 $F'(x)$ 及彎矩 $M(\xi)$ 。

$$F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{當 } x=0, \\ \frac{1}{3}x^2 - 3 & \text{當 } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{3}x^2 & \text{當 } 1 \leq x < 3, \\ 0 & \text{當 } x=3, \end{cases}$$

$$M(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{9}\xi^3 - 3\xi & \text{當 } 0 \leq \xi \leq 1, \\ \frac{1}{9}\xi^3 - 3 & \text{當 } 1 < \xi \leq 3. \end{cases}$$

8) 公式(15)对计算通常积分(在黎曼意义下)也有用处。我们用下面的一般例题来说明达。

设 $\varphi(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上为“分段多项式”的函数, 这就是说区间可用点

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_k = b$$

分为有限个部分使在每一部分上函数 $\varphi(x)$ 可表作不高于 n 次的多项式。在点 a 及 b 处将函数 $\varphi(x)$ 及其所有导数的值用零来代替后, 以 $\delta_j^{(i)}$ ($j=0, 1, \dots, k; i=0, 1, \dots, n$) 表第 i 阶导数 $\varphi^{(i)}(x)$ 在第 j 个点 $x=\xi_j$ 处跳跃的大小。

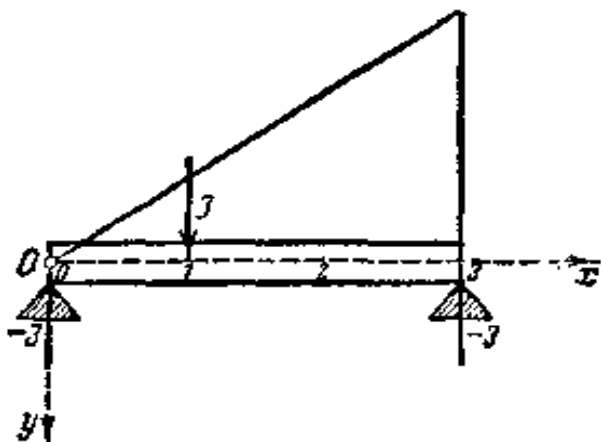


图 31

又设 $f(x)$ 为任何连续函数, 令

$$F_1(x) = \int f(x) dx, \text{ 一般, } F_s(x) = \int F_{s-1}(x) dx \quad (s > 1).$$

则下一公式成立:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \varphi(x) dx &= \\ &= - \sum_{j=0}^k F_1(\xi_j) \delta_j^{(0)} + \sum_{j=0}^k F_2(\xi_j) \delta_j^{(1)} - \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{j=0}^k F_{k+1}(\xi_j) \delta_j^{(k)}. \end{aligned}$$

事实上, 我们逐次地得

$$(R) \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = (S) \int_a^b \varphi(x) dF_1(x) = \varphi(x) F_1(x) \Big|_a^b - (S) \int_a^b F_1(x) d\varphi(x);$$

上下代入式等于零, 而积分

$$\int_a^b F_1(x) d\varphi(x) = \sum_j F_1(\xi_j) \delta_j^{(0)} + \int_a^b F_1(x) \varphi'(x) dx;$$

$$\text{同样} \quad \int_a^b F_1(x) \varphi'(x) dx = - \sum_j F_2(\xi_j) \delta_j^{(1)} - \int_a^b F_2(x) \varphi''(x) dx;$$

等等。

9) 最后, 借公式(11)之助我们来建立一个有用的对通常积分的分部积分的一般公式。若 $u(x)$ 及 $v(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上都绝对可积, 而 $U(x)$ 及 $V(x)$ 由积分公式

$$U(x) = U(a) + \int_a^x u(t) dt,$$

$$V(x) = V(a) + \int_a^x v(t) dt$$

所确定, 则公式

$$\int_a^b U(x)v(x)dx = U(x)V(x)\Big|_a^b - \int_a^b V(x)u(x)dx \quad (19)$$

成立。为了证明起见, 由公式(11), 将左端的积分用斯底尔吉斯积分来代替并分部积分起来 [552]:

$$\int_a^b U(x)v(x)dx = \int_a^b U(x)dV(x) = U(x)V(x)\Big|_a^b - \int_a^b V(x)dU(x).$$

要想得到(19)只要再一次应用公式(11)到后一积分上去。

这里函数 $u(x)$, $v(x)$ 所起的作用好像是函数 $U(x)$, $V(x)$ 的导数, 但事实上它们并不是导数。当函数 $u(x)$ 及 $v(x)$ 连续 时, 我们便回到了通常的分部积分公式, 因为这时确有

$$U'(x) = u(x), \quad V'(x) = v(x).$$

556 斯底尔吉斯积分的几何解说 考察积分

$$(S) \int_a^b f(t)dg(t), \quad (20)$$

假设函数 $f(t)$ 连续且为正的, 而 $g(t)$ 只要单调增加(在严格的意义下); 函数 $g(t)$ 可有(跳跃)不连续。

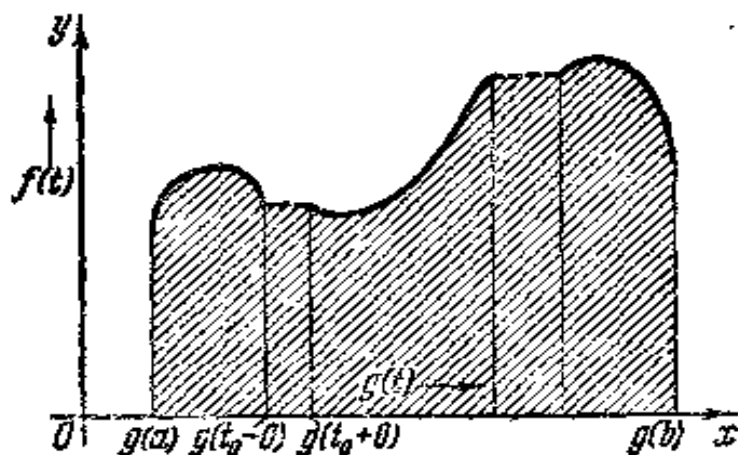


图 32

参数方程

$$x = g(t), \quad y = f(t) \quad (21)$$

代表某一曲线(K), 一般说来, 是不连续的(图 32)。如对某一 $t = t_0$, 函数 $g(t)$ 有一跳跃, 即 $g(t_0-0) < g(t_0+0)$ 时, 则 $x = g(t)$ 的这些极限值有同一个 $y = f(t)$ 的极限值 $f(t_0)$ 与它们相对应。将曲线(K)用一些水平线段添补起来, 它们是联结对应于函数 $g(t)$ 的一切跳跃的点偶

$$(g(t_0-0), f(t_0)) \text{ 及 } (g(t_0+0), f(t_0))$$

而成的。这样就形成了一连续的曲线(L)。我们求证, 积分(20)代表这一曲线下面图形的面积, 更正确地說, 代表由曲线(L), x 轴及对应于横坐标 $g(a)$ 与 $g(b)$ 的两头的纵坐标所围的面积。

为达此目的将区间 $[a, b]$ 用点

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_n = b$$

分为许多部分, 与此相应, x 轴上的区间 $[g(a), g(b)]$ 由点

$$g(a) < g(t_1) < \cdots < g(t_i) < g(t_{i+1}) < \cdots < g(b)$$

分成许多部分。

设函数 $f(t)$ 在第 i 个区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 上的最小值及最大值为 m_i 及 M_i , 作斯底尔吉斯-达布下和及上和

$$s = \sum_i m_i \Delta g(t_i), \quad S = \sum_i M_i \Delta g(t_i).$$

现在容易看到, 它们代表内面一些矩形及外面一些矩形所成图形的面积, 所考察的曲线图形夹在这些矩形之间。

因为当所有的 Δt_i 趋近于零时, 这两和趋于公共极限(20), 由此推得[327], 我们的图形是可求面积的, 且确实积分(20)就是它的面积。

557 中值定理, 估计值 1* 设在区间 $[a, b]$ 上函数 $f(x)$ 有界:

$$m \leq f(x) \leq M,$$

而 $g(x)$ 单调增加。如 $f(x)$ 对 $g(x)$ 的斯底尔吉斯积分存在, 则下一公式成立:

$$I = (S) \int_a^b f(x) dg(x) = \mu[g(b) - g(a)], \text{ 其中 } m \leq \mu \leq M. \quad (22)$$

这就是斯底尔吉斯积分的中值定理。

为了证明起见我们从一个斯底尔吉斯和 σ 的明显的不等式出发:

$$m[g(b) - g(a)] \leq \sigma \leq M[g(b) - g(a)],$$

变到极限, 得

$$m[g(b) - g(a)] \leq I \leq M[g(b) - g(a)] \quad (23)$$

或*

$$m \leq \frac{I}{g(b) - g(a)} \leq M.$$

* 我们假定 $g(b) > g(a)$, 因为 $g(b) = g(a)$ [即 $g(x) = \text{const.}$] 不需讨论, 这时公式(22)两端都是零。

将这一比表作 μ , 便得(22)。

如函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上連續, 則用普通的方法就能证明 μ 是这一区间上某一点处的函数值, 公式(22)就作下形

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = f(\xi)[g(b) - g(a)], \text{ 其中 } a \leq \xi \leq b. \quad (24)$$

2° 在實踐中斯底尔吉斯积分最重要的情况是函数 $f(x)$ 連續, 函数 $g(x)$ 有界变差。在这种情况下, 斯底尔吉斯积分的下一估計成立:

$$\left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq MV, \quad (25)$$

其中
$$M = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|, V = \bigvee_a^b g(x).$$

实际上, 对斯底尔吉斯和 σ 有

$$\begin{aligned} |\sigma| &= \left| \sum_i f(\xi_i) \Delta g(x_i) \right| \leq \sum_i |f(\xi_i)| |\Delta g(x_i)| \leq \\ &\leq M \sum_i |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leq MV, \end{aligned}$$

故要得到所需不等式只要变到极限就行。

3° 特別, 由此亦推得出和 σ 与斯底尔吉斯积分 I 本身近似程度的估計(对函数 f 及 g 在前面的假定下)。将 σ 及 I 表作下形

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_i f(\xi_i) \Delta g(x_i) = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\xi_i) dg(x), \\ I &= \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dg(x), \end{aligned}$$

并将这两等式两端相减, 得

$$\sigma - I = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(\xi_i) - f(x)] dg(x).$$

如与通常一样, 以 ω_i 表函数 $f(x)$ 在区間 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振動, 故

$$|f(\xi_i) - f(x)| \leq \omega_i, \text{ 对 } x_i \leq x \leq x_{i+1},$$

則分別应用估計值(25)到每一积分 $\int_{x_i}^{x_{i+1}}$ 时我們将有

$$\left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(\xi_i) - f(x)] dg(x) \right| \leq \omega_i \bigvee_{x_i}^{x_{i+1}} g(x).$$

如区間 $[a, b]$ 被分成非常小的部分使所有的 $\omega_i < \varepsilon$, 其中 $\varepsilon > 0$ 是事先任意取定的数, 則我們断言,

$$|\sigma - I| \leq \varepsilon \bigvee_a^b g(x). \quad (26)$$

在下节中我們將利用这些估計值。

558 斯底尔吉斯积分記号下面的极限过程 1° 設函数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 在区間 $[a, b]$ 上連續且当 $n \rightarrow \infty$ 时一致趋近于极限函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

[显然, 也是連續的, 408], 而 $g(x)$ 是一有界变差函数。則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dg(x) = \int_a^b f(x) dg(x).$$

证明 对已給的 $\varepsilon > 0$ 可求得一 N , 使当 $n > N$ 时对所有的 x 将有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

則, 由(25), 对 $n > N$,

$$\left| \int_a^b f_n(x) dg(x) - \int_a^b f(x) dg(x) \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dg(x) \right| \leq$$

$$\leqslant \varepsilon \bigvee_a^b g(x),$$

由于 ε 的任意性, 定理得证。

2° 現設函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上連續, 而所有的函数 $g_n(x)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 在这区間上有界变差。如这些函数的全变差全体是有界的:

$$\bigvee_a^b g_n(x) \leqslant V \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

且当 $n \rightarrow \infty$ 时 $g_n(x)$ 趋近于一极限函数

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x),$$

則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dg_n(x) = \int_a^b f(x) dg(x).$$

证明 首先我們证明极限函数 $g(x)$ 本身亦有界变差。将区間 $[a, b]$ 任意地用点

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_m = b$$

分为許多部分, 我們將有(对任何的 n)

$$\sum_i |g_n(x_{i+1}) - g_n(x_i)| \leqslant \bigvee_a^b g_n(x) \leqslant V.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时变到极限, 得

$$\sum_i |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leqslant V,$$

于是

$$\bigvee_a^b g(x) \leqslant V.$$

作斯底尔吉斯和

$$\sigma = \sum_i f(x_i) \Delta g(x_i), \quad \sigma_n = \sum_i f(x_i) \Delta g_n(x_i).$$

如假定这时区间 $[a, b]$ 分得很细, 已使函数 $f(x)$ 在每一部分中的振动小于事先任意取定的数 $\varepsilon > 0$, 则由估计值 (26), 对所有的 n ,

$$\left| \sigma_n - \int_a^b f(x) dg_n(x) \right| \leq \varepsilon V, \quad \left| \sigma - \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq \varepsilon V. \quad (27)$$

另一方面, 如固定上述条件下所取的一分法, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时显然 $\sigma_n \rightarrow \sigma$, 故可求得一 N 使对 $n > N$ 就有

$$|\sigma_n - \sigma| < \varepsilon. \quad (28)$$

则由 (27) 及 (28), 对同样的 n 值, 我们将有

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f dg_n - \int_a^b f dg \right| &\leq \left| \int_a^b f dg_n - \sigma_n \right| + |\sigma_n - \sigma| + \\ &\quad + \left| \sigma - \int_a^b f dg \right| < (2V + 1)\varepsilon, \end{aligned}$$

于是, 由于 ε 的任意性, 即得所需结论。

559 例题及补充 1) 设函数 $g(x)$ 在严格的意义下单调增加, 对在公式 (24) 中所指出的数 ε , 可以证明一更精确的断言: $a < \xi < b$ 。

以 m 及 M 表函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最小及最大值, 并认为 $m < M$; * 容易求得这一区间的一部分 $[\alpha, \beta]$, 使在这一部分上, 数 $m' > m$ 及 $M' < M$ 为 $f(x)$ 的界, 故 [比较 (23)]

$$\begin{aligned} m[g(\beta) - g(\alpha)] &< m'[g(\beta) - g(\alpha)] \leq (S) \int_{\alpha}^{\beta} \leq \\ &\leq M'[g(\beta) - g(\alpha)] < M[g(\beta) - g(\alpha)]. \end{aligned}$$

对区间 $[\alpha, \alpha]$ 及 $[\beta, \beta]$ 写出形如 (23) 的不等式后并将它们与上面的不等式相加, 得的不是 (23) 而是一更精确的不等式:

$$m[g(b) - g(a)] < I < M[g(b) - g(a)],$$

* 当 $m = M$ 时函数 $f(x)$ 成为常数, 这时值就可以任意地选取。

故数

$$\mu = \frac{I}{g(b) - g(a)}$$

严格地在 m 及 M 之間; 因而 ξ 也严格地处于 a 及 b 之間, 其中 $\mu = f(\xi)$, 等等。

2) 利用第 554 目的公式 (11), 斯底尔吉斯积分的分部积分公式及中值定理 [552, 557, 1°], 非常容易重新建立通常积分的第二中值定理 [294]。

設在区间 $[a, b]$ 上 $f(x)$ (在黎曼意义下) 可积, 而 $g(x)$ 单调增加*。作一函数

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx \quad (a \leq x \leq b),$$

大家都知道, 它是連續的 [293, 11°]。

現在我們逐步有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b g(x) dF(x) = g(x)F(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)dg(x) = \\ &= g(b)F(b) - F(\xi)[g(b) - g(a)] = g(a)F(\xi) + g(b)[F(b) - F(\xi)] = \\ &= g(a) \int_a^{\xi} f(x)dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x)dx \quad (a \leq \xi \leq b), \end{aligned}$$

这就是所要求证的。

如 $g(x)$ 在严格的意义下单调增加, 则由 1) 中所述的說明, 对 ξ 可更精确地说: $a < \xi < b$ 。

3) 求证: 如兩函数 f 及 g 之一在点 $x=c$ 处連續, 同时另一函数在这一点附近有限,

則积分 $(S) \int_a^c$ 及 $(S) \int_c^b$ 的存在就能推出 $(S) \int_a^b$ 的存在 [参看 551, 5°]。

为达此目的, 我們注意, 如在形成斯底尔吉斯和 σ 时我們將点 c 包括在分点之列, 則和 σ 可拆成对部分区间 $[a, c]$ 及 $[c, b]$ 的两个同样的和; 当 $\lambda = \max \Delta x_i \rightarrow 0$ 时它将趋近于积分的和 $\int_a^c f d\eta + \int_c^b f d\eta$ 。現設点 c 不在分点之列。將点 c 添加进去, 我們自 σ 就得出新的和 $\bar{\sigma}$, 我們已經知道, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时它有上述极限。因此, 只要証明差 $\sigma - \bar{\sigma}$ 与 λ 同时趋近于 0。

設点 c 落在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上; 則和 $\bar{\sigma}$ 与和 σ 的区别仅仅在于: σ 的一项

$$f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$$

* $g(x)$ 单调减少的情形很容易变成这种情况。

变成了两项:

$$f(\xi')[g(c) - g(x_k)] + f(\xi'')[g(x_{k+1}) - g(c)],$$

其中 ξ' 及 ξ'' 是在条件 $x_k \leq \xi' \leq c$ 及 $c \leq \xi'' \leq x_{k+1}$ 下任意取的。为简化起见令 $\xi' = \xi'' = c$, 后式就化为

$$f(c)[g(x_{k+1}) - g(x_k)],$$

所以

$$\sigma - \bar{\sigma} = [f(\xi_k) - f(c)][g(x_{k+1}) - g(x_k)]. \quad (29)$$

当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 右端第一因子为无穷小, 同时第二个因子有界, 因此, $\sigma - \bar{\sigma} \rightarrow 0$, 这就是所要证的。

4) 若函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在同一点 $x=c$ 处 ($a \leq c \leq b$) 都不连续, 则斯底尔吉斯积分

$$\int_a^b f(x) dg(x) \quad (30)$$

根本不存在。

为了证明起见, 分成两种情况。开始设 $a < c < b$, 且极限 $g(c-0)$ 及 $g(c+0)$ 不相等。则当作斯底尔吉斯和时我们就不将 c 点取作分点, 譬如设 $x_k < c < x_{k+1}$ 。一次取 $\xi_k \neq c$, 另一次取 c 作为 ξ_k , 我们作出两个和 σ 及 $\bar{\sigma}$, 其差可化为(29)式。使分点接近时, 有

$$g(x_{k+1}) - g(x_k) \rightarrow g(c+0) - g(c-0) \neq 0.$$

此外, 点 ξ_k 可这样取, 使差 $f(\xi_k) - f(c)$ 的绝对值大于某一固定正数。则差 $\sigma - \bar{\sigma}$ 就不趋近于 0, 故积分不可能存在。

如 $g(c-0) = g(c+0)$ 但它们的公共值异于 $g(c)$ [“可去不连续”]*, 则相反地我们就将 c 取在分点之列, 设 $c = x_k$ 。如 $f(x)$ 在点 $x=c$ 处例如有一右边的不连续, 则与刚才一样, 作两个和 σ 及 $\bar{\sigma}$, 仅由 ξ_k 的选取而不同: 对 σ 点 ξ_k 任意取在 $x_k = c$ 及 x_{k+1} 之间, 而对 $\bar{\sigma}$ 点 c 就取作 ξ_k 。与前面一样, 我们有(29)式且推演可同样地得出来。

习题 3) 及 4) 更阐明了在第 551 目末所说的重要事实。

5) 设在区间 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 连续而 $g(x)$ 为有界变差。

根据估计式(25), 求证在函数 $g(x)$ 连续的 x_0 处, 斯底尔吉斯积分

$$I(x) = \int_a^x f(t) dg(t)$$

对其变动上限 x 连续。

* 这里也包括这种情况, 即: 或者 $c=a$ 且 $g(a+0)$ 异于 $g(a)$, 或者 $c=b$ 且 $g(b-0)$ 异于 $g(b)$ 。

如注意到在点 x_0 处变差 $\sum_a^x g(x)$ 亦必連續 [546, 9^{*}], 則結論立刻可从下一不等式推出:

$$\left| I(x_0 + \Delta x) - I(x_0) \right| = \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f dg \right| \leq \max_{a \leq x \leq b} f(x) \cdot \sum_{x_0}^{x_0 + \Delta x} g(x).$$

6) 如 $\mathfrak{B}$ 是在区间 $[a, b]$ 上的連續函数类, 而 $\mathfrak{B}$ 是在这一区间上有界变差的函数类, 則如大家所知道的, 一类中的每一个函数对另一类的每一个函数是可积分的。求证, 要保持所述性质, 这一类也好, 那一类也好, 都不能推广。

对于类 $\mathfrak{B}$ 來說, 由 4), 这几乎是明显的。事实上, 如函数 $f(x)$ 有一不連續点 x_0 , 則它, 例如, 对有同一不連續点的有界变差函数 $\rho(x - x_0)$, 根本就不能积分 [554]。

現設 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有一无穷全变差, 在这一假定下我們將做一連續函数 $f(x)$ 使积分 (30) 不存在。

如将区间 $[a, b]$ 平分, 則至少在一个一半中函数 $g(x)$ 的全变差亦为无穷; 将这一半又平分, 如此繼續下去。用这样的方法确定出某一点 c , $g(x)$ 在它的每一邻域中沒有有界的变差。为简单起見設 $c = b$ 。

在这样的情况下容易作出一單調增加的且趋近于 b 的数列 $x = a_n$:

$$a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots < b, \quad a_n \rightarrow b,$$

使級数
$$\sum_{i=0}^{\infty} |g(a_{i+1}) - g(a_i)|$$

发散。对于这一級数又可求得一趋近于 0 的数列 $f_i > 0 (i = 0, 1, 2, \dots)$ 使級数

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i |g(a_{i+1}) - g(a_i)| \quad (31)$$

亦发收 [比照 365, 3) 及 5)]。現在我們来定义函数 $f(x)$, 令

$$f(a_i) = f_i \operatorname{sign}[g(a_{i+1}) - g(a_i)]^* \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

$$f(b) = 0,$$

而在区间 (a_i, a_{i+1}) 內认为 $f(x)$ 是线性的:

$$f(x) = f(a_i) + \frac{f(a_{i+1}) - f(a_i)}{a_{i+1} - a_i} (x - a_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

* 我們提醒一下, $\operatorname{sign} z$ 为 $+1, 0$ 或 -1 視 $z > 0, = 0$ 或 < 0 而定。在所有的情况下 $z \operatorname{sign} z = |z|$ 。

显然 $f(x)$ 是连续的。同时, 由于级数(31)发散的缘故, 当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) [g(a_{i+1}) - g(a_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} f_i |g(a_{i+1}) - g(a_i)| \rightarrow +\infty,$$

所以 f 对 g 的积分的确不存在。

所证得的断语也可这样说: 如一已知函数 f 对 $\mathfrak{G}$ 中任何 g 斯底尔吉斯积分存在, 则 f 必须属于 $\mathfrak{F}$; 同样, 如 $\mathfrak{F}$ 中任何的 f 对一已知函数 g 这一积分存在, 则 g 必须属于 $\mathfrak{G}$ 。

7) 在斯底尔吉斯积分记号下作极限手续的第一定理中 [558, 1°], 我们曾经要求函数序列 $\{f_n(x)\}$ 一致趋近于极限函数 $f(x)$ 。但亦可以用更一般的条件来代替这一要求; 这条件就是: 这些函数是一致有界的:

$$|f_n(x)| \leq M$$

$$(M = \text{const.}, a \leq x \leq b, n = 1, 2, 3, \dots).$$

[此处还必须亦只须事先假定极限函数 $f(x)$ 连续。]

证明时只要考察 $g(x)$ 在严格的意义下增加的情况就够 [参看第 545 目中的附注]。但对这种情况, 可利用在 553 目中所引进的变换 [参看 (10)]:

$$\begin{aligned} (S) \int_a^b f_n(x) dg(x) &= (R) \int_{v_a}^V f_n(g^{-1}(v)) dv, \\ (S) \int_a^b f(x) dg(x) &= (R) \int_{v_a}^V f(g^{-1}(v)) dv, \end{aligned}$$

而在处理黎曼积分时, 只要应用阿尔采拉定理 [488]。

8) 最后, 我们指出斯底尔吉斯积分的另一解法, 与区间的可加函数概念 [参照 339] 有关。

设对已知区间 $[a, b]$ 的每一部分 $[\alpha, \beta]$ 定义一数 $G([\alpha, \beta])$, 且若区间 $[\alpha, \beta]$ 由点 γ 分为两部分 $[\alpha, \gamma]$ 及 $[\gamma, \beta]$, 则

$$G([\alpha, \beta]) = G([\alpha, \gamma]) + G([\gamma, \beta]).$$

则 $G([\alpha, \beta])$ 是变动区间 $[\alpha, \beta]$ 的可加函数。设除此以外, 在区间 $[a, b]$ 上又给出一函数 $f(x)$ 。与通常一样, 现在将区间 $[a, b]$ 用点

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

分成部分 $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$), 在每一部分中任意选择一点 ξ_i , 最后作和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) G([x_i, x_{i+1}]). \quad (32)$$

这一和当 $\lambda = \max (x_{i+1} - x_i) \rightarrow 0$ 时的极限就是一斯底尔吉斯积分, 很自然地——按作出它的过程——表作:

$$\int_a^b f(x)G(dx). \quad (33)$$

如令 $g(x) = G([a, x])$ 对 $x \geq a$, $g(a) = 0$, 定义一第二点函数 $g(x)$, 则由于函数 G 的可加性, 在所有情形下

$$G([\alpha, \beta]) = g(\beta) - g(\alpha), \quad (34)$$

故和(32)就成为通常的斯底尔吉斯和

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(x_{i+1}) - g(x_i)],$$

而极限(33)就成为通常的斯底尔吉斯积分

$$(S) \int_a^b f(x)dg(x).$$

反过来, 如后面这积分存在, 则用等式(34)定义一区间函数后(且容易验证, 它是可加的), 可化通常的斯底尔吉斯积分成为积分(33)。

560 化第二型曲线积分为斯底尔吉斯积分 读者在掌握了斯底尔吉斯积分后, 现在回来考察第二型曲线积分[521]是很有用处的:

$$\int_{(AB)} f(x, y)dx \left[\text{或} \int_{(AB)} f(x, y)dy \right]. \quad (35)$$

设想曲线 (AB) 以参数方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

给出, 且当 t 自 α 单调地变到 β 时曲线以自 A 到 B 的方向描画。为明确起见设 $\alpha < \beta$ 。则对于为了要形成积分和而取在曲线上的点 A_i ($i = 0, 1, \dots, n$), 就有增加的参数 t 的值

$$t_0 = \alpha < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = \beta$$

与它们相对应, 而对于在弧 $A_i A_{i+1}$ 上所选取的点 M_i , 就有值 $t = \tau_i$, $t_i \leq \tau_i \leq t_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$), 相对应。积分和本身, 例如对第一个积分来说, 可写作

$$\sigma = \sum_i f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \Delta\varphi(t_i)$$

的样子。立刻明白,这是一个斯底尔吉斯和,故第二型曲线积分由定义本身就与特别的斯底尔吉斯积分恒等:

$$\int_{(AB)} f(x, y) dx = (S) \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) d\varphi(t).$$

同样,
$$\int_{(AB)} f(x, y) dy = (S) \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) d\psi(t).$$

由此就很容易得出曲线积分(35)存在的一个非常普遍的条件:只要假定函数 $f(x, y)$ 连续, 而函数 $\varphi(t)$ [或 $\psi(t)$, 看情形] 为有界变差 [550, 1] 就够了。

特别, 如曲线 (AB) 可求长 [547], 而函数 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 连续, 则积分

$$\begin{aligned} \int_{(AB)} P dx + Q dy &= \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t)) d\varphi(t) + \int_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t)) d\psi(t) \end{aligned}$$

存在。

现在, 如果考虑到在 554 中说过的斯底尔吉斯积分算法 [尤其, 参看 2°], 则可重新得到第 522 目中的公式(5), (5*) 或(6), 且可在比以前更普遍的假定下得到。

其次, 现在也容易来推广第 526 目中的最终结果: 由一连续可求长曲线所范围的面积可用该目中的任一公式(8), (9) 或(10)表示。这时在推理中没有什么要变更, 因为第 525 目的预备定理立刻可推广到可求长曲线的情形; 亦可参看 547 的最后说明。

最后, 曲线积分与道路无关的整个理论 [§ 3] 亦可直接推广到沿任何可求长道路所取的积分的情形。

第十六章 二重积分

§1 二重积分的定义及简单性质

561 柱形长条体积的问题 与曲边梯形面积问题引导到单重积分概念[282]一样,同样,柱形长条体积的问题就引导到一新的概念——二重(定)积分。

考察一立体 V , 上面为曲面

$$z = f(x, y) \quad (1)$$

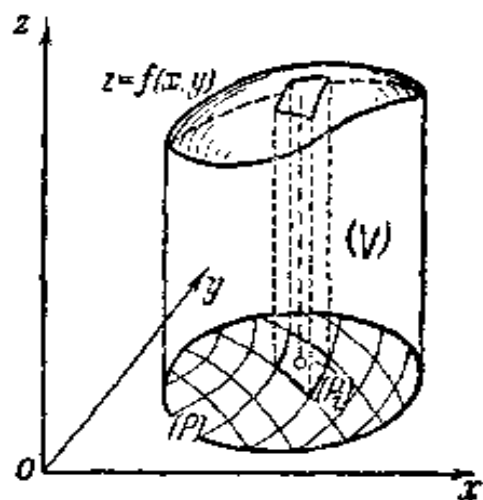


图 33

所限制, 侧面为一柱面所限制其母线平行于 z 轴, 最后, 下面为 xy 平面上的一平面图形 (P) 所限制(图 33); 要去求立体 V 的体积。*

为了解决这一问题, 我们采用通常在积分学中所用的方法, 将所求量分为元素部分, 近似地计算每一部分, 相加并接着取极限。为达此目的, 将区域 (P) 用一曲网分成许多部分 $(P_1), (P_2), \dots, (P_n)$, 并考察许多柱形细条, 它们的底面是这些部分区域, 总起来就形成所给的立体。

为了要算出一个一个细条的体积, 在每一图形 (P_i) 上任取一点 (ξ_i, η_i) 。如将每一细条近似地当作一真正的柱形, 其高等于图中一长一短的虚线 $f(\xi_i, \eta_i)$, 则个别的细条体积近似地等于

$$f(\xi_i, \eta_i) \cdot P_i,$$

其中 P_i 表图形 (P_i) 的面积。在这样的情况下整个立体体积的近似式

* 如假定函数 $f(x, y)$ 连续而平面区域 (P) 可求面积, 则在这情况下体积存在本身容易从在第 332 及 328 日中所叙述的道理中推出来。

为

$$V \doteq \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) P_i.$$

要增加这一等式的准确性就要减小平面小块(P_i)的幅度,同时增加它们的个数。当所有的区域(P_i)的最大直径趋近于零而变到极限时,这一等式就变成准确的了,故

$$V = \lim \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) P_i, \quad (2)$$

所提出的問題就此解决了。

这种形状的极限就是函数 $f(x, y)$ 对区域(P)的二重积分; 它表作記号

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP,$$

故体积的公式(2)作下形

$$V = \iint_{(P)} f(x, y) dP. * \quad (2*)$$

因此, 二重积分是定积分概念在两个变数函数上的直接推广。在决定各种下同的几何及物理量时它同样起很重要的作用。

562 化二重积分为逐次积分 在进行几何地解說二重积分为柱形长条体积时, 我們这里也指出如何用化为逐次积分的方法来計算它。

第二卷中我們已經討論过用横断面来計算立体(V)的体积的問題[333]。我們回

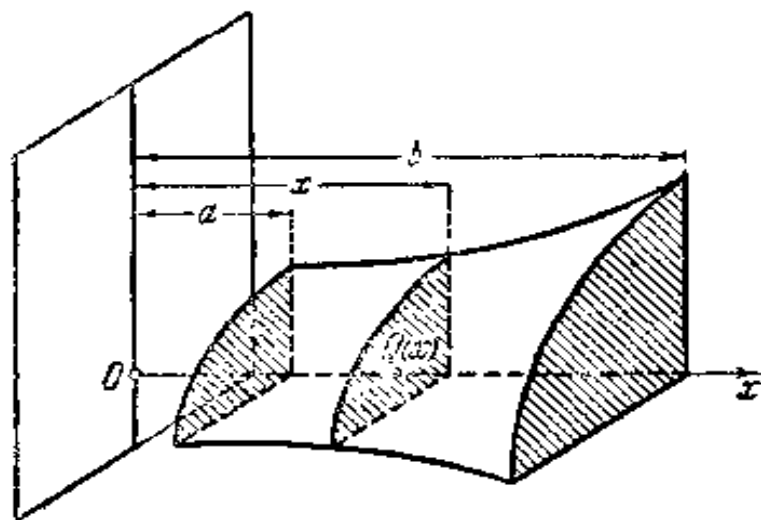


图 34

* 不难給这一公式的推演以一完全严格的形式, 参看第 565 目中的附注。

想一下与这里有关的公式。設立体范围在平面 $x=a$ 及 $x=b$ 之間 (图

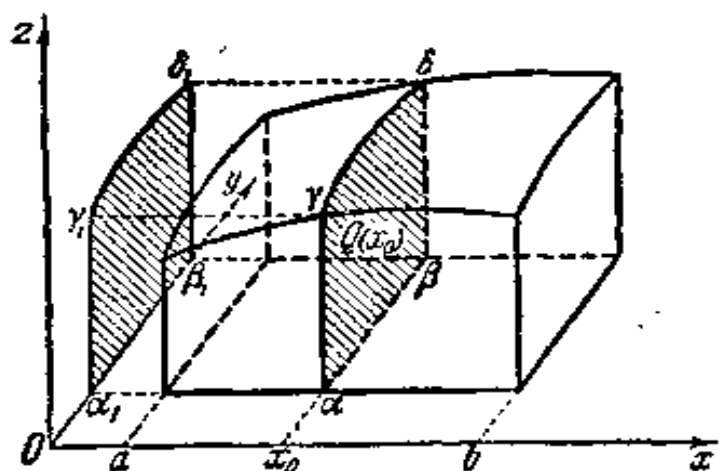


图 35

34), 又立体被垂直于 x 軸且对应于横坐标 $x(a \leq x \leq b)$ 的平面所截的断面面积为 $Q(x)$ 。則立体体积在假定它存在时可用公式

$$V = \int_a^b Q(x) dx \quad (3)$$

来表示。

現在应用这一公式到柱形长条体积的計算, 这种长条在前一日中已談到过。我們以一简单情形开始, 即长条的底面是一矩形 $[a, b; c, d]$ (图 35)。

长条被平面 $x=x_0 (a \leq x_0 \leq b)$ 所截的断面是一曲边梯形 $\alpha\beta\gamma\delta$ 。为了要求出它的面积, 将这一图形射影到 yz 平面上, 我們得到一与它全同的梯形 $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ (因为射影没有发生变形)。于是,

$$Q(x_0) = \text{面积 } \alpha\beta\gamma\delta = \text{面积 } \alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1.$$

不过 yz 平面上的曲綫 $\gamma_1\delta_1$ 的方程显然是

$$z = f(x_0, y) \quad (c \leq y \leq d).$$

利用所熟知的表曲边梯形面积为定积分的式子, 我們将有

$$Q(x_0) = \int_c^d f(x_0, y) dy.$$

因为我們的推理可用于任何断面, 故一般对 $a \leq x \leq b$,

$$Q(x) = \int_c^d f(x, y) dy. *$$

将这一值 $Q(x)$ 代入公式(3), 得

* 这是 x 的函数, 对于 x 也是連續的[468], 这也是我們在推演公式(3)时已經假定了的。

$$V = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

但对体积 V 我們有式子(2*), 因此,

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \quad (4)$$

——二重积分变成逐次积分了。

在更一般的情况下, 当 xy 平面上的区域 (P) 是由两曲线

$$y = y_0(x), \quad y = Y(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

及两纵坐标 $x = a$ 与 $x = b$ (图 36)

所围的曲边梯形时也可得同样的

结果。与讨论过的情况比较起来

其差别在于: 以前对任何固定的

$x = x_0$, y 的变化发生在同一区间

$[c, d]$ 上, 而现在这一区间

$$[y_0(x_0), Y(x_0)]$$

本身亦与 x_0 有关, 故

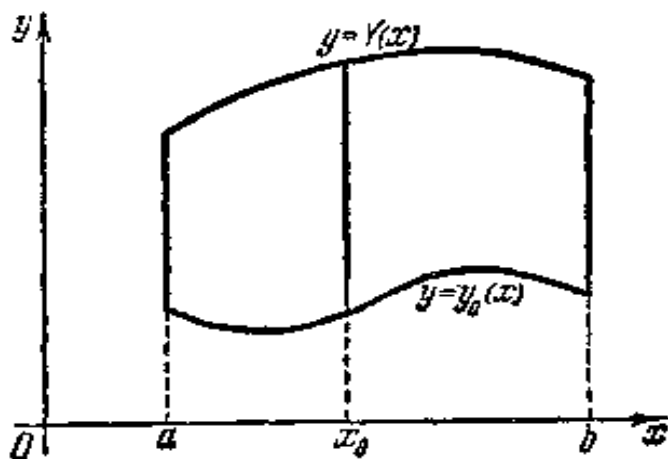


图 36

$$Q(x_0) = \int_{y_0(x_0)}^{Y(x_0)} f(x_0, y) dy.$$

最后得

$$V = \iint_{(P)} f(x, y) dP = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y) dy. \quad (5)$$

在讀者对二重积分概念及其計算在几何解說下熟悉以后, 我們現在就要轉而用純分析的观点更一般地討論这問題。

563 二重积分的定义 然而, 我們这里亦不能完全避免几何, 或

* 这里, 里面的积分是 x 的一連續函数[參看 471]。

至少不能避免几何的语言[150—153]。我們將談到所討論的两个变数函数定义所在的“二維区域”(P)，將談到“用曲綫”分它为部分“区域”，將取这些“区域”的“面积”等等。事实上这是算术的二維空間中的“区域”及“曲綫”，数对就是它們的“点”。但通常所有这些“形象”，为方便起見总是用与它們相对应的真正的几何形象来替代，而彼此間不加任何区别。特別，將算术二維空間中的“区域面积”永远了解为对应的几何区域面积。

我們回想一不，要任一曲綫所範圍的区域可求面积，必要且充分地須这一曲綫有面积 0 [328]。光滑曲綫或由有限多个光滑段所組成的曲綫(所謂分段光滑的曲綫)形成这种曲綫的很寬广的一类。*我們以后將假定，区域(P)的边界以及我們用来將区域分割的曲綫皆有面积 0 (例如，属于上述的类中)；这就保证了我們所需用的一切面积的存在。

現在我們回到实际上已在第 561 目中引进过的二重积分概念，并更广泛地給它一个一般的定义。

設在区域(P)中定义一函数 $f(x, y)$ 。**將区域(P)用一曲綫网分成有限个区域(P_1), (P_2), ..., (P_n), 它們的面积为 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 。虽然最簡單不过是假想这些部分区域为通速的，但为了簡化将来的叙述起見，对它們还是不撇开有不通速的可能好些。在第 i 个元素区域(P_i)範圍內任取一点(ξ_i, η_i)，將在这一点处的函数值 $f(\xi_i, \eta_i)$ 乘上对应区域的面积 P_i ，并将所有类似的乘积相加。所得的和

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) P_i$$

將称为函数 $f(x, y)$ 在区域(P)上的积分和。

* 不破坏所述性质，甚至可允許有有限个奇点存在。

** 这里我們并没有做关于連續性的任何假定。

以 λ 表部分区域 (P_i) 中的最大直径。^{*} 如当 $\lambda \rightarrow 0$ 时积分和 σ 有一确定的有限极限

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma,$$

既与区域 (P) 分为部分 (P_i) 的分法无关, 又与在每一部分范围内点 (ξ_i, η_i) 的选法亦无关, 则这一极限^{**} 就称为函数 $f(x, y)$ 在区域 (P) 上的二重积分并表作记号

$$I = \iint_{(P)} f(x, y) dP.$$

有积分的函数称为可积的。

564 二重积分存在的条件 可积函数必须是有界的。事实上, 在相反的情形下, 对任何已给的将区域 (P) 分割的方法, 依靠点 (ξ_i, η_i) 的选择可使积分和任意大。

所以以后讨论到已知函数 $f(x, y)$ 可积条件时, 我们将事先假定它是有界的:

$$m \leq f(x, y) \leq M.$$

与一个变数函数时一样, 这里引进所谓达布上和与下和:

$$s = \sum_{i=1}^n m_i P_i, \quad S = \sum_{i=1}^n M_i P_i$$

较为方便, 其中 m_i 及 M_i 分别表示函数 $f(x, y)$ 的值在区域 (P_i) 上的下确界与上确界。

当给出分割区域 (P) 的一方法时, 不论点 (ξ_i, η_i) 如何选取, 不等式

$$s \leq \sigma \leq S$$

将适合。但适当地选择这些点可使值 $f(\xi_i, \eta_i)$ 任意地接近于 m_i (M_i),

^{*} 我们回想一下, 一点集中两任意点距离的上确界称作点集合的直径。在闭的平面区域由连续曲线所范围时最大的弦就是直径。参看 164, 316.

^{**} 读者很容易自己确定这一新“极限”的正确意义。

而与此同时可使和 σ 任意地接近于 $s(S)$, 因此, 达布上和及下和分别对应于区域的同一分法的积分和的下确界及上确界。

与线性情形时一样, 对达布和可确立下列性质。

第一性质 当在旧的分割线外如添加一些新线将部分 (P_i) 进一步分割时, 达布下和不会减少, 上和不会增大。

第二性质 每一达布下和不超过每一上和, 即使对区域 (P) 的不同分法也是如此。

证明可与以前[284]同样地来进行; 只是在以前谈的是分点, 这里必须谈分割线。

不过有一点我们愿意读者注意一下。在线性情况时每一新分点很清楚地将一个旧区间分为两个, 又两个区间的公共部分依然是一区间。在平面情况时情形就复杂了, 因为两曲线可彼此相交于很多点(甚至相交于一无穷点集)。故通连部分区域可能被新的曲线拆成不通连的部分, 同样两通连区域的公共部分也可以是不通连区域。这就是为什么我们一开始就不撇开讨论将基本区域分为不通连部分的原因!

其次, 将达布下积分及上积分的概念确立起来:

$$I_* = \sup\{s\}, \quad I^* = \inf\{S\},$$

且有

$$s \leq I_* \leq I^* \leq S.$$

最后, 将对线性情况的证明[285]逐字逐句搬过来这里就得:

定理 二重积分存在的必要充分条件为

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0,$$

或用另一记法

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i P_i = 0, \quad (6)$$

其中 ω_i 为函数 $f(x, y)$ 在部分区域 (P_i) 上的振动 $M_i - m_i$ 。

565 可积函数类 借上面所确立的可积判定法容易证明:

博士家园 流星

I 任一連續于区域(P)上的函数 $f(x, y)$ 是可积的。

事实上, 如函数 f 連續于(閉)区域(P)上, 則由一致連續性, 对每一 $\varepsilon > 0$ 一定有一 $\delta > 0$ 相对应, 使在区域(P)的任一直徑小于 δ 的部分上函数的振动小于 ε 。現設区域(P)分成許多部分(P_i), 它們的直徑都小于 δ 。則所有的振动 $\omega_i < \varepsilon$, 而

$$\sum_i \omega_i P_i < \varepsilon \sum_i P_i = \varepsilon P,$$

于是得知条件(6)适合。这样, 函数的可积性就证明了。

附注 現在就很容易使柱形长条体积的公式(2*)的推演变得非常严密。这完全可与推演曲边梯形面积公式时 [329] 一样来做——引用在里面的与外面的立体, 其体积可表作达布和者。

为了將可积函数类作若干推广, 我們需要下一預备定理。

預备定理 設在区域(P)上已給一面积为 0 的某一曲綫(L)。則对每一 $\varepsilon > 0$, 有一 $\delta > 0$ 相对应, 使得只要区域(P)被分为直徑小于 δ 的許多部分时, 那些与(L)有公共点的部分其面积和就小于 ε 。

由曲綫(L)的假定, 可將曲綫(L)夹在一面积小于 ε 的多角形域(Q)內。我們可以做得使曲綫(L)与所讲的区域边界(K)沒有公共点。則两曲綫上动点間的距离有一最小值 $\delta > 0$ 。*

現在將区域(P)任意地分成許多部分使它們的直徑 $< \delta$ 。其中与曲綫(L)相遇的那些部分必完全在区域(Q)內, 因此它們的总面积小于 ε 。

II. 如有界函数 $f(x, y)$ 至多在有限个面积为 0 的曲綫上有不連續, 則它是可积的。

已給任意一数 $\varepsilon > 0$ 。由假定可將函数 $f(x, y)$ 的所有“不連續綫”包括在总面积 $< \varepsilon$ 的多角形域(Q)內。在图 37 中这一区域用斜綫打了出来。它的边界是有限个折綫(L), 显然其本身面积为 0。

在从(P)中减去区域(Q)內部后所得的閉区域中, 函数 $f(x, y)$ 到

* 參看第二卷第一分册第 186 頁底注。

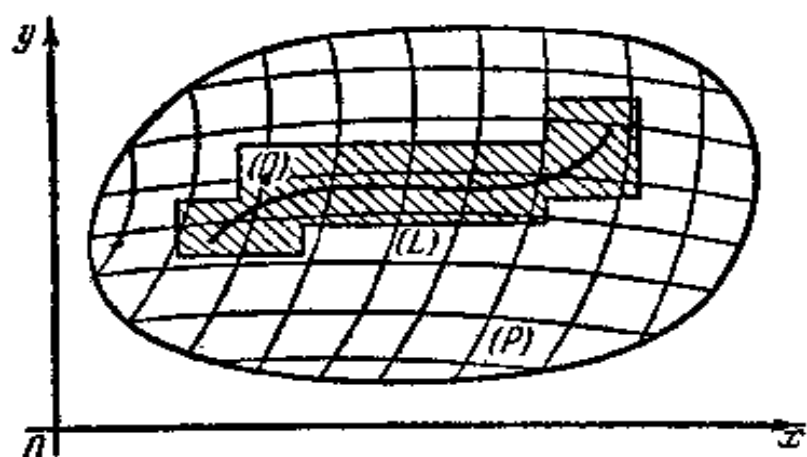


图 37

处連續，亦就意味着一致連續。因此，对給出的 $\varepsilon > 0$ 可求得一数 $\delta_1 > 0$ ，使在这一区域的每一直径小于 δ_1 的部分上，函数 $f(x, y)$ 的振動 $< \varepsilon$ 。

現由預备定理，亦可求得一数 $\delta_2 > 0$ 使每当区域

域 (P) 用任意的曲綫分为直径小于 δ_2 的部分时，那些与折綫的总体 (L) ——被减去的多角形域 (Q) 的边界——相遇的部分面积和必然 $< \varepsilon$ 。

設 δ 是两数 δ_1, δ_2 中的較小的一个。将区域 (P) 分为直径小于 δ 的部分 $(P_1), (P_2), \dots, (P_n)$ ，并考察对应的和

$$\sum_i \omega_i P_i.$$

将它分为两个和：

$$\sum_{i'} \omega_{i'} P_{i'} + \sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''},$$

假定記号 i' 对应于整个在被减去的区域 (Q) 的外面的区域 $(P_{i'})$ ，而記号 i'' 对应于所有其它的。我們分別来估計每一和。

因为所有的 $(P_{i'})$ 都在从 (P) 中减去 (Q) 后所得的区域内，且它們的直径 $< \delta \leq \delta_1$ ，故所有 $\omega_{i'} < \varepsilon$ ，所以

$$\sum_{i'} \omega_{i'} P_{i'} < \varepsilon \sum_{i'} P_{i'} < \varepsilon P.$$

另一方面，如以 Ω 表函数 $f(x, y)$ 在整个区域 (P) 上的振動，則我們有(因为 $\omega_i \leq \Omega$)

$$\sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''} \leq \Omega \sum_{i''} P_{i''}.$$

这里 $\sum P_{i''}$ 是两类 (P_i) 的面积和：1)一类整个在被除掉的区域 (Q) 內，

2) 另一类与这一区域的边界(L)相遇。第一类区域的总面积小于 s , 因为 $Q < s$; 既然区域被分为直径小于 $\delta \leq \delta_2$ 的部分, 故对第二类区域的总面积也可如此说。因此 $\sum P_{i''} < 2s$, 所以

$$\sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''} < 2\Omega s.$$

最后, 当 $\lambda < \delta$ 时就有:

$$\sum_i \omega_i P_i < (P + 2\Omega)s.$$

因为这一不等式右端与 s 同时可任意小, 故条件(6)适合, 等等。

566 下积分及上积分作为极限 在二维情形下, 同样有

达布定理 对任何在(P)中的有界函数 $f(x, y)$ 极限等式

$$I_* = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s, \quad I^* = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S$$

成立[比照 289]。

我们预备来证明这里的结果(例如, 对上和), 因为在推理上它与线性情形有一点实质上的差异。

与那时一样, 对已给的 $\epsilon > 0$, 开始时将区域(P)用一曲綫网分成许多部分使对于对应的和 S 有

$$S' < I^* + \frac{\epsilon}{2}.$$

刚才所提到的曲綫网——这些曲綫总起来表作(L)——面积为 0。因此, 由前一目的预备定理, 可求得一个 $\delta > 0$, 使当区域(P)无论怎样分为直径 $< \delta$ 的部分(P_i)时, 那些至少与曲綫(L)之一相遇的部分其面积和将 $< \frac{\epsilon}{2\Omega}$, 其中 Ω 是函数 f 在区域(P)上的全振动。

以 S 表对应于任意的这种分法的和。如果我们将整个曲綫网(L)全部加到所出现的分割曲綫上来, 就得出——和 S'' ; 将 S 与 S'' 来比较一下。由达布和的第一个性质[564], $S'' \leq S'$, 故更不用说

$$S'' < I^* + \frac{\epsilon}{2}.$$

和 S 及 S'' 的差别只在那些对应于被曲綫(L)所切开的部分(P_i)的项。因为这些部分的面积和 $< \frac{\epsilon}{2\Omega}$, 故容易看到,

$$S - S'' < \Omega \cdot \frac{\epsilon}{2\Omega} = \frac{\epsilon}{2}.$$

最后,

$$I^* \leq S < I^* + \epsilon,$$

这就完成了证明。

现在积分存在的判别就化为等式

$$I_* = I^*.$$

用这, 与线性情形一样, 要函数可积, 对任何的 $\epsilon > 0$, 即使对于 一对达布和不等式

$$S - s < \epsilon$$

满足就够了。

567 可积函数与二重积分的性质

1° 如用任意的方式改变在 (P) 中可积函数 $f(x, y)$ 沿任何面积为 0 的曲线上的值(只要受一限制, 就是改变后的函数依然有界), 则又得一同样在 (P) 中可积的函数, 且它的积分等于 $f(x, y)$ 的积分。

为了证明起见, 必须对改变后的与原来的函数作积分和, 它们只可能在与曲线 (L) 相遇的区域 (P_i) 上面那些项不同。但由第 565 目预备定理, 这些区域的总面积当 $\lambda \rightarrow 0$ 时趋近于零, 于是就容易作结论: 两积分和趋于同一极限。

因此, 二重积分的存在及大小与积分号下的函数沿有限个面积为 0 的曲线上所取的值无关。

2° 若将函数 $f(x, y)$ 所在的区域 (P) 用曲线 (L) (面积为 0) 分成二区域 (P') 及 (P'') , 则由函数 $f(x, y)$ 在整个区域 (P) 上的可积性就能推得它在部分区域 (P') 及 (P'') 上的可积性, 反过来, 由函数在两区域 (P') 及 (P'') 上的可积性推得在区域 (P) 上的可积性。同时

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP = \iint_{(P')} f(x, y) dP + \iint_{(P'')} f(x, y) dP.$$

将区域 (P') 及 (P'') 任意地分成许多部分, 这样 (P) 亦分成了许多部分:

$$(P_1), (P_2), \dots, (P_n).$$

如以记号 i' 表包含在 (P') 内的部分, i'' 表包含在 (P'') 内的部分, 则

$$\sum \omega_i P_i = \sum \omega_{i'} P_{i'} + \sum \omega_{i''} P_{i''}.$$

設函数 $f(x, y)$ 在 (P) 上可积, 故当 $\lambda \rightarrow 0$ 时左端的和趋近于零; 因而右端的每一和更趋近于零, 故函数同样在 (P') 及 (P'') 上可积。

反过来, 如有后面这一情况, 故当 $\lambda \rightarrow 0$ 时右端的两个和趋近于零, 則左端的和同样亦趋近于零。不过, 必須注意, 这个和不是对区域 (P) 的任意分法得来的, 我們原来是从区域 (P') 及 (P'') 分开来分割而出发的。

要想将区域 (P) 的任意分法变成这种特殊形状的分法, 只要在分割綫中加上曲綫 (L) 。与它們相对应的和仅仅在和那些与曲綫 (L) 相遇的元素区域相对应的項上不同。但由第 565 目中預备定理, 它們的总面积当 $\lambda \rightarrow 0$ 时趋近于零, 而两和相差一无穷小。因此, 条件(6)完全适合, 函数 $f(x, y)$ 就在 (P) 上可积。

最后, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时从等式

$$\sum f(\xi_i, \eta_i) P_i = \sum f(\xi_{i'}, \eta_{i'}) P_{i'} + \sum f(\xi_{i''}, \eta_{i''}) P_{i''}$$

經极限过程就得到所要证的公式。

同样, 从极限过程考察积分和也可得下面三性质:

3° 如将在 (P) 上的可积函数 $f(x, y)$ 乘上一常数 k , 則所得函数亦同样可积, 且

$$\iint_{(P)} kf(x, y) dP = k \iint_{(P)} f(x, y) dP.$$

4° 如在区域 (P) 中函数 $f(x, y)$ 及 $g(x, y)$ 可积, 則函数 $f(x, y) \pm g(x, y)$ 亦可积, 且

$$\iint_{(P)} [f(x, y) \pm g(x, y)] dP = \iint_{(P)} f(x, y) dP \pm \iint_{(P)} g(x, y) dP.$$

5° 如对在 (P) 中可积的函数 $f(x, y)$ 及 $g(x, y)$ 不等式 $f(x, y) \leq g(x, y)$ 成立, 則

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP \leq \iint_{(P)} g(x, y) dP.$$

再則,

6° 当函数 $f(x, y)$ 可积时函数 $|f(x, y)|$ 亦可积, 且有不等式

$$\left| \iint_{(P)} f(x, y) dP \right| \leq \iint_{(P)} |f(x, y)| dP.$$

函数 $|f|$ 的可积从一简单的說明就推得出来: 这一函数在任何区域 P_i 上的振动 $\bar{\omega}_i$ 不会超过函数 f 的对应振动 $\bar{\omega}_i$ 。事实上, 这样就有

$$\Sigma \bar{\omega}_i P_i \leq \Sigma \omega_i P,$$

而第二个和趋近于零就隐含着第一个和趋近于零。

从不等式

$$|\Sigma f(\xi_i, \eta_i) P_i| \leq \Sigma |f(\xi_i, \eta_i)| P_i$$

用极限过程就能得到所求证的不等式。

7° 如在 (P) 上的可积函数 $f(x, y)$ 满足不等式

$$m \leq f(x, y) \leq M,$$

則

$$mP \leq \iint_{(P)} f(x, y) dP \leq MP. \quad (7)$$

这可以从显明的不等式

$$mP \leq \Sigma f(\xi_i, \eta_i) P_i \leq MP$$

經极限过程得来。

如用 P 来除不等式(7)的各端:

$$m \leq \frac{\iint_{(P)} f(x, y) dP}{P} \leq M,$$

并以 μ 表示中间的比值, 則得不等式(7)的另一写法

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP = \mu P \quad (m \leq \mu \leq M), \quad (8)$$

这表明了所谓中值定理。

特别, 现在假定函数 $f(x, y)$ 在 (P) 上连续, 并取在区域 (P) 上的最小及最大值——由外埃斯脱拉斯定理, 163, 它们存在: ——作为 m 及 M 。则由大家熟知的科西定理, 161, 连续函数 $f(x, y)$ 如取值 m 及 M 亦必通过每一中间值。因此, 在任何情况下, 在区域 (P) 上可找得一点 $(\bar{x}, \bar{y})$ 使 $\mu = f(\bar{x}, \bar{y})$, 而公式(8)有下形:

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP = f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot P. \quad (9)$$

这是特别常用的中值定理的形式。

同样, 推广的中值定理也很容易[292, 10°]搬到这里所讨论的情况上来, 我们将这留给读者。

568 积分当作区域的可加函数, 对区域的微分法 考察一(闭的)平面区域 (P) 及含在它里面的部分(闭)区域 (p) 。我们将假定所有区域都是可求面积的(有时候它们还要受其它限制)。如果对区域 (P) 的每一部分 (p) , 有某一定数

$$\Phi = \Phi((p))$$

与它相对应, 这样就对所述的那些 (p) 定义了“区域 (p) 的一个函数”。这种区域函数的例子有: 区域的面积, 连续分布在它上面的质量, 这质量的静距, 连续分布的荷载或一般地作用在它上面的力, 等等。

若当将区域 (p) 任意地分为互不相叠的部分

$$(p) = (p') + (p'')$$

时恒有

$$\Phi((p)) = \Phi((p')) + \Phi((p'')),$$

则区域函数 $\Phi((p))$ 称作可加的。上面所举的一切函数都具有这种可加性质。可加的区域函数有其特殊重要性, 因为在研究自然现象时常

常会遇見它們。

設在一可求面积区域(P)上已給一可积函数 $f(M) = f(x, y)$; 因此它在区域(P)的任一可求面积部分(p)上亦为可积的, 故积分

$$\Phi((p)) = \iint_{(p)} f(x, y) dP \quad (10)$$

亦为区域(p)的函数。由 567, 2°, 显然它是一可加函数。

現在我們来討論“函数 $\Phi((p))$ 对区域的微分法”。設 M 是区域(P)的一定点, (p)是任一包含这一点的部分区域。如比

$$\frac{\Phi((p))}{p}$$

(p 是区域(p) 的面积)当区域(p)的直徑无限减小时趋近于一确定有限极限 $f = f(M)$, 則这一极限称作在点 M 处 $\Phi((p))$ 对区域的导数。例如, 若 $\Phi((p))$ 是連續分布在平面图形(p)上的质量, 則 $f(M)$ 不是别的, 就是在点 M 处分布质量的密度; 如 $\Phi((p))$ 表示作用在图形(p)上面的力, 則 $f(M)$ 表在点 M 处的压强, 等等。

我們特別感觉兴趣的情况是区域函数可表作形如 (10) 的积分时, 其中 $f(x, y)$ 是区域(P)上的連續函数。我們来证明: 积分在点 M 处对区域的导数就是积分号下的函数在这一点处的值, 即

$$f(M) = f(x, y).$$

事实上, 取在导数定义中所談到的一个区域(p)后, 由中值定理 [参看 (9)] 有

$$\Phi((p)) = f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot p,$$

其中 $(\bar{x}, \bar{y})$ 为区域 (p) 的某一点。如区域 (p) 的直徑趋近于零, 則点 $(\bar{x}, \bar{y})$ 就无限接近于 (x, y) , 由連續性,

$$\frac{\Phi((p))}{p} = f(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow f(x, y),$$

这就是所要证明的。

因此,在变动区域上的二重积分(10)在特殊意义下是积分号下点函数的“原函数”;它成为一区域函数,对于它来说这一点函数就是对区域的导函数。自然就发生这样一问题:由导函数究竟能够一意地决定“原函数”到怎样的程度呢?

在这一方面可以证明这样一命题:两可加的区域函数 $\Phi_1((p))$ 及 $\Phi_2((p))$ 若在原来的区域 (P) 的所有点处对区域的导数相同,则必恒等。

如变为考虑差 $\Phi((p)) = \Phi_1((p)) - \Phi_2((p))$, 事情就成为求证:可加的区域函数 $\Phi((p))$ 在区域 (P) 的所有点处其导数等于零时它本身也恒等于零。

由导数定义本身,不论 $\varepsilon > 0$ 是怎样的一数,可用一邻域围绕区域 (P) 的每一点 M , 使对任一包含 M 的而含在邻域里面的任一部分 (p) , 有

$$\left| \frac{\Phi((p))}{p} \right| < \varepsilon.$$

将波雷尔预备定理[165]应用到这些邻域上,就能够将区域 (P) 分为有限个互不相重叠的区域:

$$(P) = (p_1) + (p_2) + \cdots + (p_k),$$

使对它们的每一个皆有 $(i = 1, 2, \cdots, k)$

$$\left| \frac{\Phi((p_i))}{p_i} \right| < \varepsilon \text{ 或 } |\Phi((p_i))| < p_i \varepsilon.$$

由函数 $\Phi((p))$ 假定的可加性,我们有

$$\Phi((P)) = \sum_i \Phi((p_i)).$$

由此联系到前一不等式,得

$$|\Phi((P))| \leq \sum_i |\Phi((p_i))| < P\varepsilon.$$

但此处 ε 是任意的,这就是说 $\Phi((P)) = 0$ 。因为可以取任何部分区域 (p) 以代替区域 (P) , 这也就证明了我们断言。

对照全部上面所述的, 我們得到一最后的断言: 在变动区域上的二重积分(10)是积分記号下点函数*的唯一可加“原函数”。

所以, 例如, 不必計算就可明白, 已知在点 M 处分布的质量其密度为 $\rho(M) = \rho(x, y)$ 时, 分布在图形 (P) 上的整个质量可表作积分

$$m = \iint_{(P)} \rho(x, y) dP;$$

如 $q(M) = q(x, y)$ 是在点 M 处的压强, 則整个作用在图形 (P) 上的力为

$$F = \iint_{(P)} q(x, y) dP,$$

等等。

附注 前面我們曾經談过区間的可加函数 [339; 559, 8)]。因为这种函数总是某点函数的两个值的差, 故对“綫性的”情形沒有必要像上面对“平面的”情形叙述的那样来发展理論。然而在定积分对变动上限微分法的定理中 [293, 12°], 讀者容易观察到与剛才所证明的二重积分对区域的微分法定理的相似处, 而第 339 目中的推理可解說为积分是作为已知点函数的“原函数”的唯一可加区間函数的证明。

§ 2 二重积分的計算

569 在矩形区域的情况下化二重积分为逐次积分 关于这一問題的几何的解說, 在一些特殊的假定下我們在第 562 目中已經作过了。

現在我們用分析的工具且在最普遍的形式下来考察它; 我們从最简单的情形开始, 即当积分区域是一矩形 $(P) = [a, b; c, d]$ 时。

定理 如对定义于矩形 $(P) = [a, b; c, d]$ 上的一函数 $f(x, y)$ 二重积分

* 与上面一样, 这 函数假定为連續的。

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP \quad (1)$$

存在, 且——对每一个 $[a, b]$ 上的常数值 x ——单积分

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad (a \leq x \leq b) \quad (2)$$

也存在, 则逐次积分

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \quad (3)$$

同样存在, 且等式

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \quad (4)$$

成立。*

证 在确定矩形 (P) 的区间 $[a, b]$ 及 $[c, d]$ 内插入分点

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b,$$

$$y_0 = c < y_1 < \cdots < y_k < y_{k+1} < \cdots < y_m = d.$$

将它们分为许多部分。因而矩形 (P) 就分成许多部分矩形 (图 38)

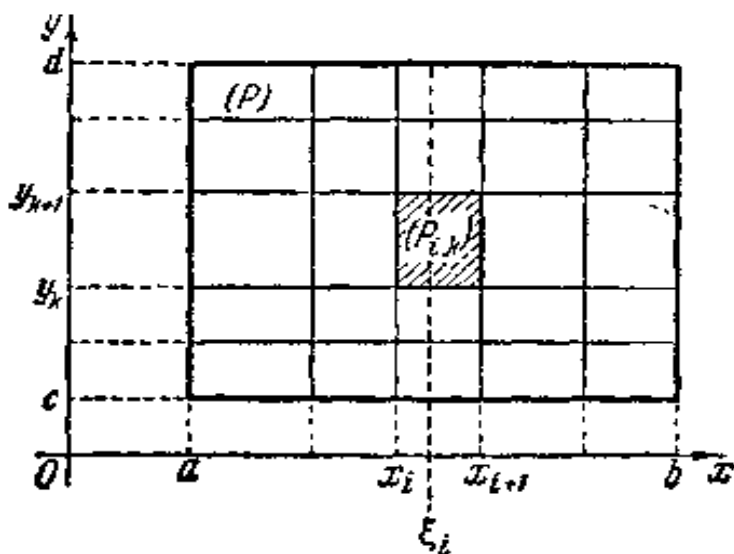


图 38

* 读者容易观察到这一断言是关于二重极限及逐次极限的熟知定理 [158] 的一种变形。

$$(P_{i,k}) = [x_i, x_{i+1}; y_k, y_{k+1}] \\ (i = 0, 1, \dots, n-1; k = 0, 1, \dots, m-1).$$

以 $m_{i,k}$ 及 $M_{i,k}$ 分别表示函数 $f(x, y)$ 在矩形 $(P_{i,k})$ 上的下确界及上确界, 故对这一矩形的所有点 (x, y) ,

$$m_{i,k} \leq f(x, y) \leq M_{i,k}.$$

将 x 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上任意固定: $x = \xi_i$, 对 y 自 y_k 积分到 y_{k+1} , 我們将有 [232, 8°]

$$m_{i,k} \Delta y_k \leq \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y) dy \leq M_{i,k} \Delta y_k,$$

其中 $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$: 对 y 的积分是存在的, 因为假定了在整个的区间 $[c, d]$ 上的积分 (2) 存在。将对 k 的自 0 到 $m-1$ 的类似不等式相加, 得

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k} \Delta y_k \leq I(\xi_i) = \int_0^d f(\xi_i, y) dy \leq \sum_{k=0}^{m-1} M_{i,k} \Delta y_k.$$

如在这不等式各端遍乘以 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ 并对附标 i 自 0 到 $n-1$ 相加, 則得

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k} \Delta y_k \leq \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} M_{i,k} \Delta y_k.$$

在中間我們得到了函数 $I(x)$ 的积分和。至于两头的項, 它們不是別的, 正是对于二重积分 (1) 的达布和 s 及 S 。事实上, 因为 $\Delta x_i \Delta y_k$ 是矩形 $(P_{i,k})$ 的面积 $P_{i,k}$, 故我們有, 例如,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k} \Delta y_k = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k} \Delta x_i \Delta y_k = \sum_{i,k} m_{i,k} P_{i,k} = s.$$

因此, 最后

$$s \leq \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i \leq S.$$

如現在所有的 Δx_i 及 Δy_k 同时趋近于零, 則由于二重积分 (1) 的存在,
 博士家园 流星

和 s 及 S 都趋近于它为极限。在这种情形下, 也有

$$\lim \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i = \iint_{(P)} f(x, y) dP,$$

亦即二重积分(1)同时也是函数 $I(x)$ 的积分:

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP = \int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy,$$

这就是所要求证的。

将 x 及 y 的地位交换, 与(4)同时, 亦可证明公式

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx, \quad (4^*)$$

这时假定了当 $y = \text{const.}$ 时积分

$$\int_a^b f(x, y) dx$$

存在。

附注 如与二重积分(1)一起, 两单积分都存在:

$$\int_c^d f(x, y) dy (x = \text{const.}) \text{ 及 } \int_a^b f(x, y) dx (y = \text{const.}),$$

则两公式(4), (4*)同时成立, 于是

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (5)$$

这一结果我們以前[490]已經得出过, 那时沒有利用二重积分存在的假定。

应用公式(4)或(4*)要受二重积分及单积分之一存在的限制。如函数 $f(x, y)$ 連續(在实际中通常所遇到的情形), 則所有上述积分都保

证存在;例如对二重积分来说,能由 565, I 得出。在这种情况下,在实际计算二重积分时任一上述公式都可利用,因为计算单积分是一特别简单的问题。

在证明公式(4)时最自然的是用平行于坐标轴的直线分矩形(P)为有面积 $\Delta x_i \Delta y_k$ 的矩形元素。要想就二重积分记号本身能说明是用平行于坐标轴的直线将区域细分而进行积分的,常常就不用 $\iint_{(P)} f(x, y) dP$ 而写

$$\iint_{(P)} f(x, y) dx dy \text{ [或 } \iint_{(P)} f(x, y) dy dx \text{].}$$

此外,注意到将取在矩形 $(P) = [a, b; c, d]$ 上的二重积分化为逐次积分时,二重积分本身也常常用一类似于逐次积分的记号来表示:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \text{ 或 } \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

在这种表示法里,“外面的积分”与“外面的微分”彼此对应,故为了要得到任一逐次积分,只要添置括弧就行了:

$$\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx \text{ 或 } \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy.$$

570 例 1) 计算展布在矩形 $(P) = [3, 4; 1, 2]$ 上的积分

$$\iint_{(P)} \frac{dx dy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \int_3^4 \frac{dx dy}{(x+y)^2}.$$

解 由公式(4*)可以写

$$\iint_{(P)} \frac{dx dy}{(x+y)^2} = \int_1^2 dy \int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2}.$$

先求出里面的积分:

$$\int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2} = \frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4},$$

于是,

$$\iint_{(P)} \frac{dx dy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \left[\frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4} \right] dy = \log \frac{25}{24}.$$

2) 计算积分

$$(a) \quad I_1 = \int_1^3 \int_2^5 (5x^2y - 2y^3) dx dy, \quad (b) \quad I_2 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 dx dy}{1+y^2},$$

$$(B) \quad I_3 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{y dx dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}.$$

解

$$(a) \quad I_1 = \int_1^3 dy \int_2^5 (5x^2y - 2y^3) dx = \int_1^3 (135y - 6y^3) dy = 660.$$

$$(b) \quad I_2 = \int_0^1 x^2 dx \cdot \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{12}.$$

(B) 用公式(4)将 I_3 表作下形更为简单:

$$I_3 = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}},$$

因为立刻就能得到

$$\int_0^1 \frac{y dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}},$$

所以

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \right) dx = \\ &= \log \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+2}} \bigg|_0^1 = \log \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

如采用另一逐次积分, 则求积时就比较麻烦些:

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_0^1 y \, dy \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \\
 &= \frac{1}{1+y^2} \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}}, \\
 I_3 &= \int_0^1 \frac{y \, dy}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}} = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{2+y^2}-1}{\sqrt{2+y^2}+1} \Big|_0^1 = \\
 &= \frac{1}{2} \log \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)}.
 \end{aligned}$$

很容易将这一答案变到前面的形状。

3) 求一立体的体积 V , 这立体下面被 xy 平面所限制, 侧面被平面 $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ 所限制, 而上面被椭圆抛物面

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$

所限制。

解 首先由公式(2*)

$$V = \int_0^a \int_0^b \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \right) dP.$$

我们用公式(4*)来计算这一积分:

$$V = \int_0^b dy \int_0^a \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \right) dx = \int_0^b \left(\frac{a^3}{6p} + \frac{ay^2}{2q} \right) dy = \frac{a^3}{6} \left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q} \right).$$

4) 同样对由 xy 平面、曲面 $x^2 + z^2 = R^2 (z > 0)$ 及平面 $y=0$ 与 $y=H$ 所围的立体求体积。

解 如取 xy 平面上的矩形 $[-R, R; 0, H]$ 为立体的底, 则

$$V = \int_0^H \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \, dx \, dy = 2H \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \, dx = \frac{\pi R^2 H}{2}.$$

[当然, 更简单的是将这立体当作以 xz 平面上的半圆为底的柱形。]

5) 同样对由平面 $z=0$, $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$ ($b > a > 0, d > c > 0$) 与双曲抛物面 $z = \frac{cy}{m} (m > 0)$ 所围的立体求体积。答 $V = \frac{(d^2 - c^2)(b^2 - a^2)}{4m}$ 。

6) 求证

$$\int_0^1 \int_0^1 (xy)^{xy} dx dy = \int_0^1 y^y dy.$$

二重积分中积分号下的函数, 如当 $xy=0$ 时给它以值 1, 则它在整个正方形 $[0, 1; 0, 1]$ 上连续。

我们有

$$\int_0^1 \int_0^1 (xy)^{xy} dx dy = \int_0^1 dy \int_0^1 (xy)^{xy} dx.$$

在里面的积分中作替换 $xy=t$ (当 $y=\text{const.} > 0$), 再行分部积分, 因而对二重积分得出表示式

$$\int_0^1 \frac{dy}{y} \int_0^y t^t dt = \log y \cdot \int_0^y t^t dt \Big|_0^1 - \int_0^1 y^y \log y dy.$$

前一双重代入式为零, 因为 $\int_0^y t^t dt$ 当 $y \rightarrow 0$ 时是一阶无穷小.* 至于后面一积分, 则由恒

等式

$$(y^y)' = y^y \log y + y^y,$$

它就化为积分 $\int_0^1 y^y dy$.

7) 求证(对任何的 $z=\text{const.}$)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z \sin \varphi \sin \theta) d\varphi d\theta = \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \sin \lambda) d\lambda \right\}^2.$$

为达此目的, 将每一积分展开为 z 的幂级数。对于单积分这已经在 412, 10) 中做过:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \sin \lambda) d\lambda = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \right\}.$$

二重积分中积分号下函数展开成级数

$$\cos(2z \sin \varphi \sin \theta) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{(2z)^{2i}}{2^{2i} i!} \sin^{2i} \varphi \sin^{2i} \theta,$$

* 本来, $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \int_0^y t^t dt = \lim_{t \rightarrow 0} t^t = 1$.

它对正方形 $\left[0, \frac{\pi}{2}; 0, \frac{\pi}{2}\right]$ 中一切值 φ 及 θ 一致收敛。在这一正方形内将它逐项积分, 得*

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z \sin \varphi \sin \theta) d\varphi d\theta &= \\ &= \frac{\pi^2}{4} + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{(2z)^{2i}}{2^{2i} i!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i} \varphi \sin^{2i} \theta d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

但[参看 300(8)]

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i} \varphi \sin^{2i} \theta d\varphi d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i} \varphi \sin^{2i} \theta d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i} \theta d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i} \varphi d\varphi = \left[\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \right]^2, \end{aligned}$$

故经简单变换后,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z \sin \varphi \sin \theta) d\varphi d\theta = \frac{\pi^2}{4} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i z^{2i} \cdot (2i)!!}{2^{2i} [i!]^2} \right\}.$$

现在容易验证[参看 378, 3)], 的确,

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i z^{2i} \cdot (2i)!!}{2^{2i} [i!]^2} = \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \right\}^2.$$

因此, 所提出的二重积分的值可用附标为零的贝塞尔函数来表示:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z \sin \varphi \sin \theta) d\varphi d\theta = \frac{\pi^2}{4} [J_0(z)]^2.$$

8) 求证对任何 $k(0 < k < 1)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi d\theta}{1 - k^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda}} = \frac{\pi}{2} E'(k).$$

* 不再加以说明。读者可将一致收敛级数的概念以及将它逐项积分的定理推广到级数项含有两个变数的情形。

提示 将两积分按 k 的幂展开, 右端积分的这一展开式我們已經遇见过[412, 11)]。

9) 求证: 如函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 而函数 $g(y)$ 在区间 $[c, d]$ 上可积分, 則两变数的函数 $f(x)g(y)$ 在矩形 $(P) = [a, b; c, d]$ 上可积。

提示 問題可变成函数 $f(x)$ 及 $g(y)$ 当作两变数的函数时* 分别在 (P) 上的可积分性。为此, 利用在第 566 目末所述的可积簡易判定法非常方便。

注意, 此处

$$\begin{aligned} \iint_{(P)} f(x) g(y) dx dy &= \int_c^d dy \left\{ \int_a^b f(x) g(y) dx \right\} = \\ &= \int_c^d g(y) \left\{ \int_a^b f(x) dx \right\} dy = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_c^d g(y) dy, \end{aligned}$$

故二重积分这里就成为两个单积分的乘积。

反过来, 有时候将两个单积分的乘积表成二重积分的形状也是有用处的。下面我們举出应用这一思想的若干例题。

10) 求证不等式:

$$\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2,$$

其中 $f(x)$ 是一正連續函数。

不失一般性, 可以假定 $a < b$ 。因为积分与积分变数記法无关, 可将任一积分中用文字 y 代替文字 x , 則不等式左端就可改写成:

$$I = \iint_{(P)} \frac{f(x)}{f(y)} dx dy = \iint_{(P)} \frac{f(y)}{f(x)} dx dy,$$

其中 $(P) = [a, b; a, b]$ 。于是

$$I = \frac{1}{2} \iint_{(P)} \left[\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \right] dx dy = \iint_{(P)} \frac{f^2(x) + f^2(y)}{2f(x)f(y)} dx dy.$$

由明显的不等式 $2AB \leq A^2 + B^2$, 积分号下的函数 ≥ 1 , 故[参看 567, 7°]

$$I \geq (b-a)^2,$$

这就是所要求证的。

* 如推广第 287 目, II 的定理到两变数的函数上去。

11) 布涅科夫斯基不等式 我們以前已經遇到过这一不等式[447, 6)]。作为一习题我們將給出当函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上在正常的意义下可积时它的一新的推演。

考察积分

$$B = \iint_{(P)} [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2 dx dy,$$

其中 (P) 是正方形 $[a, b, a, b]$ 。解开括号, 我們有[参看 9)]

$$\begin{aligned} B = & \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(y) dy - 2 \int_a^b f(x)g(x) dx \cdot \int_a^b f(y)g(y) dy + \\ & + \int_a^b f^2(y) dy \cdot \int_a^b g^2(x) dx, \end{aligned}$$

或, 最后, 再利用积分与自变数記法的无关性:

$$B = 2 \left\{ \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx - \left[\int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 \right\}.$$

因为在积分 B 中积分号下的式子是非負的, 故亦 $B \geq 0$, 由此就得出所要求的不等式

$$\left[\int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$$

附注 从这里, 特别, 前一习题的不等式亦可推出(将 f 换作 $\sqrt{f}$, g 换作 $\frac{1}{\sqrt{f}}$)。

12) 契比雪夫不等式 用同样的推理可证明不等式

$$\int_a^b p(x)f(x) dx \cdot \int_a^b p(x)g(x) dx \leq \int_a^b p(x) dx \cdot \int_a^b p(x)f(x)g(x) dx,$$

这是属于澄·勒·契比雪夫的。这里 $p(x)$ 是正的可积函数, 而 $f(x)$ 及 $g(x)$ 是單調增加函数。

設 $a < b$ 。考察差

$$\Delta = \int_a^b p(x)f(x)g(x) dx \cdot \int_a^b p(x) dx - \int_a^b p(x)f(x) dx \cdot \int_a^b p(x)g(x) dx.$$

在两个項的第二因子中将文字 x 换作 y , 表这一差为

$$\Delta = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)f(x)[g(x) - g(y)] dx dy.$$

現在交換 x 及 y 的地位:

$$\Delta = \int_a^b \int_a^b p(x) p(y) f(y) [g(y) - g(x)] dx dy.$$

最后, 如取两式的和之半, 得

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b p(x) p(y) [f(x) - f(y)] [g(x) - g(y)] dx dy.$$

因为函数 f 及 g 都单调增加, 故两方括号有同号, 即积分号下的式子永远非负, 因而亦 $\Delta \geq 0$, 这就证明了所需不等式。

容易看到, 在函数 f 及 g 都减少时它也保持有效。当一个减少另一个增加时, 不等式就掉头。

13) 設函数 $f(x, y)$ 在矩形 $(P) = [a, b; c, d]$ 上連續。以 (x, y) 表这一矩形上的任意点, 考察由二重积分所表的函数:

$$F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(u, v) dv du.$$

如将它表作逐次积分的样子:

$$F(x, y) = \int_a^x du \int_c^y f(u, v) dv.$$

则先对 x 然后对 y 微分, 依次得*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_c^y f(x, v) dv, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y).$$

我們得到与单积分对变动上限微分定理的一类似定理。同样亦可建立

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = f(x, y).$$

14) 設 $f(x, y)$ 在矩形 $(P) = [a, b; c, d]$ 上可积分。如对这一函数(这一次我們不假定非要連續不可)存在一“原”函数 $\Phi(x, y)$, 就是說

* 應該注意到对外面的积分來說积分号下的函数 $\int_c^y f(u, v) dv$ 是 u 的連續函数[468]。

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y),$$

則
$$\iint_{(P)} f(x, y) dx dy = \Phi(b, d) - \Phi(b, c) - \Phi(a, d) + \Phi(a, c).$$

这与用原函数表通常定积分的公式相类似。

我們着手来证明。将矩形 $[a, b; c, d]$, 如在第 569 目中一样, 分为部分矩形

$$[x_i, x_{i+1}; y_k, y_{k+1}] \quad (i=0, 1, \dots, n-1; k=0, 1, \dots, m-1).$$

两次应用有限增量的公式到式子

$$\Phi(x_{i+1}, y_{k+1}) - \Phi(x_{i+1}, y_k) - \Phi(x_i, y_{k+1}) + \Phi(x_i, y_k)$$

上去,* 将它表作

$$\Phi''_{xy}(\xi_{ik}, \eta_{ik}) \Delta x_i \Delta y_k = f(\xi_{ik}, \eta_{ik}) \Delta x_i \Delta y_k$$

的样子, 其中 $x_i \leq \xi_{ik} \leq x_{i+1}$, $y_k \leq \eta_{ik} \leq y_{k+1}$ 。对 i 及 k 相加, 得

$$\sum_{i,k} f(\xi_{ik}, \eta_{ik}) \Delta x_i \Delta y_k = \Phi(b, d) - \Phi(b, c) - \Phi(a, d) + \Phi(a, c).$$

最后, 变到极限。

可以看見, 推理的结构与证明积分学中的基本公式用原函数表简单定积分[298]时完全一样。

最后我們举两个有启发性的例题, 表明第 569 目中定理的条件相互无关。

15) 如 c 是一有理数, 則将它表作正分母的既約分数后, 表分母为 q_x 。在正方形 $(P) = [0, 1; 0, 1]$ 上定义一函数 $f(x, y)$, 令:

$$f(x, y) = \frac{1}{q_x} + \frac{1}{q_y}, \quad \text{如 } x \text{ 及 } y \text{ 都是有理的,}$$

$$f(x, y) = 0, \quad \text{在其它情形。}$$

函数在正方形中有理坐标的一切点处不連續, 而在其余的点处連續。

因为, 不論 $\epsilon > 0$ 是怎样一个数, 只有在有限个点处可能 $f > \epsilon$, 故在第 564 目中所建立的可积条件适合,** 而二重积分

* 比較在第 180 目中当证明两微分法顛倒的定理时式子 IV' 的变换。

** 这一点不对, 事实上 f 可以在无穷多个点上 $> \epsilon$ 。但下面的二重积分还是存在的, 这是因为, f 的不連續点只有“可数多个”, 所以其面积为 0; 由 565 目 II, 便得所要結果——譯者。

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP$$

存在,但等于0。

对无理的值 y 函数 $f(x, y)$ 对所有的 x 为0, 所以

$$\int_0^1 f(x, y) dx = 0.$$

而如 y 为有理时, 则对无理的值 x , $f(x, y) = 0$, 对有理的 x 有: $f(x, y) = \frac{1}{q_x} + \frac{1}{q_y}$ 。这个 x 的函数在 x 的任何区间上有振动 $> \frac{1}{q_y}$, 因此, 它对 x 的积分不存在。这就是说, 不可能来谈逐次积分

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx.$$

同样可证明积分

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$$

也不存在。

10) 现在在正方形中所有点其坐标 x, y 为有理且 $q_x = q_y$ 时 $f(x, y) = 1$, 在其它的点处 $f(x, y) = 0$ 。

因为在正方形的任何部分内, 函数 f 的振动等于1, 故二重积分

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP$$

这一次不存在。

同时对固定的 y , 函数 $f(x, y)$ 或恒等于0 (如 y 为无理) 或仅对有限个值 x 可能异于0 (如 y 为有理)。在这两种情况下,

$$\int_0^1 f(x, y) dx = 0,$$

就是说, 逐次积分

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = 0$$

存在。同样, 积分

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = 0$$

也存在[比較 490]。

571 在曲边区域的情况下化二重积分为逐次积分 考察一区域

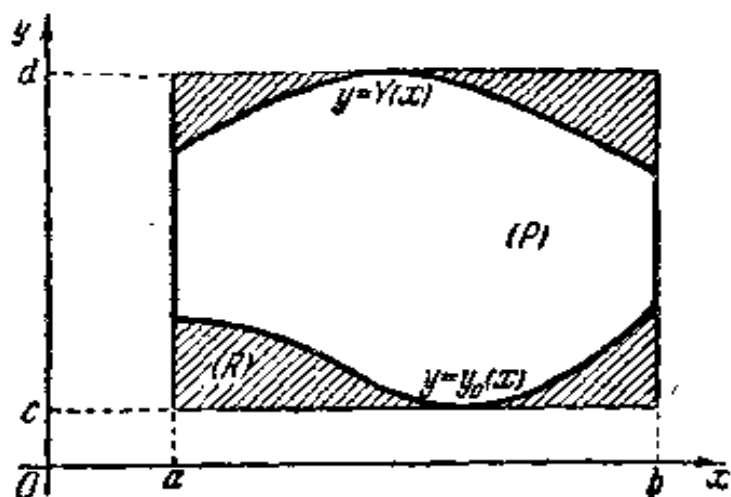


图 39

(P), 其上下由两連續曲綫

$$y = y_0(x), y = Y(x) \\ (a \leq x \leq b)$$

所限制, 兩側由兩縱坐标 $x=a$ 及 $x=b$ 所限制(图 39)。則类似于第 569 日中的定理, 下一定理也成立:

定理 如对定义于区域 (P) 上的函数 $f(x, y)$, 二重

积分

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP$$

存在, 又——对 $[a, b]$ 中每一固定值 x ——单积分

$$I(x) = \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y) dy$$

亦存在, 則逐次积分

$$\int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y) dy$$

亦同样存在, 且等式

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y) dy \quad (6)$$

成立。

证明建立在将这种情况化为在第 569 目中所讨论过的情况。令 $c = \min_{a \leq x \leq b} y_0(x)$, $d = \max_{a \leq x \leq b} Y(x)$ (参看图 39), 将区域 (P) 包在矩形

$$(R) = [a, b; c, d]$$

内, 并用下法在这一矩形上定义一函数 $f^*(x, y)$:

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{如点 } (x, y) \text{ 属于区域 } (P), \\ 0, & \text{在矩形 } (R) \text{ 的其它点处。} \end{cases}$$

我们来证明, 这一函数满足第 569 目定理的条件。

首先, 它在区域 (P) 上可积, 因为它在这里与假设的可积函数 $f(x, y)$ 相重合; 显然,

$$\iint_{(P)} f^*(x, y) dP = \iint_{(P)} f(x, y) dP.$$

另一方面, 在 (P) 的外面 $f^*(x, y) = 0$, 因此在矩形 (R) 的余下部分 $(Q) = (R) - (P)$ 它就可积*, 且

$$\iint_{(Q)} f^*(x, y) dQ = 0.$$

则由 567, 2°, 函数 f^* 在整个矩形 (R) 上可积且

$$\iint_{(R)} f^*(x, y) dR = \iint_{(P)} f(x, y) dP. \quad (7)$$

对 $[a, b]$ 上的固定值 x , 积分

$$\int_0^d f^*(x, y) dy = \int_0^{y_0(x)} f^* dy + \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f^* dy + \int_{Y(x)}^d f^* dy$$

存在, 因右端三积分都存在。事实上, 因为在 y 变化的区间 $[c, y_0(x))$ 及 $(Y(x), d]$ 内函数 $f^*(x, y) = 0$, 故第一个及第三个积分存在且等于零。第二个积分与函数 $f(x, y)$ 的积分相同:

* 它在这一区域边界上的值不发生作用, 参看 567, 1°。

$$\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f^*(x, y) dy = \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y) dy,$$

因为对于在 $[y_0(x), Y(x)]$ 上的 y , $f^*(x, y) = f(x, y)$ 。最后,

$$\int_a^b f^*(x, y) dx = \int_a^b \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y) dy dx. \quad (8)$$

由所提到的定理, 对函数 f^* 逐次积分亦存在, 且等于二重积分[参看 569(4)]:

$$\iint_{(R)} f^*(x, y) dR = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f^*(x, y) dy.$$

注意(7)及(8), 可以看见, 这一公式相当于公式(6)。

如区域 (P) 是另一类型的曲边梯形, 由曲线

$$x = x_0(y), x = X(y) \quad (c \leq y \leq d)$$

及直线 $y = c, y = d$ 所围者, 则代替(6)我们得一公式

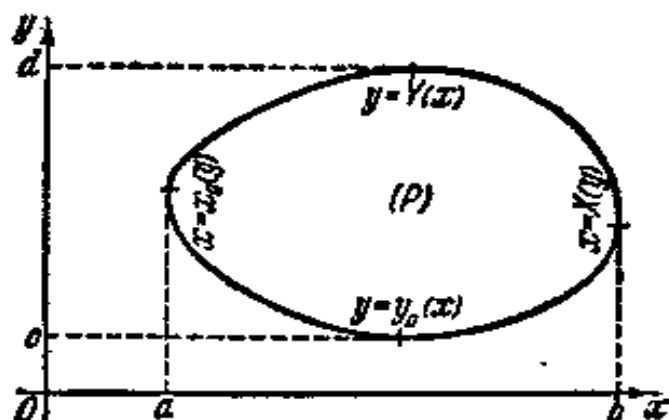


图 40

$$\begin{aligned} \iint_{(P)} f(x, y) dP &= \\ &= \int_c^d dy \int_{x_0(y)}^{X(y)} f(x, y) dx, \end{aligned} \quad (6^*)$$

这时假定了与二重积分同时, 当 $y = \text{const.}$ 时对 x 的单积分存在。

附注 如区域 (P) 的边界与纵轴的平行线也好, 与横轴的平行线也好, 都只交于两个点(例如, 如图 40 中所画出的情形), 则当所述条件适合时, 所提到的两个公式都可应用。将它们相比较, 得等式

$$\int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{x_0(y)}^{X(y)} f(x, y) dx, \quad (9)$$

它有特殊的重要性。这与第 569 目中公式(5)相类似。

如函数 $f(x, y)$ 在区域 (P) 中連續, 則二重积分及单积分都存在, 視区域 (P) 的类型, 可在計算二重积分时利用公式(6)或(6*)。

在边界較复杂时通常将区域 (P) 分成有限个上面討論过的类型的部分[例如, 图 41 中的图形 (P) 被直綫 $x=a$ 割成三部分: (P_1) , (P_2) , (P_3)]。然后由 567, 2°, 所求积分可表作分別展布在这些部分上的积分的和; 它們的每一个都可按照剛才所述的来計算。

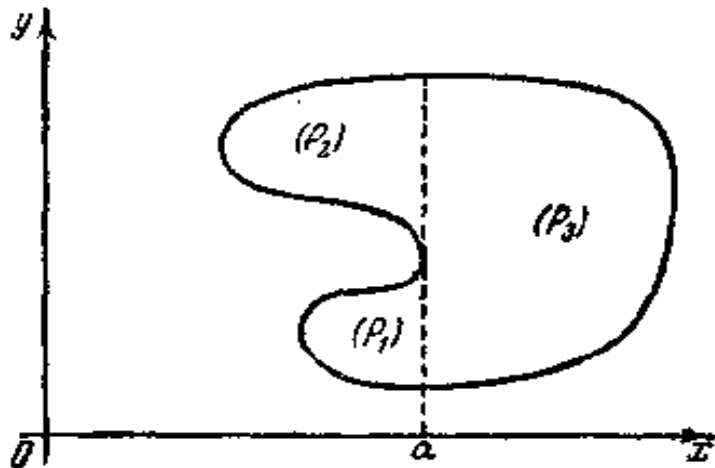


图 41

一般情形, 因为我們要将問題变到第 569 目的定理, 也是把所考察的图形分成矩形元素, 作为論断的基础。与此相关, 这里关于二重积分的記法常常就用記号

$$\iint_{(P)} f(x, y) dx dy;$$

乘积 $dx dy$ 象征元素矩形的面积。

由此也可了解記号

$$\int_a^b \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f dy dx \text{ 或 } \int_a^b \int_{x_0(y)}^{X(y)} f dx dy.$$

572 例 1) 計算二重积分

$$I = \iint_{(P)} y^2 \sqrt{R^2 - x^2} dP,$$

其中 (P) 是半徑为 R 中心在坐标原点的圆(图 42)。

解 区域 (P) 的边界方程为 $x^2 + y^2 = R^2$, 于是 $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$ 。显然, $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$ 是上半圓周的方程, 而 $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ 是下半圓周的方程。因此, 对在区间 $[-R, R]$ 上的一常数 x , 变数 y 自 $-\sqrt{R^2 - x^2}$ 变到 $+\sqrt{R^2 - x^2}$ 。由公式(6) (考虑积分号下的函数对 y 是偶函数)。

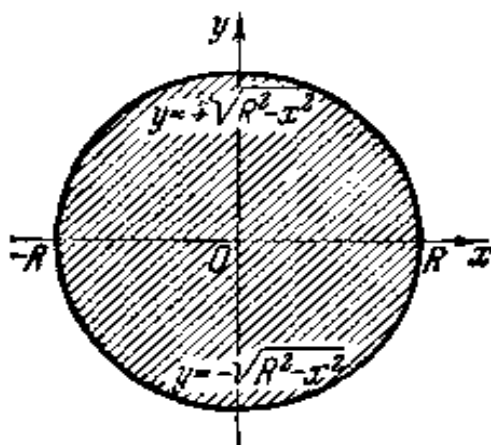


图 42

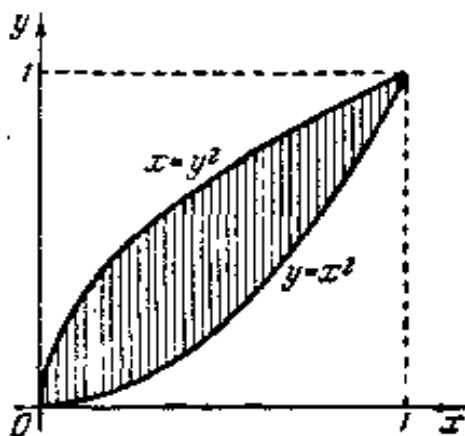


图 43

$$I = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 \sqrt{R^2-x^2} dy = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2-x^2} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 dy.$$

算出里面的积分:

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 dy = \frac{1}{3} (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

再算出(又考虑偶函数性质)

$$I = \frac{2}{3} \int_{-R}^R (R^2 - x^2)^2 dx = \frac{4}{3} \int_0^R (R^2 - x^2)^2 dx = \frac{32}{45} R^5.$$

完全同样地可按公式(6*)进行计算。

2) 计算

$$K = \iint_{(A)} (x^2 + y) dx dy,$$

如区域(A)由二抛物线: $y = x^2$ 及 $y^2 = x$ 所范围。

解 为了得到这区域的大概样子, 作一草图也是有用的。联立解抛物线方程, 求出它们的交点(0, 0)及(1, 1)(图 43)。

如果外层的积分对 y 进行, 则 y 变化的区间显为 $[0, 1]$ 。在这范围内取一 y 的任意值后, 由图可见, x 自 $x = y^2$ 变到 $x = \sqrt{y}$ 。由公式(6*),

$$K = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2 + y) dx.$$

计算出里面的积分:

$$\int_{y^3}^{\sqrt{y}} (x^2 + y) dx = \left. \frac{x^3}{3} + yx \right|_{x=y^3}^{x=\sqrt{y}} = \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}y^6 - y^3,$$

再算出外面的:

$$K = \int_0^1 \left(\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}y^6 - y^3 \right) dy = \frac{33}{140}.$$

3) 计算积分

$$J = \iint_{(D)} xy \, dx \, dy,$$

其中 (D) 是由坐标轴及抛物线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ 所范围的区域 (图 44)。

解 我们有:

$$J = \int_0^1 x \, dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} y \, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 x (1-\sqrt{x})^4 dx = \frac{1}{280}.$$

4) 计算积分 $I = \iint_{(C)} \frac{x^2}{y^2} dx \, dy$, 其中 (C) 是由直线 $x=2$, $y=x$ 及双曲线 $xy=1$ 所范围

的区域。

解 将这些线画在图上 (图 45)。很容易得出方程的公共解来: 直线 $x=2$ 交直线 $y=x$ 于点 $(2, 2)$, 交双曲线 $xy=1$ 于点 $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, 而直线 $y=x$ 及双曲线 (在所讨论区域所在的第一象限范围内) 交于点 $(1, 1)$ 。

如用公式 (6) 来计算积分 I , 则外面的对 x 的积分就必须在区间 $[1, 2]$ 上进行。当固定 x 于这一区间上时, y 的变化范围为 $y = \frac{1}{x}$ 及 $y = x$ 。这样,

$$I = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy.$$

但

$$\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy = -\frac{x^2}{y} \Big|_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} = x^3 - x,$$

所以

$$I = \int_1^{\frac{9}{4}} (x^2 - x) dx = \frac{9}{4}.$$

在以前各例中按公式(6)或(6*)计算时同样简单,在现在这一情况下事情就不同了:按公式(6*)来计算就要麻烦些。然而我们依然来做做看,因为要作为一教训来弄清楚所以如此的原因何在。

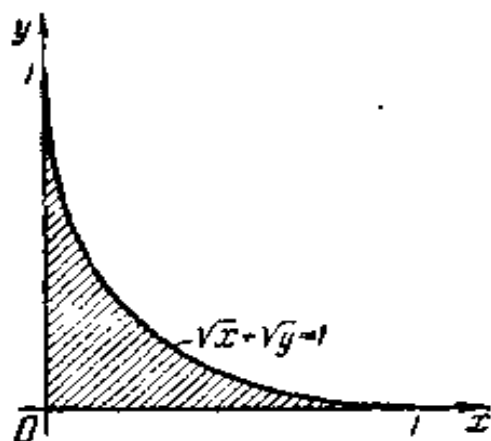


图 44

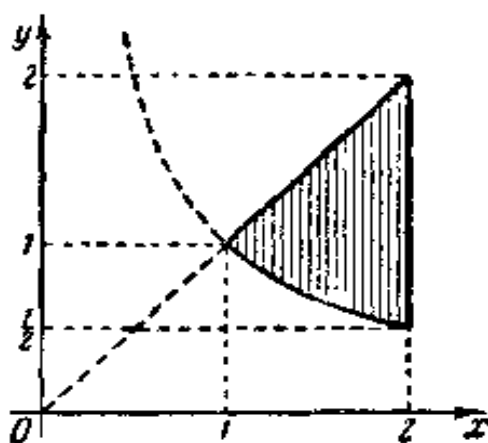


图 45

平行于 x 轴的直线交区域的边界于两点,故公式(6*)可以应用。但在左边限制我们区域的曲线——它相当于一般理论中的曲线 $x = x_0(y)$ ——这里由两部分构成:一直线段及一双曲线段,它们是用不同的方程来表示的。换句话说,所提到的函数 $x_0(y)$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 2]$ 的不同部分内由不同的公式给出来。即

$$x_0(y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & \text{如 } \frac{1}{2} \leq y \leq 1, \\ y, & \text{如 } 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

区域右面被直线 $x=2$ 所限制。

故较方便地是将对 y 的积分拆开并表 I 为下形:

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 \frac{x^2}{y^2} dx + \int_1^2 dy \int_y^2 \frac{x^2}{y^2} dx.$$

因为

$$\int_{\frac{1}{y}}^2 \frac{x^2}{y^2} dx = \frac{8}{3y^2} - \frac{1}{3y^3}, \quad \int_y^2 \frac{x^2}{y^2} dx = \frac{8}{3y^2} - \frac{y}{3},$$

故

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{8}{3y^2} - \frac{1}{3y^5} \right) dy + \int_1^2 \left(\frac{8}{3y^2} - \frac{y}{3} \right) dy = \frac{17}{12} + \frac{5}{6} = \frac{9}{4}.$$

在类似的情况下必须考虑到, 在二重积分的两种可能计算方法中自然是取比较简单的.

5) 计算积分:

$$(a) \quad I_1 = \iint_{(Q_1)} \cos(x+y) dx dy, \quad (b) \quad I_2 = \iint_{(Q_2)} (2x+y) dx dy,$$

$$(B) \quad I_3 = \iint_{(Q_3)} (x+6y) dx dy,$$

其中 (Q_1) 是由直线

$$x=0, \quad y=x, \quad y=\pi$$

所围的三角形, (Q_2) 是由坐标轴及直线 $x+y=3$ 所围的三角形, 而 (Q_3) 是由直线

$$y=x, \quad y=5x, \quad x=1$$

所围的三角形。

提示 在 (a), (b) 的情形下, 用公式 (6), (6*) 中哪一个没有什么区别; 在 (B) 的情形下用公式 (6) 较方便些。(为什么? 画图!)

$$\text{答} \quad (a) I_1 = -2, \quad (b) I_2 = \frac{27}{2}, \quad (B) I_3 = 25\frac{1}{3}.$$

6) 计算积分

$$I = \iint \sqrt{4x^2 - y^2} dx dy,$$

展布在由直线 $y=0$, $x=1$, $y=x$ 所形成的三角形上。

解 由公式 (6), $I = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{4x^2 - y^2} dy$, 里面的积分等于

$$\int_0^x \sqrt{4x^2 - y^2} dy = \frac{y}{2} \sqrt{4x^2 - y^2} + 2x^2 \arcsin \frac{y}{2x} \Big|_{y=0}^{y=x} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right) x^2,$$

$$\text{最后 } I = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right).$$

用公式 (6*) 也可以来计算, 但在这一情况下我们就会陷入较困难的求积法中去了。在选择计算方法时也应注意到类似的情形。

有时候, 在曲边区域的情况下积分极限的排列上会遇到些困难的, 关于这一点, 下列例

题很有用:

7) 在下列各逐次积分中交换积分次序[由公式(9)]:

$$(a) \int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy,$$

$$(b) \int_{-7}^1 dy \int_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x, y) dx,$$

$$(c) \int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy,$$

$$(d) \int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}y} f(x, y) dx,$$

认为 $f(x, y)$ 是连续函数。

(a) 解 积分区域由联立不等式

$$0 \leq x \leq 4, \quad 3x^2 \leq y \leq 12x$$

所确定。于是首先可以看清楚, y 的极端值为 0 及 48。将后一不等式对 x 解出来, 当固定 y 时求得 x 自 $\frac{1}{12}y$ 变到 $\sqrt{\frac{y}{3}}$ 。*

从图 46 来观察这一结果还更简便些, 在图中画出了由直线 $y=12x$ 及抛物线 $y=3x^2$ 所范围的区域, 它们在横坐标为 0 及 4 的点处相交。注意沿 x 轴取着与沿 y 轴不同的刻度。

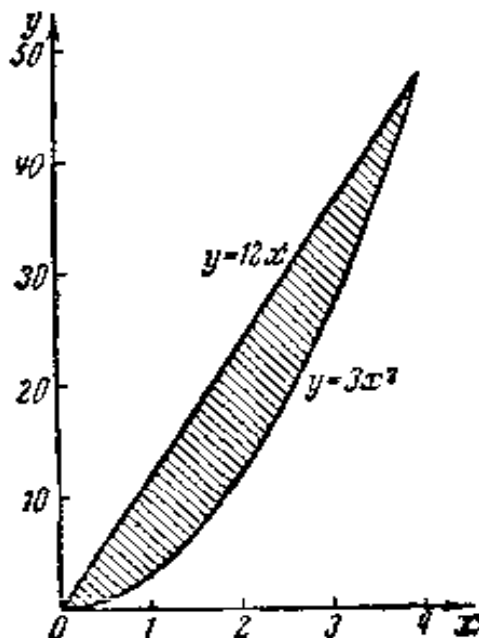


图 46

$$\text{答} \int_0^{48} dy \int_{\frac{1}{12}y}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f dx.$$

(b) 提示 积分区域是由圆周

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4^2$$

所围起来的。

$$\text{答} \int_{-2}^0 dx \int_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f dy.$$

(c) 解 积分区域由联立不等式

$$0 \leq x \leq 1, \quad 2x \leq y \leq 3x$$

所确定, 于是算出 y 的极端值: 0 及 3。

* 这两数都不超出区间 $[0, 4]$ 的范围!

解出后一不等式, 可以看見 $\frac{y}{3} \leq x \leq \frac{y}{2}$. 但对 $y > 2$, 极端 $\frac{y}{2}$ 已越出区间 $[0, 1]$, x 的变化一直受这区间限制的. 因此, 当 $0 \leq y \leq 2$ 时变数 x 自 $\frac{y}{3}$ 变到 $\frac{y}{2}$, 而当 $2 \leq y \leq 3$ 时, 自 $\frac{y}{3}$ 变到 1.

如观察到积分区域是由直线 $y = 3x$, $y = 2x$ 及 $x = 1$ 所围成的三角形(作图:), 则特别简单地从几何上可得出这一结果.

答 我們得到两个逐次积分的和:

$$\int_0^2 dy \int_{\frac{1}{3}y}^{\frac{1}{2}y} f dx + \int_2^3 dy \int_{\frac{1}{3}y}^1 f dx \quad (\text{比較 4) 及 5) (B)}).$$

(r) **答** 我們得到三个逐次积分的和:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f dy + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 f dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f dy.$$

8) 將下面的式子寫成一個逐次积分的样子:

$$(a) \quad \int_0^1 dy \int_{\frac{1}{9}y^2}^y f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_{\frac{1}{9}y^2}^{\frac{1}{3}} f(x, y) dx,$$

$$(b) \quad \int_3^7 dy \int_{\frac{9}{y}}^3 f(x, y) dx + \int_7^9 dy \int_{\frac{9}{y}}^{10-y} f(x, y) dx.$$

答 (a) $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f dy, \quad (b) \quad \int_1^8 dx \int_{\frac{9}{x}}^{10-x} f dy.$

(建議在所有情形下都作圖。)

9) 求證: 积分学中常用的表明由 x 軸、纵坐标 $x = a$, $x = b$ 及曲綫 $y = f(x)$ (其中 $f \geq 0$) 所圍的曲边梯形面积的公式

$$P = \int_a^b f(x) dx$$

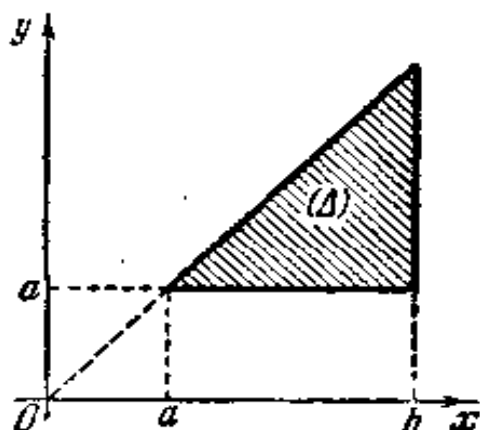


图 47

是显明等式

$$P = \iint_{(P)} dx dy$$

的一推論。

提示 利用公式(6)。

10) 求证公式

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx, \quad (10)$$

其中 $f(x, y)$ 是連續于由直线 $y=a, x=b, y=x$ 所围成的三角形 (Δ) 上的任意函数。

提示 参看图 47; 利用公式(9), 亦即令区域 (Δ) 上的二重积分所化成的两个逐次积分相等。

所证明的公式通常与第里希莱的名字联在一起; 它有各种不同的应用, 特别是在伏尔维拉(G. Volterra)的所謂积分方程理論中有許多应用。

11) 借公式(10)容易证明

$$\int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} (t_1 - t)^{n-2} f(t) dt = \frac{1}{n-1} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

逐次应用这一公式得出結果:

$$\underbrace{\int_a^x dt_{n-1} \int_a^{t_{n-1}} dt_{n-2} \cdots \int_a^{t_1}}_n f(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt,$$

这在以前[473, 12)]用別的方法已证明过。

12) 假定 $p \geq 1$ 及 $q \geq 1$, * 計算积分

$$I = \int \int_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} x^{p-1} y^{q-1} dx dy.$$

由公式(5)我們有

* 这里我們作这种限制只是为了避免积分号下的函数变成无穷, 以后[592, 14)]限制要放松。

$$I = \int_0^1 x^{p-1} dx \int_0^{1-x} y^{q-1} dy = \frac{1}{q} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^q dx = \frac{1}{q} B(p, q+1).$$

最后

$$\int_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} x^{p-1} y^{q-1} dx dy = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}.$$

这一公式是属于第里希莱的。

13) 假定 $p > 1, q > 1, r > 1$, * 计算更一般的积分

$$J = \int_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} x^{p-1} y^{q-1} (1-x-y)^{r-1} dx dy.$$

开始, 与上面一样,

$$J = \int_0^1 x^{p-1} dx \int_0^{1-x} y^{q-1} (1-x-y)^{r-1} dy.$$

再用替换 $y = (1-x)t$ 将里面的积分变换, 结果得:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q+r-1} dx \int_0^1 t^{q-1} (1-t)^{r-1} dt = \\ &= B(p, q+r) B(q, r) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}. \end{aligned}$$

14) 计算较前面更广的积分:

$$K = \int_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} \frac{x^{p-1} y^{q-1} (1-x-y)^{r-1} dx dy}{(\alpha x + \beta y + \gamma)^{p+q+r}}$$

(其中 $\alpha, \beta > 0, \gamma > 0$, 此外, $p > 1, q > 1, r > 1$)*.

变成逐次积分, 得

$$K = \int_0^1 x^{p-1} dx \int_0^{1-x} \frac{y^{q-1} (1-x-y)^{r-1}}{(\alpha x + \beta y + \gamma)^{p+q+r}} dy.$$

再经替换 $y = (1-x)t$ 后, 改变积分次序:

$$K = \int_0^1 t^{q-1} (1-t)^{r-1} dt \int_0^1 \frac{x^{p-1} (1-x)^{q+r-1}}{[\alpha x + \beta t(1-x) + \gamma]^{p+q+r}} dx.$$

* 参看前一页底注。

为了计算里面的积分, 利用一已经知道的结果[495, 2)]. 则

$$K = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+r)}{\Gamma(p+q+r)} \cdot \frac{1}{(\alpha+\gamma)^p} \int_0^1 \frac{t^{q-1}(1-t)^{r-1}}{(\beta t + \gamma)^{q+r}} dt.$$

再运用同一结果, 最后:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+r)}{\Gamma(p+q+r)} \cdot \frac{1}{(\alpha+\gamma)^p} \cdot \frac{\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)} \cdot \frac{1}{(\beta+\gamma)^{q+r}} = \\ &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)} \cdot \frac{1}{(\alpha+\gamma)^p(\beta+\gamma)^{q+r}}. \end{aligned}$$

15) 設函数 $f(x, y), g(x, y)$ 連續于一有界閉区域 (D) 上, 且函数 g 的最小及最大值設为 m 及 M ; 設 $\varphi(u)$ 表一函数, 对 $m \leq u \leq M$ 連續。

以 $\psi(u)$ 表积分

$$\iint_{m \leq g \leq u} f(x, y) dx dy$$

展布在区域 (D) 的适合所示不等式的那一部分。*

則喀塔蘭(E. Catalan)公式成立:

$$\iint_{m \leq g \leq M} f(x, y) \varphi(g(x, y)) dx dy = \int_m^M \varphi(u) d\psi(u),$$

其中右端的积分是在斯底尔吉斯意义下取的。

因为連續函数永远可以表作两正的連續函数的差, 故在证明这一公式时我們可以简单地认为函数 f 是正的。

将区间 $[m, M]$ 任意地分为許多部分:

$$m = u_0 < u_1 < \cdots < u_i < u_{i+1} < \cdots < u_n = M,$$

与此相应, 我們就将所提出的积分(将它表作 I)拆开:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=0}^{n-1} \iint_{u_i \leq g \leq u_{i+1}} f \cdot \varphi(g) dx dy = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(g(\xi_i^*, \eta_i^*)) \iint_{u_i \leq g \leq u_{i+1}} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

我們这里利用了推广的中值定理: (ξ_i^*, η_i^*) 是能使 $u_i \leq g \leq u_{i+1}$ 成立的区域中某一点, 故

* 我們假定, 方程 $g(x, y) = u$ 表一閉曲綫, 故正文中所提到的部分区域是由两个这样的曲綫所限制着的。

令 $g(\xi_i^*, \eta_i^*) = u_i^*$, 我們将有 $u_i \leq u_i^* \leq u_{i+1}$. 这样, 最后,

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(u_i^*) [\psi(u_{i+1}) - \psi(u_i)].$$

右端的和我們知道是斯底尔吉斯和。当 $\max \Delta u_i \rightarrow 0$ 时取极限, 得所需結果:

$$I = (S) \int_m^M \varphi(u) d\psi(u).$$

如对面函数 $\psi(u)$, 有連續(或至少絕對可积)的导函数 $\psi'(u)$, 則斯底尔吉斯积分就可用普通的来代替:

$$I = \int_m^M \varphi(u) \psi'(u) du.$$

16) 作为一例题, 按照喀塔朗的方法, 我們从第里希莱的基本公式[参看 12)] 可以推出一个属于立烏維里(J. Liouville)的較一般的公式。

特別, 取

$$f(x, y) = x^{p-1} y^{q-1}, \quad g(x, y) = x + y,$$

并选取三角形 $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$ 作为区域(D)。則按第里希莱公式, 当 $0 < u \leq 1$,

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \int_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq u}} x^{p-1} y^{q-1} dx dy = u^{p+q} \int_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} x^{p-1} y^{q-1} dx dy = \\ &= \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} u^{p+q}, \end{aligned}$$

利用喀塔朗变换后, 我們将有

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} x^{p-1} y^{q-1} \varphi(x+y) dx dy &= \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} \int_0^1 \varphi(u) du^{p+q} = \\ &= \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \int_0^1 \varphi(u) u^{p+q-1} du. \end{aligned}$$

这就是立烏維里公式。

17) 求由下列各曲面所围立体的体积:

(a) 平面 $x=0, y=0, z=0$, 圆柱 $x^2+y^2=R^2$ 及双曲抛物面 $z=xy$ (在第一个卦限

内);

(6) 平面 $x=0, y=0, z=0, x+2y=1$ 及曲面 $z=x^2+y+1$;

(8) 平面 $y=1, z=0$, 抛物柱 $y=x^2$ 及抛物面 $z=x^2+y^2$;

(r) 平面 $y=0, z=0, y=\frac{b}{a}x$ 及椭圆柱 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

答

$$(a) \quad V = \int_0^R x \, dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y \, dy = \frac{1}{8}R^4,$$

$$(6) \quad V = \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_0^{1-2y} (x^2+y+1) \, dx = \frac{1}{3},$$

$$(8) \quad V = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2+y^2) \, dy = \frac{88}{105},$$

$$(r) \quad V = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}x} \frac{c}{a} \sqrt{a^2-x^2} \, dy = \frac{abc}{3}.$$

18) 同样, 对由下列各面所围的立体:

(a) 椭圆柱 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 及平面 $z=0$ 与 $z=\lambda x+\mu y+h (h>0)$;

(6) 柱面 $az=y^2, x^2+y^2=r^2$ 及平面 $z=0$;

(8) 被平面 $z=p, z=q (0<p<q), x=r, x=s (0<r<s)$ 在曲面 $xyz=a^3$ 上所割下的部分, 这一部分在 xy 平面上的射影以及射影时的柱面。

答

$$(a) \quad V = \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} (\lambda x + \mu y + h) dy = \pi abh = Ph$$

(如 P 是椭圆的面积, 这一结果在几何上很明显);

$$(6) \quad V = \frac{4}{a} \int_0^r dy \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} y^2 dx = \frac{4}{a} \int_0^r y^2 \sqrt{r^2-y^2} dy = \frac{\pi r^4}{4a},$$

$$(B) \quad V = \int_r^s dx \int_{\frac{a^2}{q x}}^{\frac{a^2}{p x}} \frac{a^2}{xy} dy = a^2 \log \frac{q}{p} \log \frac{s}{r}.$$

19) 求旋轉拋物面 $y^2 + z^2 = 4ax$ 被圓柱 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所割下立体的体积 V 。

解 我們有:

$$V = 4 \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \sqrt{4ax-y^2} dy.$$

在熟知的公式 $\int \sqrt{b^2-y^2} dy = \frac{b^2}{2} \arcsin \frac{y}{b} + \frac{y}{2} \sqrt{b^2-y^2}$

中令 $b^2 = 4ax$, 計算出原函数 $\int \sqrt{4ax-y^2}$, 并借它求出里面的积分:

$$\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \sqrt{4ax-y^2} dy = 2ax \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x}{4a}} + \frac{x}{2} \sqrt{4a^2-x^2}.$$

用分部积分法又得:

$$\begin{aligned} 2a \int_0^{2a} x \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x}{4a}} dx &= \frac{a}{2} \int_0^{2a} \frac{x^2}{\sqrt{4a^2-x^2}} dx = \\ &= \frac{a}{2} \left(2a^2 \arcsin \frac{x}{2a} - \frac{x}{2} \sqrt{4a^2-x^2} \right) \Big|_0^{2a} = \frac{\pi a^3}{2}. \end{aligned}$$

最后,

$$\frac{1}{2} \int_0^{2a} x \sqrt{4a^2-x^2} dx = \frac{4}{3} a^3,$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad V &= 4 \left(\frac{\pi a^3}{2} + \frac{4}{3} a^3 \right) = \\ &= a^3 \left(2\pi + \frac{16}{3} \right). \end{aligned}$$

20) 求球 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 被圆柱 $x^2 + y^2 = Rx$ 所割下立体的体积(图 48).*

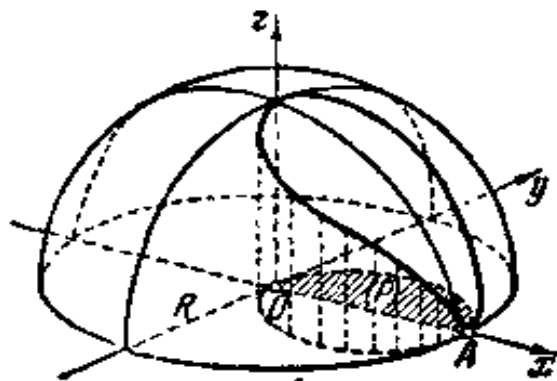


图 48

* 这一立体有时候用十七世紀意大利数学家的名字称为維維安尼(Viviani)立体, 他首先研究它。

解 我們有:
$$V = 4 \iint_{(P)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy,$$

其中 (P) 是 xy 平面第一象限內由曲綫 $x=0$ 及 $x^2+y^2=Rx$ 所圍的半圓, 或者

$$V = 4 \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{Rx-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, dy.$$

但
$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{Rx-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, dy &= \\ &= \frac{R^2 - x^2}{2} \arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}} + \frac{y}{2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{Rx-x^2}} = \\ &= \frac{R^2 - x^2}{2} \arcsin \sqrt{\frac{x}{R+x}} + \frac{1}{2} \sqrt{R} (R-x) \sqrt{x}. \end{aligned}$$

分部积分, 得:

$$\frac{1}{2} \int_0^R (R^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{R+x}} \, dx = \frac{\pi R^3}{12} - \frac{\sqrt{R}}{12} \int_0^R \frac{3R^2 x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{5}{2}}}{R+x} \, dx.$$

例如, 用替换 $x = Rt^2$ 容易求出后一积分的值:

$$\frac{\sqrt{R}}{12} \cdot 2R^2 \sqrt{R} \cdot \left(\frac{32}{15} - \frac{\pi}{2} \right) = \left(\frac{16}{45} - \frac{\pi}{12} \right) R^3,$$

所以

$$\frac{1}{2} \int_0^R (R^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{R+x}} \, dx = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{16}{45} \right) R^3.$$

其次, 不难求出,

$$\frac{1}{2} \sqrt{R} \int_0^R (R-x) \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{15} R^3,$$

所以, 最后,

$$V = 4 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9} \right) R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3 - \frac{8}{9} R^3.*$$

附注 因为半球的体积是 $\frac{2}{3} \pi R^3$, 故在拿掉維維安尼立体后所余部分的体积等于

$\frac{8}{9} R^3$. 有趣的是, 它可不带任何无理数用 R 表示出来.

* 以后我們將指出計算这一体积的一个大为簡便的方法[586, 6)].

21) 计算积分

$$I_1 = \iint_{(A)} y \, dx \, dy, \quad I_2 = \iint_{(A)} r \, dx \, dy,$$

其中 (A) 是由摆线的一拱

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

与 x 轴所围起来的区域。

解 这一问题的特点在于区域的边界是用参数方程给出的。然而摆线上点的纵坐标 y 还是横坐标 x 的单值连续函数: $y = y(x)$, 所以, 受到逐次积分时, 由一般公式我们有

$$I_1 = \int_0^{2\pi R} dx \int_0^{y(x)} y \, dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi R} y^2(x) \, dx.$$

为了避免未知函数 $y(x)$ 而回到已知函数, 我们作替换 $x = a(t - \sin t)$ 。则 $y(x)$ 应该用 $a(1 - \cos t)$ 代替, 因而得到

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 da(t - \sin t) = \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 \, dt = \frac{5}{2}\pi a^3.$$

同样,

$$I_2 = 3\pi^2 a^3.$$

22) 计算积分

$$K = \iint_{(B)} xy \, dx \, dy,$$

其中区域 (B) 是由坐标轴及星形线的一部分

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$$

所围起来的。

答 $K = \frac{1}{80} R^4.$

573 力学应用 所有的几何及力学量, 与某一图形 (P) 上平面地连续分布的质量有关而且在区域中为可加的函数时, 原则上可表作取在这一图形上的二重积分。在第 568 目中我们已详细讨论到这一问题。特别, 我们已看见过, 分布质量的大小本身可由已知的分布密度 $\rho(M) = \rho(x, y)$ 表为:

$$m = \iint_{(P)} \rho \, dP. \quad (11)$$

这里我们想简略地说明一下通常如何得到这种类型的公式。这里思想的条理与在定积

分的应用[参看 339] 时相同。

在图形(P)中取出一元素部分(dP), 作一使计算简化的假定, ——例如, 整个这元素的质量集中在一个点, 或质量分布的密度在这元素的范围内是常数, ——这就可使对所求量 Q 的元素 dQ 给以一形如

$$dQ = q(M) dP$$

的近似值, 正确到一高于 dP 的阶的无穷小, 则 Q 的准确值就可表作公式

$$Q = \iint_{(P)} q(M) dP.$$

可以用两种方法建立这一公式(如在 339 中那样)。

首先, 将元素 dQ 的近似式加起来, 可得出积分和形式的量 Q 的近似值, 而变到极限时就可得到已经是和的极限形式亦即积分形式的准确值 Q 了。

另一方面, 由元素 dQ 的表示式本身就可作出结论: $q(M)$ 是量 Q (在点 M 处) 的“对区域的导数”, 于是, 由第 568 日中所述, 又可推得同一结果。

容易观察到, 例如, 对坐标轴的元素静矩及元素惯矩为

$$\begin{aligned} dM_x &= y\rho dP, & dM_y &= x\rho dP, \\ dI_x &= y^2\rho dP, & dI_y &= x^2\rho dP, \end{aligned}$$

于是对这些矩本身立刻得到

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \iint_{(P)} y\rho dP, & M_y &= \iint_{(P)} x\rho dP, \\ I_x &= \iint_{(P)} y^2\rho dP, & I_y &= \iint_{(P)} x^2\rho dP. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

现在用普通的方法可得到图形重心的坐标:

$$\xi = \frac{\iint_{(P)} x\rho dP}{m}, \quad \eta = \frac{\iint_{(P)} y\rho dP}{m}. \quad (13)$$

在均匀图形的情况下: $\rho = \text{const.}$, 这些公式就可简化:

$$\xi = \frac{\iint_{(P)} x dP}{P}, \quad \eta = \frac{\iint_{(P)} y dP}{P}. \quad (14)$$

在各个简单的情况下, 用二重积分也可概括一些对立体的亦即对柱形条子的类似问题。

设已知这样一长条, 由曲面 $z = z(x, y)$, 它在 xy 平面上的射影(P)及母线与 z 轴平行的射影柱面所围起来的。例如, 如要确定均匀条子(为简单起见假定立体的密度等于一)的静

矩 M_{xy}^P , 則我們就設想这一条子是由許多以 dP 为底以 z 为高的細条构成的。細条对于 xy 平面的靜矩等于它的质量或——在所給情况下也就是——体积 $z dP$, 乘上自这一平面到它的重心的距离, 亦即乘上 $\frac{1}{2}z$ 。这样, 元素靜矩为

$$dM_{xy} = \frac{1}{2}z^2 dP,$$

于是, 对所有的細条子相加, 得

$$M_{xy} = \frac{1}{2} \iint_{(P)} z^2 dP. \quad (15)$$

同样, 可建立公式

$$M_{zx} = \iint_{(P)} yz dP, \quad M_{yz} = \iint_{(P)} xz dP. \quad (15a)$$

由此容易得出长条重心的坐标 ξ, η, ζ 的表示式:

$$\xi = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{\iint_{(P)} xz dP}{V}, \text{ 等等。}$$

同样可推演出长条对 z 轴的慣矩 I_z 及对坐标面的慣矩 I_{yz}, I_{zx} :

$$I_z = \iint_{(P)} (x^2 + y^2) z dP, \quad I_{zx} = \iint_{(P)} y^2 z dP, \quad I_{yz} = \iint_{(P)} x^2 z dP, \quad (16)$$

并且很清楚, $I_z = I_{zx} + I_{yz}$ 。

如质量分布的空间密度 ρ 不是常数, 但仅与 x, y 有关(即沿細条总是常数)則与前面一样可用二重积分来处理。但是, 在一般情形下, 当 ρ 亦与 z 有关时, 二重积分就不够, 而必須要用到三重积分[参看 624]了。

574 例 1) 設图形 (P) 是由曲线 $y=f(x)$, x 軸的一段及两纵坐标 $x=\alpha$ 与 $x=b$ 所围成的一曲边梯形, 又設沿这一图形所分布质量的密度为 1。試求靜矩 M_x 及 M_y 。

将公式(12)变成逐次积分, 我們將有:

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_{(P)} y dP = \int_{\alpha}^b dx \int_0^{f(x)} y dy = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^b f^2(x) dx, \\ M_y &= \iint_{(P)} x dP = \int_{\alpha}^b x dx \int_0^{f(x)} dy = \int_{\alpha}^b x f(x) dx, \end{aligned}$$

或更简单地,

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx, \quad M_y = \int_a^b xy dx,$$

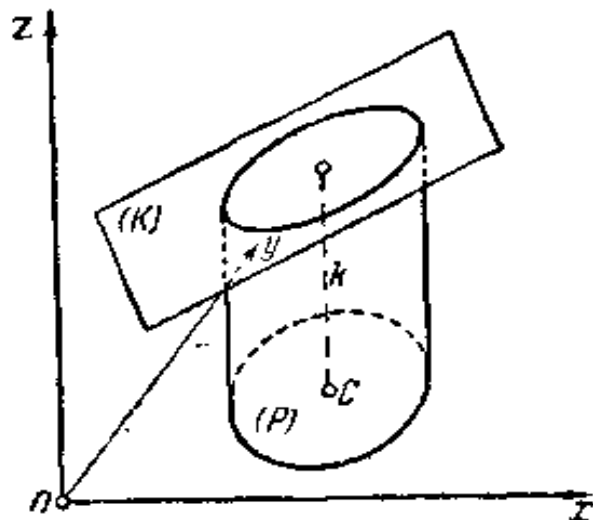


图 49

我們回到了以前就得到过的[342]静矩的表示式。

建議讀者重复对慣矩 I_x 及 I_y 的这些計算。

2) 柱形长条(V)以平面图形(P)为底,而上面被一任意平面(K)所限制。求证: 立体体积 V 等于底面积 P 与通过底的重心到平面(K)为止和底面相垂直的垂綫的乘积。

如坐标軸放着与通常一样(图 49), 平面(K)的方程为

$$z = ax + by + c,$$

則由第 561 日公式(2*),

$$\begin{aligned} V &= \iint_{(P)} (ax + by + c) dP = a \iint_{(P)} x dP + b \iint_{(P)} y dP + c \iint_{(P)} dP = \\ &= (ax_c + by_c + c)P = Ph. \end{aligned}$$

3) 求证: 如在图形(P)的平面中取两相距 h 的平行軸 x 及 x' , 且第一个軸通过图形的重心, 則图形对这两軸的慣矩以关系式

$$I_{x'} = I_x + h^2 m$$

相联, 其中 m 为图形的质量。

取 x 为横軸, 我們有

$$I_{x'} = \iint_{(P)} (y - h)^2 \rho dP = I_x - 2hM_x + h^2 m,$$

因为由假設, $M_x = 0$, 故得所需的等式。

4) 一质点的极慣矩就是点的质量与它到极的距离平方的乘积。亦容易明白什么是一平面图形的极慣矩。

将极放在坐标原点 O , 求证极慣矩

$$I_O = I_x + I_y.$$

5) 設在 xy 平面中已給一任意图形(P)。試求这一图形对--与 x 軸夹角为 θ 的任意軸 Ou 的慣矩一般表示式(图 50)。

如取軸 Ou 及垂直于它的軸 Ov 为新的坐标軸, 則如大家所知, 新坐标 u, v 与旧坐标 x, y

以关系式

$$u = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad v = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

相联系。故

$$\begin{aligned} I_u &= \iint_{(P)} v^2 \rho \, dP = \\ &= \cos^2 \theta \cdot \iint_{(P)} y^2 \rho \, dP - 2 \sin \theta \cos \theta \cdot \iint_{(P)} xy \rho \, dP + \sin^2 \theta \iint_{(P)} x^2 \rho \, dP. \end{aligned}$$

$\cos^2 \theta$ 及 $\sin^2 \theta$ 的系数, 可以看出来, 是对坐标轴的惯矩 I_x 及 I_y , 但除此以外还遇见了一量

$$K_{xy} = \iint_{(P)} xy \rho \, dP,$$

称为离心矩[参看下面第 7 题]或惯性积。因此,

$$I_u = I_x \cos^2 \theta - 2K_{xy} \sin \theta \cos \theta + I_y \sin^2 \theta. \quad (17)$$

为了清楚说明当轴 Ou 转动时图形的惯矩变化情形, 我们这样来做。在轴 Ou 上截取一线段

$$ON = \frac{1}{\sqrt{I_u}}$$

(参看图 50) 并考察这样所得点 N 的几何轨迹。如以 x, y 表点 N 的坐标, 则

$$x = ON \cos \theta = \frac{\cos \theta}{\sqrt{I_u}}, \quad y = ON \sin \theta = \frac{\sin \theta}{\sqrt{I_u}}.$$

以 I_u 除关系式(17), 得到所述的几何轨迹的方程:

$$I_x x^2 - 2K_{xy} xy + I_y y^2 = 1. \quad (18)$$

推广布涅科夫斯基不等式到二重积分的情形, 容易看见, 判别式

$$I_x I_y - K_{xy}^2 > 0,$$

故曲线(18)是椭圆。它称为惯性椭圆。

如 $K_{xy} = 0$, 方程(18)就有形式

$$I_x x^2 + I_y y^2 = 1,$$

这就证明了, 在这一情况下坐标轴就是惯性椭圆的轴(主惯性轴)。

6) 关于离心矩 K_{xy} , 求证:

(a) 如两轴之一, 例如 y 轴, 是图形 (P) 的对称轴及其上面分布质量的对称轴*, 则

* 故 $\rho(-x, y) = \rho(x, y)$ 。

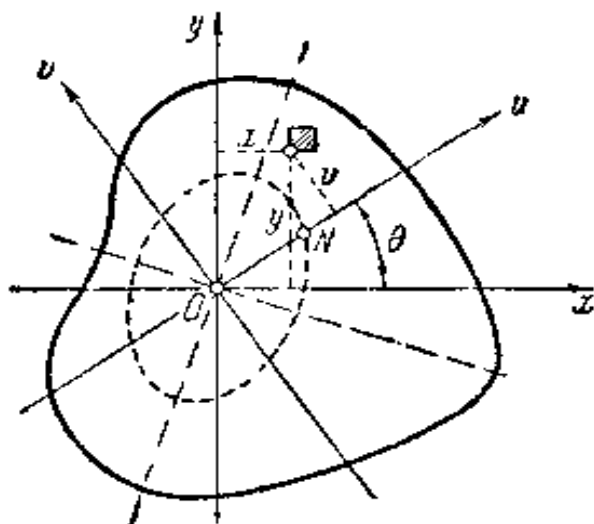


图 50

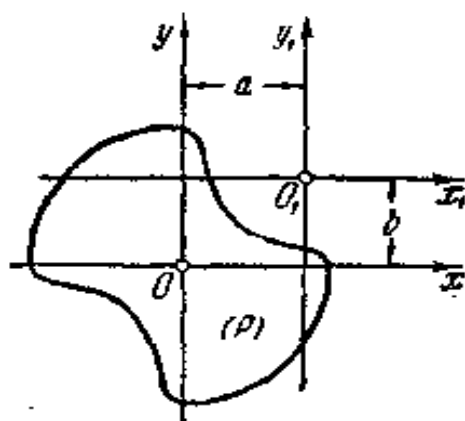


图 51

对元素 ρdP 离心力等于

$$dF' = \omega^2 x \rho dP$$

(当 $x > 0$ 时朝向一边, 当 $x < 0$ 时朝向另一边), 而它对 z 轴的矩

$$dM = \omega^2 x y \rho dP.$$

由此, 相加:

$$F' = \omega^2 \int_{(P)} x \rho dP = \omega^2 M_y,$$

$$M = \omega^2 \int_{(P)} x y \rho dP = \omega^2 K_{xy}.$$

因此, 当 $\omega = 1$ 时, 量 K_{xy} 是离心力矩; 于是名叫“离心矩”。

要离心力在旋转轴上的作用等于零, 必要且充分地须等式

$$M_y = 0, \quad K_{xy} = 0$$

适合。

第一式就是说我们图形的重心必在 y 轴上, 而第二式是说这一轴是主惯性轴。因此, 离心力仅当旋转轴是图形的中心主惯性轴之一时就对旋转轴不发生任何作用。

8) 考察一由平面图形 (P) (图 53) 绕一与它不相交的 y 轴旋转而得的立体。求它的体

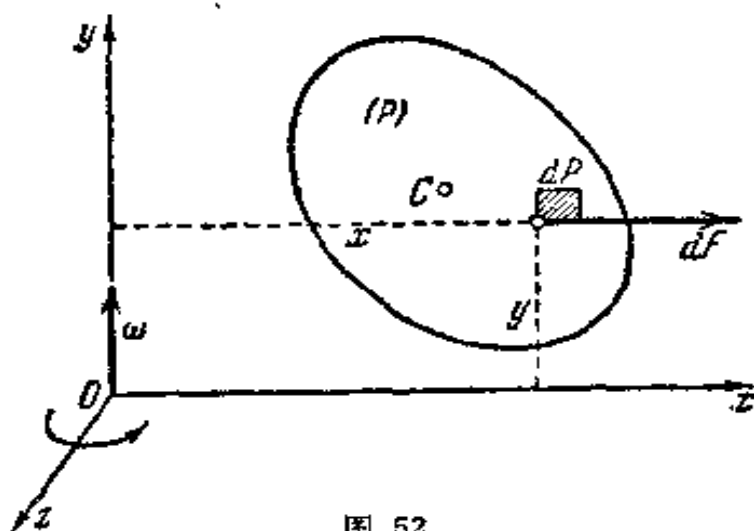


图 52

* 对其它轴的矩显然等于 0。

斜边的方程:

$$y = \frac{h}{b}(a+b-x),$$

我們求得 $K_{xy} = \frac{bh^2(4a+b)}{24}$. 于是, 由(20), $\eta^* = \frac{h}{4} \cdot \frac{4a+b}{3a+b}$.

可以看見, 这一坐标与三角形本身重心的坐标 $\eta = \frac{h}{3}$ 不同.

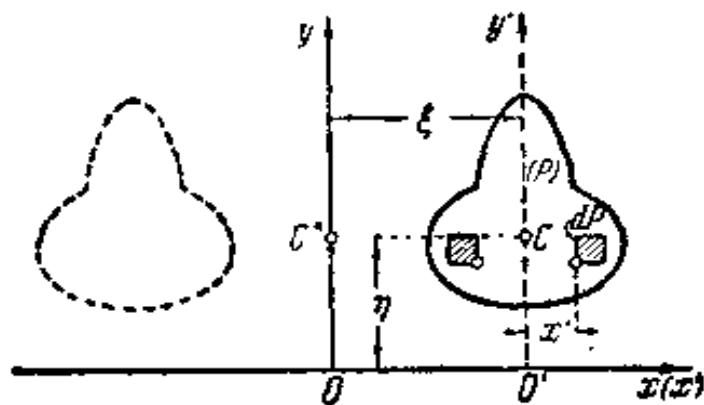


图 55

10) 求证: 如被旋轉的图形有一平行于旋轉軸的对称軸(图 55), 則必

$$\eta^* = \eta,$$

亦即, 立体的重心与平面图形的重心有同一高度。

提示 如考虑到 $K_{xy'} = 0$, 这可由(20)及(19)得出来[参看6)(a)],

11) 求证: 在同样的假定下, 將所考察的图形旋轉后所得立体对旋轉軸的慣

矩可用公式 $I = 2\pi\xi(\xi^2P + 3I_{y'})$ 表示出来。

12) 应用公式(15)及(15a)到下一特殊情形: 設长条的底是一矩形 $[0, a; 0, b]$, 长条的上面为椭圆拋物面

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$

所限制。

答

$$\xi = \frac{3a^2q + 2b^2p}{a^2q + b^2p} \cdot \frac{a}{4}, \quad \eta = \frac{2a^2q + 3b^2p}{a^2q + b^2p} \cdot \frac{b}{4},$$

$$\zeta = \frac{9a^4q^2 + 10a^2b^2pq + 9b^4p^2}{a^2q + b^2p} \cdot \frac{1}{60pq}.$$

13) 求截头圆柱的重心[334, 8]; 图 56]。

解 用图中的記法, 截面方程为 $z = ky$, 其中 $k = \operatorname{tg} \alpha$. 这里半径为 a 的半圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 所围的半圆起(P)的作用。我們有:

$$M_{zx} = \iint_{(P)} yz \, dP = k \int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2 \, dx \, dy = \frac{2k}{3} \int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \, dx = \frac{\pi}{8} k a^4$$

$$M_{xy} = \frac{1}{2} \iint_{(P)} z^2 \, dP = \frac{k}{2} \iint_{(P)} yz \, dP = \frac{\pi}{16} k^2 a^4, \quad M_{yz} = 0.$$

因为体积

$$V = \frac{2}{3}ka^3,$$

故

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{3}{16}\pi a, \quad \zeta = \frac{3}{32}\pi ka.$$

14) 同样, 对于椭球体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

含在第一卦限内的部分(图 57)。

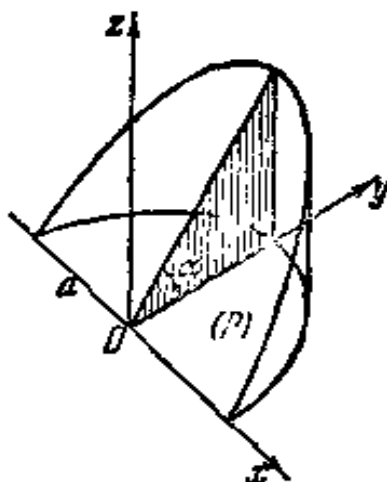


图 56

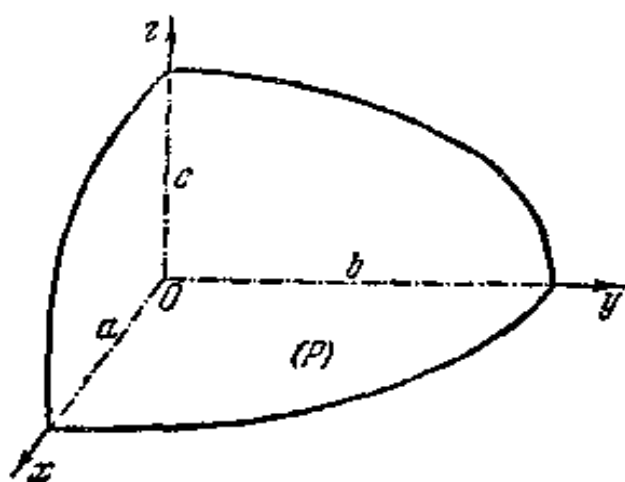


图 57

解 区域(P)是由坐标轴及椭圆

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

($0 \leq x \leq a$)所围起来的, 椭球表面方程的显式为

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

由公式(15),

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \frac{1}{2}c^2 \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \\ &= \frac{bc^2}{3a^3} \int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{\pi}{16}abc^2. \end{aligned}$$

同样

$$M_{yz} = \frac{\pi}{16}a^2bc, \quad M_{zx} = \frac{\pi}{16}ab^2c.$$

同时体积

$$V = \frac{\pi}{6}abc,$$

故

$$\xi = \frac{3}{8}a, \quad \eta = \frac{3}{8}b, \quad \zeta = \frac{3}{8}c.$$

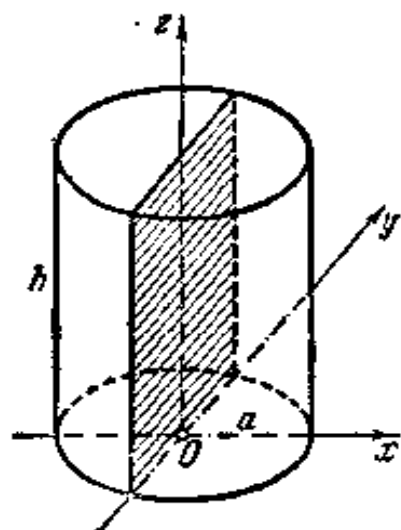


图 58

15) 試求一高为 h 半径为 a 的圆柱对通过其轴的任一平面的惯矩(图 58)。

解 选取坐标轴如图所示, 由公式(16)的第二个我們有

$$\begin{aligned} I_{xz} &= \iiint y^2 z \, dP = h \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2 dy = \\ &= \frac{4}{3} h \int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{\pi}{4} h a^4. \end{aligned}$$

16) 試求椭球体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的惯矩 I_z 。

解 可以限于討論椭球体的一个卦限(图 57), 再将結果乘 8。这时区域 (P) 是椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

的第一象限。

我們有

$$\begin{aligned} I_{zx} &= 8 \iiint_{(P)} y^2 z \, dP = \frac{8c}{a} \int_0^b y^2 dy \int_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} \sqrt{a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)-x^2} \, dx = \\ &= 2\pi ac \int_0^b y^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \frac{4}{15} \pi a b^3 c. \end{aligned}$$

同样,

$$I_{yz} = \frac{4}{15} \pi a^3 b c.$$

最后,

$$I_z = I_{zx} + I_{yz} = \frac{4}{15} \pi abc (a^2 + b^2).$$

§3 格林公式

575 格林公式的推演 在本目中我們建立联系二重积分与曲线积分的一非常重要的公式。

考察一区域 (D) ——由閉路 (L) 所圍的一“曲边梯形”(图 59), (L) 是曲线

$$(PQ): y = y_0(x), \quad (a \leq x \leq b)$$

$$(RS): y = Y(x)$$

及二平行于 y 轴的綫段 PS 与 QR 組成。

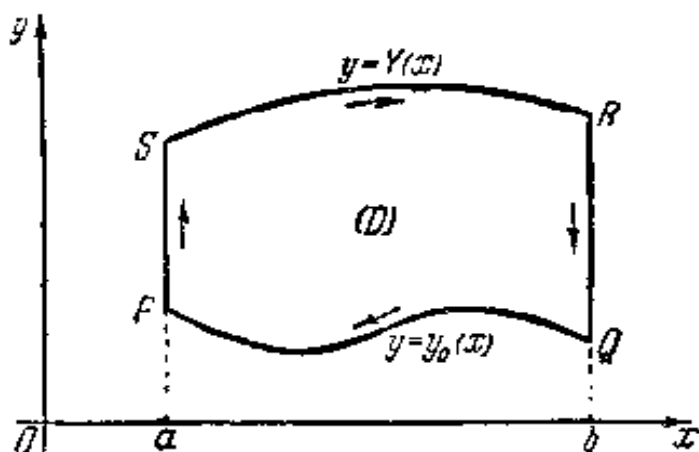


图 59

假定在区域 (D) 中已給一函数 $P(x, y)$, 且与其导函数 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 同时連續。

現在由第 571 目公式(6)来計算二重积分

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy,$$

得

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy.$$

里面的积分这里借原函数 $P(x, y)$ 之助很容易算出来, 即:

$$\int_{y_0(x)}^{Y(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = P(x, y) \Big|_{y=y_0(x)}^{y=Y(x)} = P(x, Y(x)) - P(x, y_0(x)).$$

因此,

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b P(x, Y(x)) dx - \int_a^b P(x, y_0(x)) dx.$$

这两个积分的每一个现在可以用曲线积分来代替。事实上,回想第 522 目的公式(7),可以看见,

$$\begin{aligned}\int_a^b P(x, Y(x)) dx &= \int_{(SR)} P(x, y) dx, \\ \int_a^b P(x, y_0(x)) dx &= \int_{(PQ)} P(x, y) dx.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_{(SR)} P(x, y) dx - \int_{(PQ)} P(x, y) dx = \\ &= \int_{(SR)} P(x, y) dx + \int_{(QP)} P(x, y) dx.\end{aligned}$$

如果要考察沿区域(D)的整个边界(L)的积分,在所得等式的右端还要添加积分

$$\int_{(PS)} P(x, y) dx \text{ 及 } \int_{(RQ)} P(x, y) dx,$$

显然,它们是等于零的,因为线段(PS)及(RQ)垂直于x轴[参看 522]。我们得到

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{(PS)} P dx + \int_{(SR)} P dx + \int_{(RQ)} P dx + \int_{(QP)} P dx.$$

这一等式的右端是沿着范围区域(D)的整个闭路(L)所取的积分,不过是负向罢了。按照我们所做的关于沿一闭路曲线积分记法的规定[523],我们可以将所得公式最后重写为:

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{(L)} P(x, y) dx. \quad (1)$$

虽然这一公式是在坐标轴右手定向的假定下导得的,但容易看出,它在左手定向时保持不变(只是闭路环行的方向掉换了)。

导得的公式对于比所讨论的区域更复杂时也是正确的: 只要假定区域 (D) 可用平行于 y 轴的直线分为有限个所述形状的曲边梯形就够了。我们将不再证明这一点了, 因为如要做起来与在第 526 目中当推广用曲线积分表示面积的公式时完全一样。

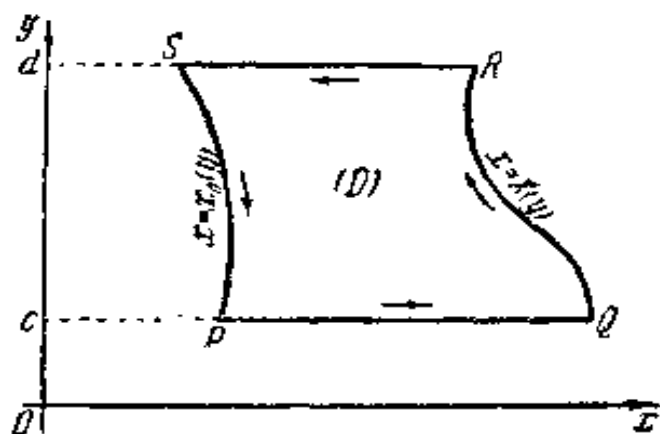


图 60

同样, 假定函数 Q 及其偏导函数 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在区域 (D) 中连续时, 亦可建立公式

$$\iint_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{(L)} Q(x, y) dy. \quad (2)$$

这时首先取如图 60 中所画出的那样曲边梯形作为区域 (D) 。它由曲线

$$(PS): x = x_0(y) \quad (c \leq y \leq d)$$

及

$$(QR): x = X(y)$$

与两平行于 x 轴的线段 (PQ) 及 (RS) 围成的。再与上面一样, 将公式推广到可用平行于 x 轴的直线分为有限个这种形状的曲边梯形的区域上。

最后, 如区域 (D) 同时满足两种情况的条件, 即既可分为有限个第一类型的梯形, 又可(另外)分为有限个第二类型的梯形, 则对这区域, 公式(1)及(2)都成立, 当然, 还是假定函数 P, Q 及其导函数 $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ 都连续。从公式(2)减去(1), 得

$$\int_{(L)} P dx + Q dy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (3)$$

这就是著名的格林(G. Green)公式。*

* 有时它也称为高斯或黎曼公式。

第 526 目中用曲线积分表示面积的公式很容易从这里作为一特殊情形得出来。例如, 令 $P = -y$, $Q = 0$ 并利用显然的等式 $\iint_{(D)} dx dy = D$ 后, 便得到第 526 目公式(8)。

与在第 526 目中一样, 这里使公式(3)得以正确的那些条件也可以取得一种更便于检查的形式。亦即, 可以证明: 对于任何由一个或几个分段光滑的线路所围成的区域(D)格林公式成立。

设(L)是我们区域的总边界。重复第 526 目中的推理, 在(L)内内接一折线(Δ), 并考察由它所范围的多角形区域(Δ)。为简单起见, 假定函数 P 及 Q 在区域(D)的外面例如在某一——包含(D)在其内——矩形(R)内有意义, 连续, 且有连续的导函数 $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 。^{*} 可以认为(Δ)也包含在(R)内。因为多角形区域显然既可分为这种类型的又可分为那种类型的许多梯形, 故在它上面格林公式可以应用:

$$\int_{(\Delta)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{(\Delta)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (4)$$

现在只要假定当闭路(L)被折线(Δ)的顶点所分成的弧段的最大直径趋近于零而变到极限。等式(4)的左端由第 525 目的预备定理此时趋近于等式(3)的左端。

另一方面, 如同在第 526 目中我们已看见过的, 可选取折线(Δ)使它夹在多角形域(A)的外面及多角形域(B)的内面, 这两多角形域分别在(D)的里面及外面, 且它们的面积可相差得任意小:

$$B - A < \varepsilon.$$

可以认为(A)及(B)包含在上面所提到的矩形(R)内。为简便起见令 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = f$ 时, 我们有

$$\left| \iint_{(D)} f dx dy - \iint_{(\Delta)} f dx dy \right| = \left| \iint_{(D) - (\Delta)} f dx dy - \iint_{(\Delta) - (A)} f dx dy \right| \leq$$

^{*} 实际上, 对公式的正确性来说这一假定并非必要的。

$$\leq \iint_{(D)-(A)} |f| dx dy + \iint_{(A)-(A)} |f| dx dy \leq 2 \iint_{(B)-(A)} |f| dx dy < 2Ms,$$

其中 M 是 $|f|$ 在 (R) 上的最大值。由此可見，等式(4)的右端在剛才所提到的极限过程中趋近于公式(3)的右端。因此，这一公式的正确性就建立起来了。

576 应用格林公式到曲綫积分的研究 考察一单連[534]开区域 (G) 并假定在它里面給出函数 P 及 Q ，与它們的导函数 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 同时皆連續。我們重新提出[536]一問題：

要使沿任何不自身相交且完全在 (G) 內的閉路 (L) 上所取的曲綫积分

$$\int_{(L)} P dx + Q dy \quad (5)$$

恒为零，函数 P 及 Q 应滿足怎样的条件？

因为我們假定基本的区域 (G) 是单連的，故被閉路 (L) 在外面所圍的区域 (D) 本身同样亦屬於 (G) ，所以可以将格林公式应用到它上面去；*因此曲綫积分(5)可代以二重积分

$$\iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (6)$$

为了要使类似的积分永远等于零，显然假定

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (A)$$

就够了。

条件(A)的必要性非常简单地就可证明，只要在假定积分(6)等于零后应用对区域的微分法[568]：积分号下的函数，既是积分(6)的“导函数”，本身也必恒等于零。

因此，考虑到第 536 目的預备定理时，我們已得出下面定理的一新

* 我們提起讀者注意，区域 (G) 的单連性这里是怎样被利用了。

证明: 为了要使取在任何閉路上的形如(5)的积分恒等于零, 只要基本区域(G)单連, 条件(A)是必要且充分的[536, 定理 5]。由第 536 目中定理 4, 对区域在同样的假定下, 要使沿联结点 A 及 B 的曲綫(AB)上的曲綫积分

$$\int_{(AB)} P dx + Q dy$$

与积分道路的形狀无关, 条件(A)也是必要且充分的[535, 定理 3]。

用格林公式可以避免一切与确切微分的积分法有关的討論直接来建立这一結果。此处, 再一次又闡明了基本区域单連假定的作用。

現在反过来, 从这里借第 531 目中討論之助, 条件(A)对于式子 $P dx + Q dy$ 可积的充分性(其必要性立刻可明白!) 又可重新建立起来(第 535 目定理 2)。

577 例題及补充 1) 对于在半径为 1 中心为坐标原点的圓內的函数

$$(a) \quad P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$(6) \quad P = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

验证格林公式。

提示 在两种情形下皆 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$, 故二重积分为零。沿圓周

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

所取的曲綫积分仅在情况(6)下等于零, 而在情况(a)下等于 2π 。

这是由于: 格林公式是在所考察的函数及其导函数連續的假定下推出的, 而这里——在两种情况下——这一条件在坐标原点处被破坏了。在情况(a)下格林公式事实上不能应用; 很有趣的, 在情况(6)下, 尽管是如剛才所述的情况, 而它完全是正确的[比照 540, 13)]。

2) 将格林公式变成

$$(a) \quad \iint_{(D)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_{(L)} P dy - Q dx$$

的形狀, 或

$$(6) \quad \iint_{(D)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_{(L)} [P \cos(x, \nu) + Q \sin(x, \nu)] ds$$

的形状(其中 ν 表示朝外的法线方向)。

提示 将 P 换作 $-Q$, 而将 Q 换作 P ; 利用第 528 日中将第二型曲线积分变成第一型曲线积分的公式(14)。注意法线的方向。

3) 利用格林公式, 求证公式:

$$(a) \quad \iint_{(D)} \Delta u \, dx \, dy = \int_{(L)} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds,$$

$$(b) \quad \iint_{(D)} v \Delta u \, dx \, dy = - \iint_{(D)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \, dy + \int_{(L)} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds,$$

$$(B) \quad \iint_{(D)} (v \Delta u - u \Delta v) dx \, dy = \int_{(L)} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) ds,$$

如令 $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \nu} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos(x, \nu) + \frac{\partial f}{\partial y} \sin(x, \nu).$

提示 如在 2)(6) 中令 $P = v \frac{\partial u}{\partial x}, Q = v \frac{\partial u}{\partial y}$, 则可得 (6)₁ (a) 是 (6) 当 $v=1$ 时的特殊情况; 在 (6) 中交换 u, v 的地位并将结果从 (6) 内减去, 便得 (B)。

4) 一函数 u , 当它与它的导函数皆连续且在所考察的区域 (G) 上满足方程 $\Delta u = 0$, 称为在这一区域上的调和函数。

在函数 u 于区域 (D) 上有连续导数 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 的假定下, 求证下面的断言: 要函数 u 是调和函数, 必要且充分地须不论 (L) 是怎样的简单闭路, 条件

$$\int_{(L)} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0$$

恒能适合。

提示 利用公式 3) (a)。

5) 如函数 u 在闭区域 (D) 上是调和的, 则它在区域内的值可由在闭路 (L) 上的值一意确定。

换句话说, 如在区域 (D) 上的两个调和函数 u_1, u_2 在区域的边界 (L) 上有相同的值, 则它们在整个区域上恒等。

考察差 $u = u_1 - u_2$, 我们便将问题变为证明: 在区域 (D) 上的调和函数, 如在区域边界 (L) 上为零, 则在整个区域上恒等于零。

在公式 3) (6) 中令 $v = u$ 。考虑到加在 u 上的条件, 得

$$\iint_{(D)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx \, dy = 0.$$

于是推得,在整个区域(D)上,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

就是说, u 变成一常数了,而既在(L)上为 0,故到处都等于 0,这就是所要证明的。

6) 设 u 是区域(G)上的一调和函数, (x_0, y_0) 是这一区域的任一内点, 又 (K_R) 是半径为 R 中心在点 (x_0, y_0) 处的一圆周.* 则有下一重要公式:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{(K_R)} u(x, y) ds, \quad (7)$$

故调和函数在中心处的值等于它在圆周上的“平均”值。我们来证明这一点。

令 $v = \log r$, 其中 $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$; 不难验证, v 是从平面中挖掉点 (x_0, y_0) 后所得区域中的调和函数。在这一点处函数变成无穷。

用一半径为 ρ ($\rho < R$) 的圆周 k_ρ 围住点 (x_0, y_0) , 应用公式 3) (B) 到夹在圆周 (K_R) 及 (k_ρ) 间的区域(D)上; 边界(L)是由 (K_R) 及 (k_ρ) 在一起组成的。因为在这区域中函数 u , v 都是调和的, 故左端等于零。右端的积分

$$\int_{(L)} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds$$

消失了, 因为, 例如, 在圆周 (K_R) 上 $v = \log R = \text{const.}$, 而[由于 4)]

$$\int_{(K_R)} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0.$$

另一方面, 我们有

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{d \log r}{dr} \right|_{r=R} = \frac{1}{R} \quad \text{在 } (K_R) \text{ 上,}$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \nu} = -\frac{d \log r}{dr} \right|_{r=\rho} = -\frac{1}{\rho} \quad \text{在 } (k_\rho) \text{ 上,}$$

故最后得:

$$\frac{1}{\rho} \int_{(k_\rho)} u ds = \frac{1}{R} \int_{(K_R)} u ds.$$

对适当小的 ρ , 函数 u 在圆周 (k_ρ) 上可与在中心处的值 $u(x_0, y_0)$ 相差到任意地小, 故当 $\rho \rightarrow 0$ 时左端有极限 $2\pi \cdot u(x_0, y_0)$ 变到极限, 即得所要的等式。

7) 由 6) 中所证明的结果, 可推得一有趣的推论: 如函数 $u(x, y)$ 在由闭路(L)所围的

* 半径(R)假定如此地小, 使圆周 (K_R) 整个在区域(G)中。

閉区域(D)上連續且在这区域的内部是調和函数, 則, 除掉它是常数的情形外, 函数在区域的内部不能达到其最大(最小)值。

事实上, 假如所讲到的函数 $u(x, y)$ 不是常数, 而在内点 (x_0, y_0) 处达到了譬如說其最大值, 則容易得到一与公式(7)相違的矛盾。

現在, 在假定函数 u 在閉区域(D)上連續但仅在区域内部調和后, 我們可以強化 5) 中的結果。这里只要证明, 如函数 u 在边界上为零則便恒等于零。而这可由下面的观察中得出来: 如不是这样的話, 它就会在区域的内部达到它的最大或最小值, 与上面所作的注意点相矛盾。

§ 4 二重积分中的变数更換

578 平面区域的变换 在本目及以下各目中, 我們將对一些在讲到曲面的参数表示时[218]已經遇見过的很普遍的概念重新回想一下, 并作某种程度的深入。

假定我們已知二平面, 一个关联于直角坐标軸 x, y , 另一个关联于同样的坐标軸 ξ, η 。在这两平面中考察两閉区域: 区域(D)在 xy 平面上, 区域(Δ)在 $\xi\eta$ 平面上。这两区域的每一个都可是无界的, 特別, 可以包括整个平面。我們將假定区域的边界(如区域不包括整个平面)为一简单的分段光滑的曲綫, 对区域(D)用記号(S)来表示它, 对区域(Δ)用記号(Σ)(图 61)。

設在区域(Δ)上給出一組函数:

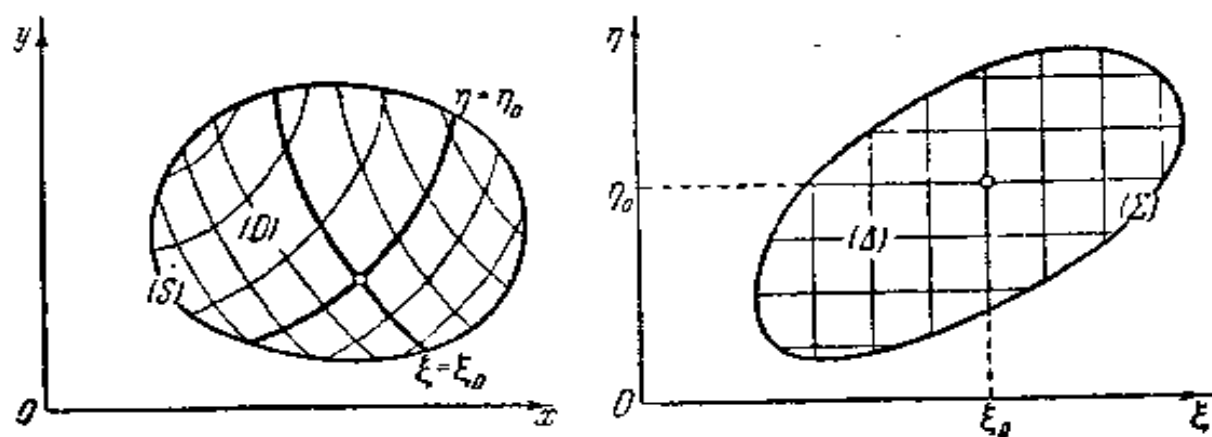


图 61

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta), \\ y &= y(\xi, \eta), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

它使得区域 (Δ) 的每一点 (ξ, η) 变换到区域 (D) 的一确定点 (x, y) , 且 (D) 中没有一个点 (x, y) 被漏掉了, 故每一个这样的点至少与 (Δ) 中的一点 (ξ, η) 相对应。如对于不同的点 (ξ, η) 对应着不同的点 (x, y) (我們今后将假定如此), 故每一点 (x, y) 仅由一点 (ξ, η) 变来, 則公式(1)可一意地对 ξ 及 η 解出来。变数 ξ, η 反过来又是 x, y 在区域 (D) 上的单值函数:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(x, y), \\ \eta &= \eta(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

因此, 在区域 (D) 与 (Δ) 間建立了一个相互一意的或一对一的对应。我們亦这样說, 公式(1)实现了区域 (Δ) 到区域 (D) 的一变换, 而公式(2)給出区域 (D) 到区域 (Δ) 的一逆变换。

如所談的两区域充滿了对应的平面, 則我們便得到一平面到另一平面的变换。最后, 如这两平面重合, 即如将点 (x, y) 及 (ξ, η) 当作同一平面的点, 則出現了一个平面自身上的变换。

再則, 我們將假定函数(1)及(2)不仅連續且有連續的(一阶)偏导数。則, 如大家所知[193],

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \cdot \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = 1,$$

故两个雅可比式皆不等于零, 并且, 由連續性, 符号保持不变。

由雅可比式

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

在区域 (Δ) 上异于0的事实, 得知区域 (Δ) 的內点 (ξ_0, η_0) 必因公式(1)而有区域 (D) 的內点 (x_0, y_0) 与之对应, 因为由隐函数存在定理[193], 用这些公式, 在点 (x_0, y_0) 的整个邻域內变数 ξ 及 η 确定为 x 及 y 的单值函数。同样, 对于区域 (D) 的內点也永远对应着区域 (Δ) 的內点。由

此可見, 閉路(β)的点对应于閉路(Σ)的点, 反过来也是如此。

一般, 如在区域(Δ)中取一简单的分段光滑的曲綫(Λ), 則用变换(1)能把它变成区域(D)中的类似的曲綫(L)。事实上, 設曲綫(Λ)的方程为:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(t), \quad \eta = \eta(t) \\ (\alpha \leq t \leq \beta \text{ 或 } \alpha \geq t \geq \beta), \end{aligned} \quad (3)$$

且(在曲綫的一光滑段內)可以认为函数 $\xi(t)$, $\eta(t)$ 有連續的导函数。将这些函数代入变换公式(1)中, 我們得到对应曲綫(L)的参数方程:

$$x = x(\xi(t), \eta(t)) = x(t), \quad y = y(\xi(t), \eta(t)) = y(t). \quad (4)$$

容易看見, 这些函数同样亦有連續的导函数:

$$x'(t) = \frac{\partial x}{\partial \xi} \xi'(t) + \frac{\partial x}{\partial \eta} \eta'(t), \quad y'(t) = \frac{\partial y}{\partial \xi} \xi'(t) + \frac{\partial y}{\partial \eta} \eta'(t); \quad (5)$$

此外它們不会同时为零, 故在曲綫(L)上沒有奇点。事实上, 在相反的情形下, 由于行列式 $\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}$ 不等于零, 由(5)就能得知, 同时 $\xi' = 0$ 及 $\eta' = 0$, 这是不可能的。

反过来, 在区域(D)中取一曲綫(L)后, 用变换(2), 在区域(Δ)中可得一与它相对应的曲綫(Λ)。

如点 (ξ, η) 在 $\xi\eta$ 平面上例如以正向画出一閉路(Λ), 則对应点 (x, y) 在 xy 平面上亦画出某一閉路(L), 但它的方向既可为正亦可为負。我們以后将看到[581, 1°], 这一問題与雅可比式的符号有关。

給出区域(Δ)中变数 ξ 及 η 的一对值就一意地确定在 xy 平面上区域(D)中的某一点(反过来也是如此)。我們因而称数 ξ, η 为区域(D)的点的坐标。实质上, 方程(1)* 給我們平面图形(D)的一参数表示法, 是我們以往所談曲面参数表示法[218]的特殊情形。

与那里一样, 由区域(D)的点构成的曲綫, 其一个坐标保持常数值者, 称为坐标綫。例如, 在(1)中令 $\eta = \eta_0$, 我們便得到坐标綫的一参数

* 如在它上面再加一方程 $z = 0$ 。

表示:

$$x = x(\xi, \eta_0), \quad y = y(\xi, \eta_0)$$

(这里 ξ 做参数)。在方程(2)的第二式中令 $\eta = \eta_0$ 时, 可得同一綫的隐方程:

$$\eta(x, y) = \eta_0.$$

坐标綫一般說来是曲綫, 与此相关的, 說明点在 xy 平面上位置的数 ξ, η 在这种情况下(在曲面情形时也是如此)称为点的曲綫坐标。

对坐标 η 給它各种(可能的)不同的常数值, 我們得到 xy 平面上的一完整的曲綫族。固定坐标 ξ 的值, 我們得到坐标綫的另一族。当在所考察的区域間为相互一意的对应时, 同一族內的不同的綫彼此不相交, 且通过区域(D)的任何一点, 在每一族中經過有一条綫。

在 xy 平面上的整个坐标綫网是 $\xi\eta$ 平面上的直綫网 $\xi = \text{const.}$ 及 $\eta = \text{const.}$ 的图象(图 61)。

579 例 曲綫坐标的最簡單也是最重要的例是极坐标 r, θ 。它們有很清楚的几何解說, 即位徑向量与极幅角, 但亦可形式地用熟知的关系式

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (r > 0)$$

引进来。

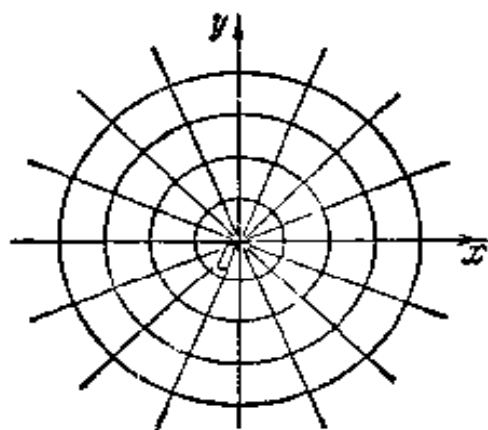


图 62

如将 r 及 θ 的值放在两互相垂直的軸上, 例如, r 当作横軸, θ 当作纵軸(在坐标軸为右手定向时), 則对于半平面 $r \geq 0$ 上的每一点由所述公式有 xy 平面上一个确定点相对应。

讀者可能已想到在这一情形下的坐标綫: 直綫 $r = \text{const.}$ 与半徑为 r 中心在原点的圆相对应, 直綫 $\theta = \text{const.}$ 与自原点出发和 x 軸交于一角 θ 的射綫相对应(图 62)。

但是, 在所給的情形下变换公式不能一意地解出来: 角 θ 的大小改变 $2k\pi$ (k 为整数)时不影响 x, y 的值。要想得到 xy 平面中的一切点, 只要将值限于

$$r > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

就可以了。每一异于原点的点 (x, y) 与一个值 $r > 0$ 及在所示范围内的一个值 θ 相对应。然由于坐标原点的关系, 对应的一意性不可避免地要破坏: 点 $x = y = 0$ 与 $r\theta$ 平面上的整个 θ 轴相对应(或者, 如愿意的话, 与它的自 $\theta = 0$ 到 $\theta = 2\pi$ 的一段相对应)。

在 $r\theta$ 平面上考察一闭矩形 $[0, R; 0, 2\pi]$ 或 $o\alpha\beta\gamma$ (图 63); 易见, 在 xy 平面上它与围绕原点 O 半径为 $R = OA$ 的闭的圆相对应。但这一圆的全部边界仅对应于所述矩形的一边 $\alpha\beta$; 边 $o\alpha$ 及 $\beta\gamma$ (两个同时!)与圆的同一半径 OA 相对应; 最后, 整个边 $o\gamma$ 仅与点 O 相对

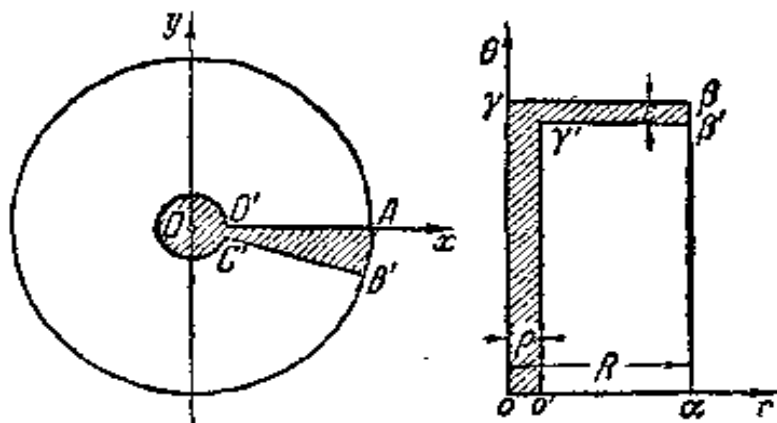


图 63

应。这时显然在前目所述的条件下没有保持住!

然而, 如将边 $o\gamma$ 移动一小量 $\rho = oo'$, 而边 $\gamma\beta$ 移动 $\epsilon = \beta\beta'$, 则新的矩形 $o'\alpha'\beta'\gamma'$ 将与 xy 平面上的图形 $O'AB'C'$ 相对应, 这一图形是从圆内挖掉一半径为 ρ 的小圆及一中心角为 ϵ 的扇形而得来的; 这样就能保持所有的要求。当点在 $r\theta$ 平面上沿线段 $\alpha\beta'$, $\beta'\gamma'$, $\gamma'o'$, $o'\alpha$ 移动时, 在 xy 平面上的对应点依次就描画出优弧 AB' (半径为 R), 线段 $B'C'$, 优弧 $C'O'$ (半径为 ρ)及线段 $O'A$ 。顺便注意, 在 $r\theta$ 平面上正向的环行与 xy 平面上也是正向的环行相对应。

在所给的情形下, 雅可比式等于

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r,$$

它永远保持(除原点外)正号。

2) 试讨论由公式

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}$$

(ξ, η 不同时为零)所定义的平面自身上的变换。

如将 x 轴及 ξ 轴, y 轴及 η 轴放在一起, 则这一变换有一显明的几何解说。因为

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta},$$

則很清楚,对应点总在自原点出发的同一射綫上,且自原点到它們的距离的乘积为一。

这一变换称为反演法。它是一意可逆的:

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

(x, y 不能同时为零)。

坐标綫是通过原点的圓周:

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{\xi_0}x = 0, \quad x^2 + y^2 - \frac{1}{\eta_0}y = 0,$$

$$(\xi_0 \neq 0)$$

$$(\eta_0 \neq 0)$$

其中心分别在 x 軸及 y 軸上(图 64)。当 $\xi_0 = 0$ 时得 y 軸($x=0$), 当 $\eta_0 = 0$ 时得 x 軸($y=0$)。

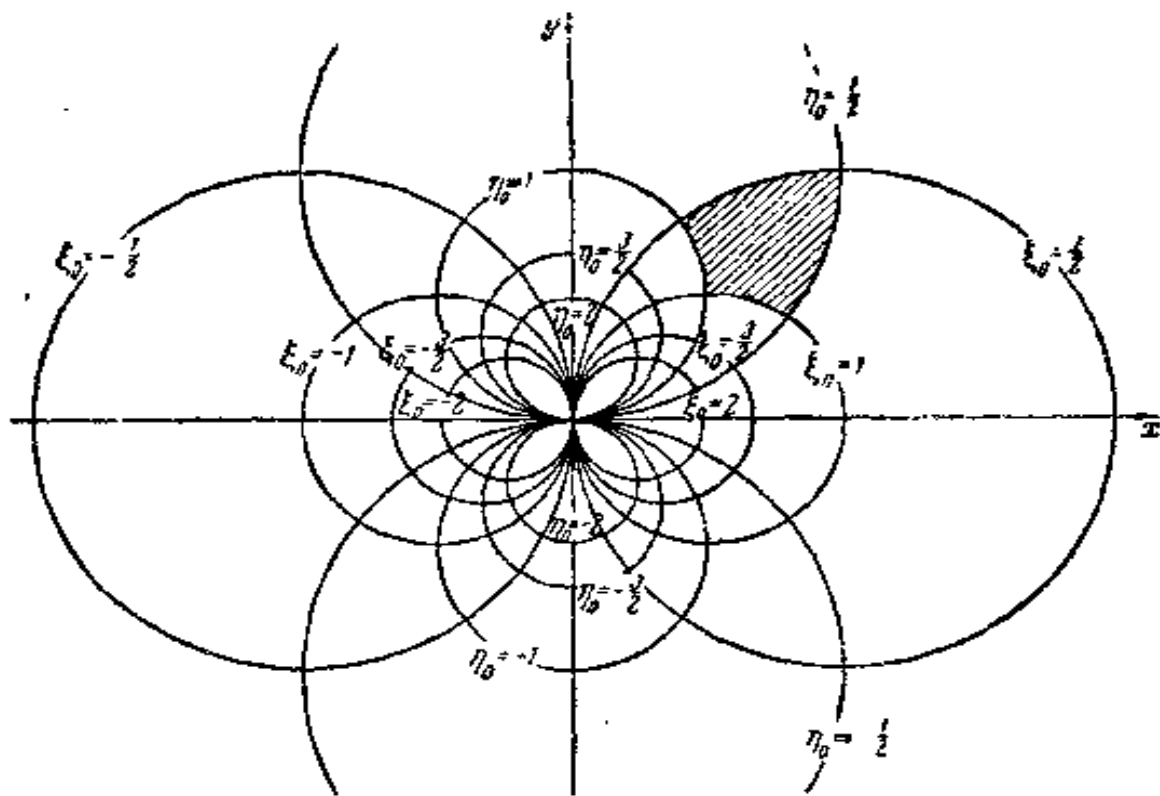


图 64

例如, 在 $\xi\eta$ 平面上的正方形 $\left[\frac{1}{2}, 1; \frac{1}{2}, 1\right]$ 与在图 64 中打了斜綫的区域相对应。閉路环行的方向此时不一致。

因为

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = -\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\eta^2 - \xi^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{2\xi\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2}$$

故雅可比式

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = -\frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^2} < 0.$$

3) 如从变换公式

$$x = \xi^2 - \eta^2 \quad y = 2\xi\eta$$

出发, 则对任何的 ξ, η 从这里可一意地得到 x, y 。将这些公式对 ξ, η 解出来, 求得

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}}, \quad \eta = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}},$$

其中 ξ 及 η 的符号以条件 $\xi\eta = \frac{1}{2}y$ 相关联。因此, 除原点外, 每一点 (x, y) 与对称于原点的两点 (ξ, η) 相对应。为了要恢复单值性, 例如, 可以限制于 $\xi\eta$ 平面的上半部分 (包括 ξ 轴的 正 的部分, 但不包括它的负的部分)。

这里坐标线是共焦点 (焦点在原点) 且共轴的抛物线族:

$$y^2 = 4\xi_0^2(\xi_0^2 - x) \quad \text{及} \quad y^2 = 4\eta_0^2(x + \eta_0^2)$$

$$(\xi_0 \neq 0)$$

$$(\eta_0 \neq 0)$$

(图 65)。值 $\xi_0 = 0$ 与 x 轴的负的部分相对应, 而值 $\eta_0 = 0$ 与它的正的部分相对应。雅可比式, 除原点外,

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} 2\xi & -2\eta \\ 2\eta & 2\xi \end{vmatrix} = 4(\xi^2 + \eta^2) > 0.$$

4) 有时候先给出坐标线的网再由它确立曲线坐标系要来得方便些。

例如, 考察两抛物线族 (图 66):

$$y^2 = 2px \quad \text{及} \quad x^2 = 2qy,$$

每一族分别 (如除掉坐标原点) 填满了整个 xy 平面。

很自然地, 引进 $\xi = 2p$ 及 $\eta = 2q$ 作为曲线坐标。由等式 $y^2 = \xi x$ 及 $x^2 = \eta y$, 我们有

$$x = \sqrt[3]{\xi\eta^2}, \quad y = \sqrt[3]{\xi^2\eta} \quad \text{及} \quad \xi = \frac{y^2}{x}, \quad \eta = \frac{x^2}{y} \quad (x, y \neq 0).$$

这里雅可比式等于

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\xi^{-\frac{2}{3}}\eta^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}\xi^{\frac{1}{3}}\eta^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{3}\xi^{-\frac{1}{3}}\eta^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}\xi^{\frac{2}{3}}\eta^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}.$$

5) 我们现在将从共焦点及共轴的圆锥曲线族

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1 \quad (6)$$

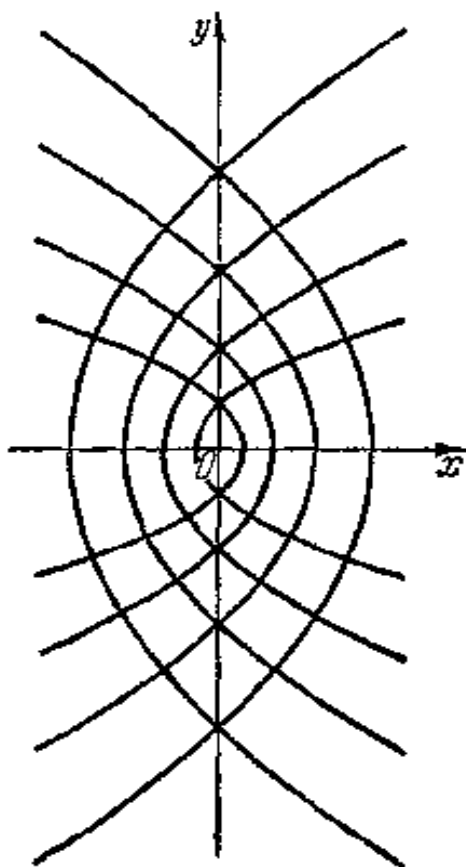


图 65

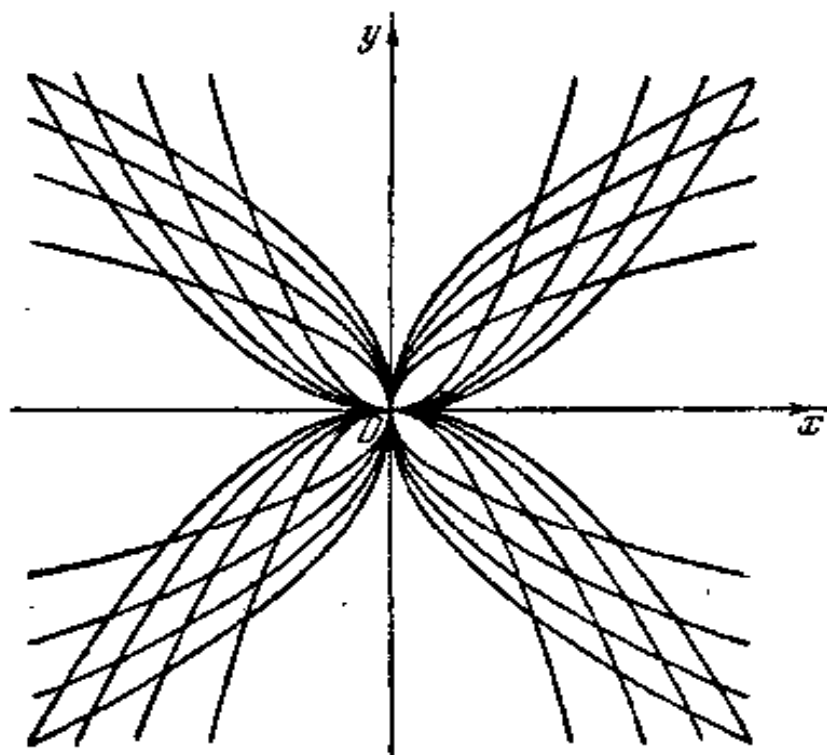


图 66

出发(当 $\lambda > c$ 时是椭圆, 当 $0 < \lambda < c$ 时是双曲线; 图 67)。

通过平面上不在坐标轴上的每一点 (x, y) , 有这一族中的一个椭圆及一个双曲线。事实上, 自(6)所得的方程

$$(\lambda^2)^2 - \lambda^2(x^2 + y^2 + c^2) + c^2x^2 = 0$$

的左端当 $\lambda = 0$ 时符号为 +, 当 $\lambda = c$ 时符号为 -, 又当很大的 λ 时符号又为 +。因此, 这方程有两正根: 一个 $\lambda > c$, 另一个 $\mu < c$ * 这就证明了我们的断言。

如将前一方程视作对 λ^2 的二次方程, 则由根的熟知的性质我们有

$$\lambda^2 + \mu^2 = r^2 + y^2 + c^2, \quad \lambda^2 \mu^2 = c^2 x^2,$$

而由此很容易用 λ 及 μ 表示 x 及 y :

$$x = \pm \frac{\lambda \mu}{c}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}}{c}.$$

限制在第一象限时, 这里我们仅须保持正号。可将数 λ, μ 视作这一象限中点的曲线坐标; 它们称为椭圆坐标。在这一情形下, 开始的圆锥曲线恰巧就是坐标线。

特别指出, λ 自 c 变到 $+\infty$, 而 μ 自 0 变到 c 。对于极端的值我们得到: 当 $\lambda = c$ 时, x 轴上自 $x = 0$ 到 $x = c$ 的线段,

* 为了不混淆这两个根, 对于大的一个我们保持记号 λ , 而小的一个表作 μ 。

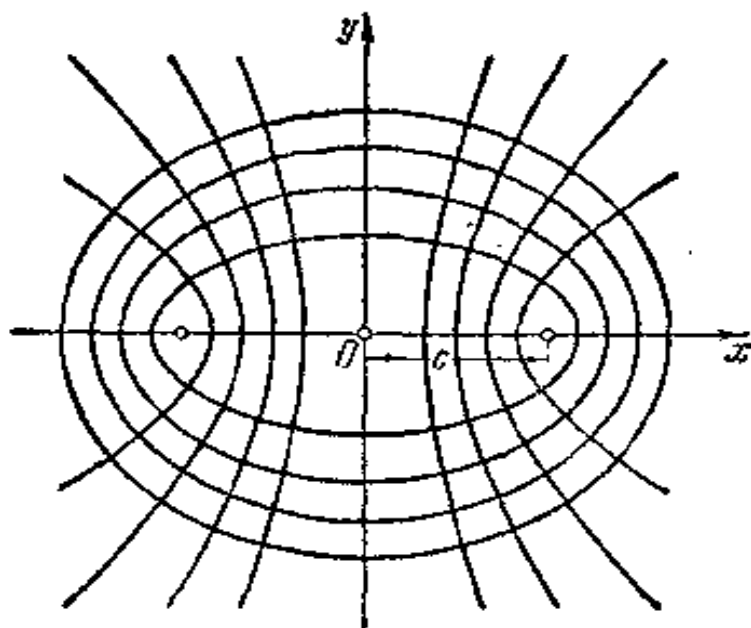


图 67

当 $\mu=c$ 时, x 轴上自 $x=c$ 到 $x=+\infty$ 的线段,

当 $\mu=0$ 时, y 轴上正的部分。

最后, 容易计算出雅可比式:

$$\frac{D(x, y)}{D(\lambda, \mu)} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}} < 0.$$

580 曲线坐标中面积的表示法 假定在 xy 平面上已给某一由分段光滑的且无奇点的闭路(S)所围的区域(D)。设公式(1)确立一个在这一区域与 $\xi\eta$ 平面上由类似的闭路(Σ)所围成的区域(Δ)间的相互一一对应。

我们保留第 578 目中对于这一区域变换的全部假定, 此外, 还假定在区域(Δ)内, (1)中两函数有一个的二阶混合导函数, 例如

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \text{ 及 } \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi},$$

存在且连续(由连续性, 它们有相等的值, 180)。^{*}

在这些假定下, 我们的任务是要将所考察的在 xy 平面上的区域面积 D 表作 $\xi\eta$ 平面上展布在区域(Δ)上的二重积分的样子。

^{*} 这里我们注意, 这些补充假定对最后结果的真实性来说是不必要的, 这里引进来仅是为了简化证明。

我們将从下一公式出发,即用沿着区域(D)的边界(S)而取的曲綫积分表示面积 D 的公式

$$D = \int_{(S)} x \, dy \quad (7)$$

[参看 526 (9)]出发。

以后变换的计划是这样的: 首先利用闭路的参数方程将曲綫积分 (7) 变成普通的定积分。其次, 将后者又变成一曲綫积分, 但这一次是取在区域(Δ)的边界上了。最后, 利用格林公式, 将所得曲綫积分用在区域(Δ)上的二重积分来代替。

为了要实行这一计划, 我們必須要闭路(S)的参数方程。因为以后我們要轉換到闭路(Σ), 故我們宁可在现在就从这一闭路的参数方程出发。設 (3) 給出了曲綫(Σ)的参数表示, 則显然 (4) 就将給出曲綫(S)的参数表示, 因为[由我們的假定可得知, 578]它在 xy 平面上对应于闭路(Σ)。 t 的变化范围 α 及 β 我們可以如此选择, 使当自 α 变到 β 时, 曲綫(S)以正向描画出来了; 这是永远做得到的。

因此, 按照 522 目公式 (5*),

$$D = \int_{\alpha}^{\beta} x(t) y'(t) \, dt,$$

或者, 如注意 (4) 及 (5),

$$D = \int_{\alpha}^{\beta} x(\xi(t), \eta(t)) \left[\frac{\partial y}{\partial \xi} \xi'(t) + \frac{\partial y}{\partial \eta} \eta'(t) \right] dt. \quad (8)$$

将这一积分与沿闭路 (Σ) 正向而取的曲綫积分

$$\int_{(\Sigma)} x(\xi, \eta) \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \right) \quad (9)$$

相比較。如要想将后一积分按通常規則化为普通的定积分, 則此处必須以曲綫(Σ)参数方程中的函数 $\xi(t)$ 及 $\eta(t)$ 来代替 ξ 及 η , 我們就回

到积分(8)。

不过，必須还要注意到一点。当 t 自 α 变到 β 时閉路(S)以正向描画——我們就是这样选取了这个范围。但閉路(Σ)此时既可能以正向描画，亦可能以負向描画；因此，积分(8)及(9)实际上可能相差一符号。在任一情形下，

$$D = \pm \int_{(\Sigma)} x \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + x \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta, \quad (10)$$

并且(再一次強調)，如閉路(S)的正向环行与閉路(Σ)的正向环行相对应則取正号，在相反的情形下就取負号。

最后所剩的，就是要变换所得曲綫积分为二重积分，为此就要利用格林公式

$$\int_{(\Sigma)} P(\xi, \eta) d\xi + Q(\xi, \eta) d\eta = \iint_{(\Delta)} \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta,$$

其中我們令

$$P(\xi, \eta) = x \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad Q(\xi, \eta) = x \frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

因为

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + x \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi},$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + x \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta},$$

而 y 的二阶混合导数彼此相等，故

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)},$$

我們就得到公式

$$D = \pm \iint_{(\Delta)} \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} d\xi d\eta.$$

在第 578 目中我們已看見，在所作假定下雅可比式

$$J(\xi, \eta) = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}$$

在区域 (Δ) 中保持一定符号。故积分也有同一符号。但积分前面还有一双重符号 $\pm$, 因为结果须真正得一正数, 故显然积分前面的符号与雅可比式的符号一致。如将这一符号放到积分号下的函数上, 则在那里显然就得到雅可比式的绝对值, 故面积的最后表示式为

$$D = \iint_{(\Delta)} \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta = \iint_{(\Delta)} |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \quad (11)$$

这就是我們所想建立的公式。

积分号下的表示式

$$\left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta = |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta$$

通常称为曲线坐标下的面积元素。我們看見过, 例如, 在变到极坐标情形时雅可比式等于 r ; 因此在极坐标下面积元素为 $r dr d\theta$ 。

581 补充說明 1° 如将公式(10)中我們选取正負号的規則与这一符号必須与雅可比式符号一致的事实相比較, 則得一有趣的推論: 如雅可比式保持正号, 則閉路 (S) 及 (Σ) 的正向环行随变换公式而彼此对应; 而如雅可比式为負的, 則一个閉路上的正向与另一个閉路上的負向相对应。

显然, 这对于在区域 (D) 及 (Δ) 中的任何一对相互对应的簡單閉路 (L) 及 (Λ) 也是如此。所得結果容易用第579目中所举的例子来驗明。

2° 將中值定理[567(9)]应用到公式(11), 得关系式

$$D = |J(\bar{\xi}, \bar{\eta})| \cdot \Delta, \quad (12)$$

其中 $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ 是区域 (Δ) 中的某一点, 而 Δ 是这一区域的面积。

将这一公式来与拉格朗日公式

$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(\bar{\xi})(\beta - \alpha) \quad (\alpha < \bar{\xi} < \beta)$$

相比較。如 $x = f(\xi)$ 是单調函数, 則它使区間 $\alpha \leq \xi \leq \beta$ 相互一意地与区間 $f(\alpha) \leq x \leq f(\beta)$ (或 $f(\beta) \leq x \leq f(\alpha)$, 如 $f(x)$ 是减少函数) 相关联。以 s 及 d 表这两区間的长, 則拉格朗日公式就引导到与等式(12)相类

似的等式

$$d = |f'(\bar{\xi})| \cdot \delta. \quad (13)$$

如在公式(13)中将区间(δ)“收缩”成点 ξ , 则结果得关系式

$$|f'(\xi)| = \lim \frac{d}{\delta},$$

所以导数的绝对值好像是直线 ξ 当将它变换为直线 x 时(在所给点处)的延伸系数。

同样由公式(12)将区域(Δ)“收缩”成点 (ξ, η) , 得

$$|J(\xi, \eta)| = \lim \frac{D}{\Delta}, *$$

所以雅可比式的绝对值所起的作用是将 $\xi\eta$ 平面变为 xy 平面时(在所给点处)的延展系数。

这一说明指出了导数与雅可比式间的深刻的类似处(参看第六章)。

3° 公式(11)指出, 当面积 Δ 无限减少时, 其对应面积 D 也无限减少。由此就很容易证明, 在第 578 目中所研究的区域变换具有下一重要性质: 它将区域(Δ)中一面积为零的曲线(Δ)变换为区域(D)中某一面积亦为零的曲线(L)。逆变换具有类似的性质。

4° 公式(11)是在区域(D)及(Δ)相互一意对应的假定以及函数(1), (2)与它们的偏导函数连续的假定下导得的。然而在实际上往往会遇到这些假定在个别的一些点或沿个别的一些曲线上不成立的情况。

如这些点及曲线在两平面上可包含在任意小面积的区域(d)及(δ)中, 则将它们丢开后, 公式就成为可应用的了:

$$D - d = \iint_{(\Delta) - (\delta)} |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \quad (11^*)$$

* 其实我们是在点 (ξ, η) 处将积分(11)对区域微分[568]。

設雅可比式在区域 (Δ) 中有界:

$$|J(\xi, \eta)| \leq M,$$

則(11*)中的积分与(11)中的积分相差一量

$$\iint_{(\delta)} |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta \leq M\delta.$$

当 d 及 $\delta \rightarrow 0$ 时将(11*)变到极限, 又得公式(11)。

为了清楚解說起見, 我們回到第 579 目中的例 1) 及图 63 中所画的图形。对矩形 $(\Delta) = [0, R; 0, 2\pi]$ 及半徑为 R 中心在原点的圓(D), 这时具有形状

$$D = \iint_{(\Delta)} r dr d\theta$$

的公式(11)不能直接应用。但如除掉打了斜綫的部分 (其面积与 ρ 及 ϵ 同时趋近于零), 則这一公式就可应用到所得区域上; 再只要变到极限就行。

582 几何推演 公式(11)是被我們用虽然是简单的但却是不明

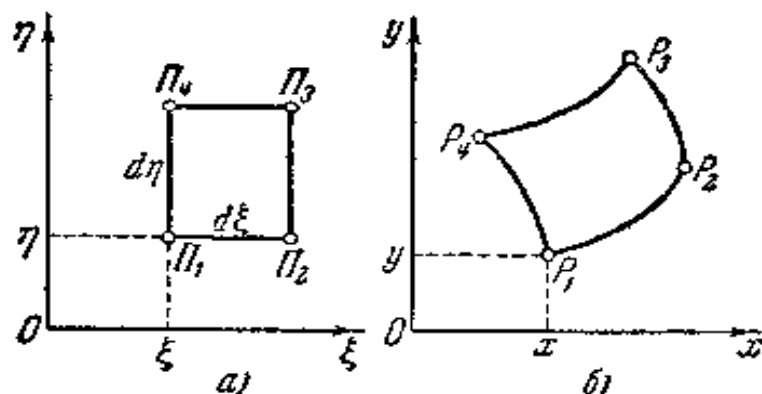


图 68

显的推理导得的。我們认为用另一方法来导出这一公式是很有用的, 虽然这一方法比較不简单也不十分严格, 但从几何方面看来是十分明显的。

重新考察由公式(1)給

出的 $\xi\eta$ 平面到 xy 平面的变换。在 $\xi\eta$ 平面中取出一个无穷小矩形 $\Pi_1\Pi_2\Pi_3\Pi_4$, 其边为 $d\xi$ 及 $d\eta$, 平行于 ξ 及 η 軸(图 68, a)。这一矩形在 xy 平面中的图像是曲四边 形 $P_1P_2P_3P_4$ (图 68, b), 我們来确定它的面积。

矩形的頂点有坐标

$$H_1(\xi, \eta), H_2(\xi + d\xi, \eta), H_3(\xi + d\xi, \eta + d\eta), H_4(\xi, \eta + d\eta);$$

在这种情况下曲四边形的对应顶点有这样的坐标:

$$\begin{aligned} P_1(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \\ P_2(x(\xi + d\xi, \eta), y(\xi + d\xi, \eta)), \\ P_3(x(\xi + d\xi, \eta + d\eta), y(\xi + d\xi, \eta + d\eta)), \\ P_4(x(\xi, \eta + d\eta), y(\xi, \eta + d\eta)). \end{aligned}$$

如限制在 $d\xi, d\eta$ 的一阶的项, 则近似地可以取点:

$$\begin{aligned} P_1(x, y), \quad P_2\left(x + \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi, y + \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi\right), \\ P_3\left(x + \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta, y + \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta\right), \\ P_4\left(x + \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta, y + \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta\right), \end{aligned}$$

其中 $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$, 且所有导数总是算作在点 (ξ, η) 处的。因为綫段 P_1P_2 及 P_3P_4 在两轴上的射影两两相等, 故这些綫段平行且相等, 所以(准确到高阶的无穷小)四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 是平行四边形。

它的面积等于三角形 $P_1P_2P_3$ 面积的两倍。由解析几何大家都知道, 顶点位于点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 处的三角形其面积的两倍等于行列式

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

的绝对值。将这一公式应用到我们的问题上来, 得所求面积(又是准确到高阶的无穷小)等于行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi & \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta \\ \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi & \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta \end{vmatrix} = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}d\xi d\eta$$

的绝对值。

这样,

$$\text{面积 } P_1P_2P_3P_4 \doteq \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta.$$

将 $\xi\eta$ 平面上的图形(Δ)用平行于坐标轴的直线分为许多无穷小矩形(将在边界处的“不规则”元素块忽略掉),同时我们将 xy 平面上的图形(D)分为前所考察形状的曲四边形。将所得的它们面积的表示式相加,又可得公式(11)。

因此,所引用的推理着重指出了重要的几何思想:公式(11)的实质是:要确定图形(D)的面积,不将它分为许多矩形,而用坐标线网将它分为许多曲边的元素块。

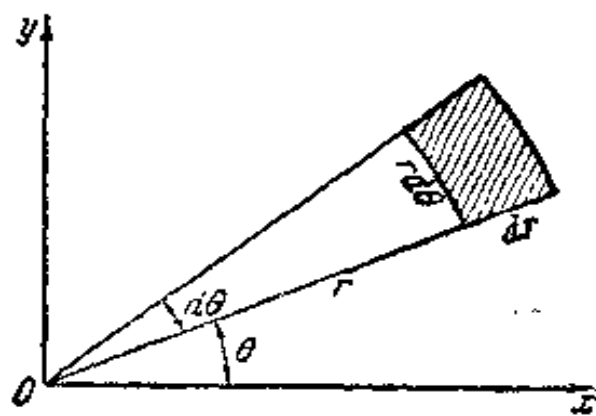


图 69

在一些简单情形下,这一思想差不多不用计算就可寻求得曲线坐标下“面积元素”的表示式。

例如,在变到极坐标情形时就可这样来推理。在 $r\theta$ 平面中边为 $dr, d\theta$ 的元素矩形在 xy 平面上就与一图形相对应,这一图形是由半径为 $r, r+dr$ 的两圆弧及由原点出发与 x 轴交于角 $\theta, \theta+d\theta$ 的二射线所围成的(图 69)。将这一图形近似地当作边为 dr 及 $r d\theta$ 的矩形,立刻可得所求面积元素的表示式 $r dr d\theta$ 。

583 例 1) 计算由下列曲线所围成各图形的面积:

(a) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ (双扭线),

(b) $(x^2 + y^2)^2 = 2ar^3$,

(B) $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$.

解 在所有情形下二项式 $x^2 + y^2$ 的出现促使我们想到变成极坐标,令

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

并用公式

$$D = \iint_{(A)} r dr d\theta \quad (14)$$

来计算所求面积。

(a) 双扭线的形状为我们所熟知(图 70)。曲线对坐标轴对称(这从曲线方程中也容易观察得到, 因为当将 x 改作 $-x$ 或 y 改作 $-y$ 时它的样子不变)。所以只要确定图形的包含在第一象限内部分(D)的面积再将它四倍就行了。

双扭线的极坐标方程为

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta,$$

且(如限制在第一象限)由于 $\cos 2\theta$ 必须是正的缘故, θ 只能从 0 变到 $\frac{\pi}{4}$ 。因此, $r\theta$ 平面上对应于(D)的区域(A)是由曲线

$$r = a\sqrt{2 \cos 2\theta}$$

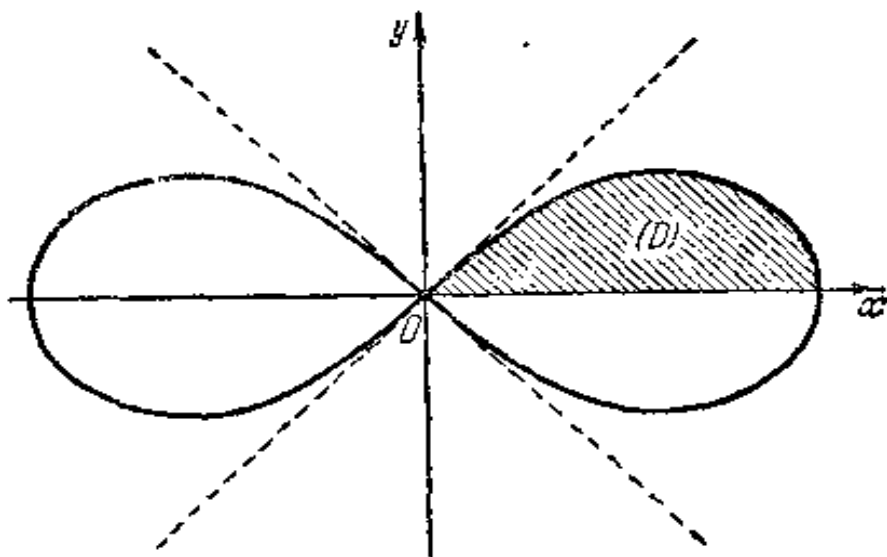


图 70

(双扭线的像)、 r 轴的一段(对应于 x 轴的一段)及 θ 轴自 $\theta=0$ 到 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 的一段(仅仅在原点一点——这里相互一意对应破坏了*)所围成的。

我们有

$$D = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{2 \cos 2\theta}} r dr = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = \frac{a^2}{2}.$$

所以整个所求面积为 $2a^2$ 。

(G) 最好事先对于曲线的形状有一大致的认识。曲线对 x 轴是对称的(将 y 换作 $-y$ 时方程不变), 位于 y 轴的右边(x 不可能是负的); 当 $r=0$ 及 $r=2a$ 时它与 x 轴相交。此外, 曲线是有界的: 由方程本身显然

* 关于这一结论, 参看第 581 目中的说明 4°。

$$x^4 \leq 2ax^3,$$

所以

$$x \leq 2a,$$

又因为 $y^4 \leq 2ax^3$, 故亦 $|y| \leq 2a$ 。曲线的草图画在图 71 中。

曲线的极坐标方程为: $r = 2a \cos^3 \theta$, 其中 θ 自 $-\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 。由对称性, 可以写出

$$D = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos^3 \theta} r dr = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta d\theta = \frac{5}{8} \pi a^2.$$

(a) 曲线对两轴皆对称。虽然原点 $x=y=0$ 形式上“属于”这曲线, 因为它满足方程, 但这一点是一孤立点; 事实上, 当 $x \gg y > 0$ 时由曲线方程易得

$$(2x^2)^3 \geq 2a^2 x^4, \text{ 于是 } x \geq \frac{a}{2},$$

所以在原点附近没有曲线的点。^{*} 对原点我们不予考虑。易见, 曲线是有界的: 当 $x \gg y$ 时, 显然, $x^6 \leq 2ax^4$, $x^2 \leq 2a^2$, 等等。曲线的大致形状画在图 72 中。

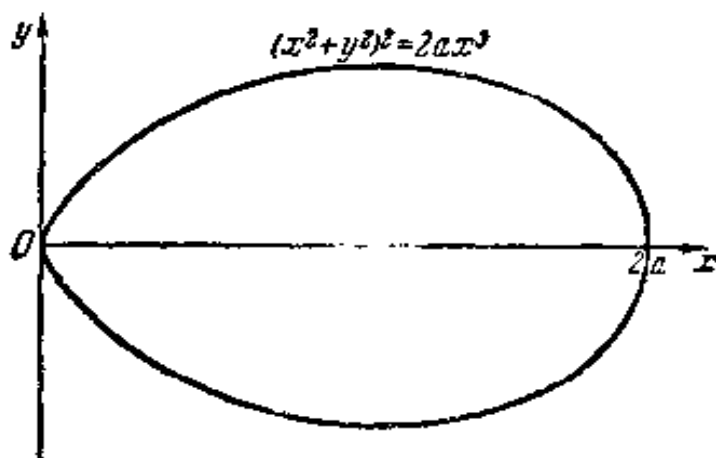


图 71

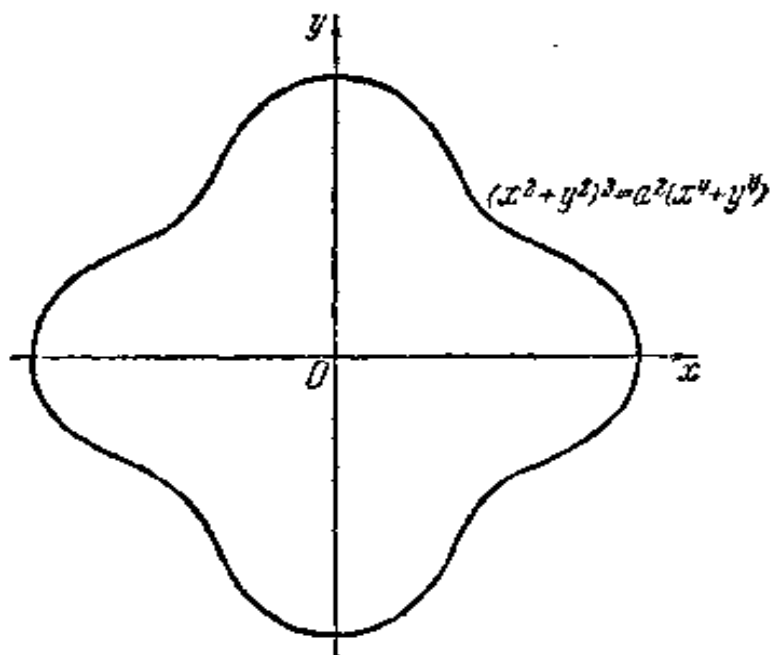


图 72

^{*} 这里, 当然, 用第 226 目的判定法也可以证明。

曲线的极坐标方程为: $r^2 = a^2(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$ 。注意对称性, 我们有

$$\begin{aligned} D &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}} r dr = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) d\theta = \\ &= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta = \frac{3}{4}\pi a^2. \end{aligned}$$

2) 求证: 直接从公式(14)可引导得在极坐标下计算扇形面积的熟知公式[329]:

$$D = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta,$$

其中 r 了解为曲线极坐标方程中所给的 θ 的函数。

1) 中所有问题都可直接由这一公式来解决。

3) 求由下列曲线所围图形的面积:

$$(a) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}, \quad (b) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = x^2 + y^2,$$

$$(B) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{c^2}, \quad (r) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2 y}{c^3}.$$

解 当曲线方程中有二项式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ 时, 建议引用“广义的”极坐标, 与笛卡儿坐标以公式

$$x = ar \cos \theta, \quad y = br \sin \theta$$

相关联。^{*} 这一变换的几何意义是将平面向两坐标方向压缩, 然后再经极坐标变换。

变换的雅可比式等于 abr 。

(a) 曲线有界, 对原点对称(因为当同时用 $-x$ 代 x 和 $-y$ 代 y , 方程样子不变); 两对称图一个在第一象限内另一个在第三象限内($xy \geq 0$); 原点是它与坐标轴相交的唯一一点。

在 $r\theta$ 平面中我们曲线的像的方程为

$$r^2 = \frac{ab}{c^2} \sin \theta \cos \theta. \quad **$$

^{*} 当应用这些坐标时, 我们遇到了与极坐标情形时一样的情形, 对应一意性不成立。参看 581, 4°。

^{**} 容易观察到, 曲线是一个好像压扁了的双扭线。

考虑到对称性, 我们有

$$D = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{\frac{ab}{c^2} \sin \theta \cos \theta}} ab r dr = \frac{a^2 b^2}{c^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{a^2 b^2}{2c^2}.$$

(6) 曲线有界, 对坐标轴对称; 原点是它的仅有的孤立点。我们有

$$\begin{aligned} D &= 4 ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} r dr = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) d\theta = \\ &= \frac{\pi}{2} ab(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

(B) 曲线有界, 对坐标轴对称; 原点是它与 y 轴唯一的交点, 但它与 x 轴还交于点 $x = \pm \frac{a^2}{c}$ 。对于在 y 轴右面的一圈, 我们有 $r = \frac{a}{c} \cos \theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 所以

$$D = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{a}{c} \cos \theta} r dr = \frac{2a^3 b}{c^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^3 b}{c^2}.$$

(r) 曲线有界, 对 y 轴对称, 在 x 轴的上面。原点是与坐标轴唯一的交点, 所以曲线是由第一及第二象限中的两个圈组成的。

在新坐标下曲线方程为:

$$r = \frac{a^2 b}{c^3} \cos^2 \theta \sin \theta.$$

$$\text{答 } D = \frac{\pi}{32} \frac{a^5 b^3}{c^6}.$$

4) 求下列曲线图的面积:

$$(a) (x+y)^4 = ax^2y, \quad (b) (x+y)^3 = axy, \quad (B) (x+y)^5 = ax^2y^2.$$

解 如只考察曲线含在第一象限内的部分(故 $x \geq 0$, $y \geq 0$), 则它们都是有界的, 这可以与 1) (6) 类似地证明。曲线均通过原点, 与坐标轴无其它交点。由此可见, 这些部分就是问题中所谈到的圈。

在以前各例中, 将曲线在笛卡儿坐标下的复杂方程转化为曲线坐标下的简单方程实质上是由于利用了恒等式 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 。二项式 $x+y$ 同样亦暗示了要利用这一恒等式的思想; 令(仅对 $x \geq 0$ 及 $y \geq 0$)

$$x = r \cos^2 \theta, \quad y = r \sin^2 \theta,$$

变换的雅可比式为:

$$J = \begin{vmatrix} \cos^2 \theta & -2r \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & 2r \sin \theta \cos \theta \end{vmatrix} = 2r \sin \theta \cos \theta. *$$

(a) 在新坐标下图的方程为

$$r = a \cos^4 \theta \sin^2 \theta.$$

因此

$$D = 2 \int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{a \cos^4 \theta \sin^2 \theta} r dr = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos^3 \theta \sin^3 \theta d\theta = \frac{a^2}{210}.$$

$$(6) \quad D = \frac{a^2}{60}, \quad (B) \quad D = \frac{a^2}{1260}.$$

5) 现在说明选取曲线坐标系的另一方法, 这在确定曲四边形面积时常常是有用的。如组成这一四边形对边的两对曲线, 每一对皆属于充满在平面中(且依赖于一个参数)的一曲线族, 则自然地这两族就取为坐标线的网。它们的参数通常也在所给情况下给出很方便的曲线坐标系。

举一例来说明这一方法。设要去求出由抛物线

$$\begin{aligned} y^2 &= px, \quad y^2 = qx, \\ x^2 &= ay, \quad x^2 = by \end{aligned}$$

所围成图形的面积, 其中 $0 < p < q$ 及 $0 < a < b$ (图 73)。

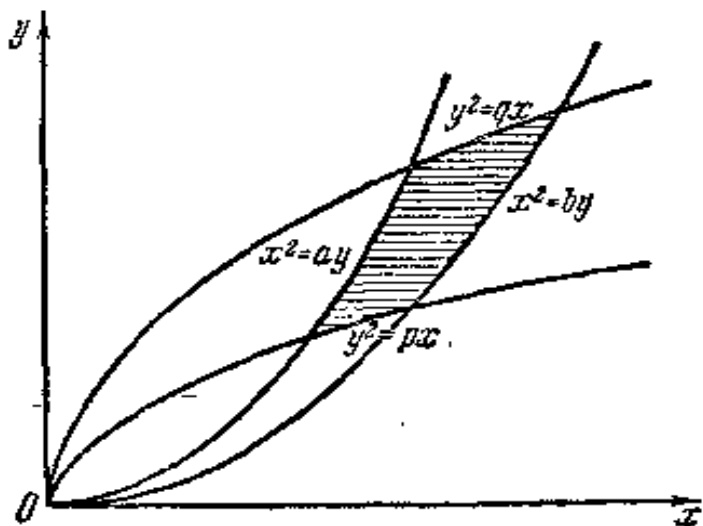


图 73

这里很方便的是考察两抛物线族:

$$y^2 = \xi x \quad (p \leq \xi \leq q) \quad \text{及} \quad x^2 = \eta y \quad (a \leq \eta \leq b),$$

每一族都填满了我们的图形, 且由它们就组成了坐标线的网。这就相当于, 把它们的参数 ξ 及 η 取作曲线坐标。这全部由第 579 目, 4) 我们已经都知道; 由所写出的方程我们有: $x = \sqrt[3]{\xi \eta^2}$ 及 $y = \sqrt[3]{\xi^2 \eta}$, 所以雅可比式

$$J = -\frac{1}{3}.$$

由此立得

* 这里, 581, 4° 中所述又获得了应用。

$$D = \frac{1}{3}(q-p)(b-a).$$

6) 用同样的方法确定由下列各曲线所围成四边形的面积:

(a) 双曲线 $xy=p$, $xy=q$ 及直线 $y=ax$, $y=bx$;

(b) 双曲线 $xy=p$, $xy=q$ 及抛物线 $y^2=ax$, $y^2=bx$;

(c) 抛物线 $x^2=py$, $x^2=qy$ 及直线 $y=ax$, $y=bx$;

(r) 直线 $x+y=p$, $x+y=q$ 及 $y=ax$, $y=bx$.

在所有情形下都假定 $0 < p < q$ 及 $0 < a < b$.

(a) 解 坐标线网为:

$$xy=\xi \quad (p \leq \xi \leq q), \quad y=\eta x \quad (a \leq \eta \leq b).$$

于是

$$x = \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}, \quad y = \sqrt{\xi\eta}$$

及

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{\xi\eta}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{\eta^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{\eta}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2\eta}.$$

最后,

$$D = \frac{1}{2} \int_p^q d\xi \int_a^b \frac{d\eta}{\eta} = \frac{1}{2}(q-p) \log \frac{b}{a}.$$

(b) 提示 令 $xy=\xi$, $y^2=\eta x$ ($p \leq \xi \leq q$, $a \leq \eta \leq b$); 雅可比式 $J = \frac{1}{3\eta}$.

答 $D = \frac{1}{3}(q-p) \log \frac{b}{a}.$

(c) 答 $D = \frac{1}{6}(q^2-p^2)(b^3-a^3).$

(r) 答 $D = \frac{1}{2} \frac{(b-a)(q^2-p^2)}{(1+a)(1+b)}.$

7) 求星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 的面积.

解 星形线的参数方程为:

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

如这里以 r 换 a ($0 \leq r \leq a$), 则得一相似星形线族充满了我们的图形:

$$x = r \cos^3 t, \quad y = r \sin^3 t.$$

当 t 固定时, 显然, 这些方程给出自原点出发的一些射线段. 利用这些公式当作变换公式,

显然, 这里实质上是用的与前二题同样的思想. 雅可比式

$$J = 3r \sin^2 t \cos^2 t.$$

最后,

$$D = 6a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3}{8} \pi a^2.$$

8) 考察由公式

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \sqrt{uv} \quad (u \geq 0, v \geq 0)$$

确定的变换。显然, 恒有 $x \geq y \geq 0$, 故点 (x, y) 总在 x 轴的正向与第一象限的平分线 $y=x$ 间所夹的角域内。反过来, 在这角内的每一点 (x, y) 一般与两对非负值 u, v 相对应, 它们为二次方程

$$z^2 - 2xz + y^2 = 0$$

的根。如永远限制在 $u \geq v$, 即点 (u, v) 也取在 uv 平面上同样角域内, 则可得到对应的一意性; 因此

$$u = x + \sqrt{x^2 - y^2}, \quad v = x - \sqrt{x^2 - y^2}.$$

容易计算出变换的雅可比式:

$$J = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{u}{v}} - \sqrt{\frac{v}{u}} \right).$$

这里坐标线有奇怪的特性。当 $u = \text{const.}$ 时得:

$$y^2 = u(2x - u) = 2u \left(x - \frac{u}{2} \right),$$

同样当 $v = \text{const.}$ 时有

$$y^2 = v(2x - v) = 2v \left(x - \frac{v}{2} \right).$$

因此, 在两种情况下我们得同一(1)抛物线族

$$y^2 = 2p \left(x - \frac{p}{2} \right),$$

其轴与 x 轴相重合, 而准线与 y 轴相重合。每一这样的抛物线与直线 $y=x$ 在点 (p, p) 处相切。

这种似是而非的说法可简单解答如下: 当 $u=p$ 且 v 自 0 变到 p 时, 这一抛物线自它的顶点到所述切点的一部分描画出来了, 而当 $v=p$ 且 u 自 p 变到 $+\infty$ 时, 抛物线延伸到无穷远的其余部分描画出来了(图 74)。

如在 xy 平面上取一由 x 轴及二抛物线

$$y^2 = 2p \left(x - \frac{p}{2} \right), \quad y^2 = 2q \left(x - \frac{q}{2} \right) \quad (0 < p < q)$$

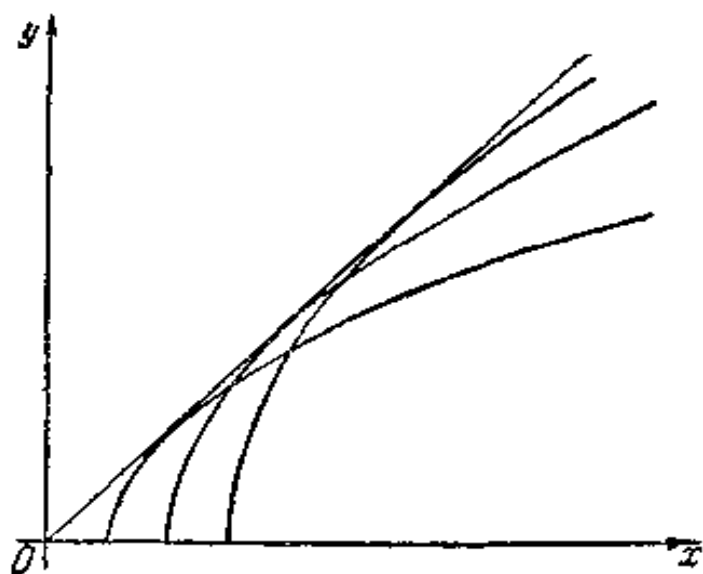


图 74

所围成的图形(D_1), 则在 uv 平面上它将与矩形(Δ_1)= $[p, q; 0, p]$ 相对应, 且直线段 $u=p$ 及 $v=p$ 将与第一个抛物线上在切点处相接的两弧相对应。同样, (在 xy 平面上)由三个抛物线, 即除所述两个外还有一抛物线

$$y^2 = 2r\left(x - \frac{r}{2}\right) \quad (r > q),$$

所围成的图形(D_2)将与 uv 平面上的矩形(Δ_2)= $[q, r; p, q]$ 相对应, 又直线段 $u=q$ 及 $v=q$ 与同一抛物线的两弧相对应。

用所述变换, 例如, 现在就很容易来求图形(D_2)的面积。我们有

$$\begin{aligned} D_2 &= \frac{1}{4} \int_p^q \int_q^r \left(\sqrt{\frac{u}{v}} - \sqrt{\frac{v}{u}} \right) du dv = \\ &= \frac{1}{3} [(\sqrt{q} - \sqrt{p})(\sqrt{r^3} - \sqrt{q^3}) - (\sqrt{r} - \sqrt{q})(\sqrt{q^3} - \sqrt{p^3})] = \\ &= \frac{1}{3} (\sqrt{q} - \sqrt{p})(\sqrt{r} - \sqrt{q})(\sqrt{r} - \sqrt{p})(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}). \end{aligned}$$

同样可以试求 D_1 , 但在这一情形下我们就遇到了广义的二重积分, 这时积分号下的函数沿 u 轴的一线段变成 ∞ 。以后将要谈到这种类似的积分[参看 592, 8]。

9) 要变换(1)能使彼此互变的二图形(Δ)及(D)的面积永远相等, 显然, 条件

$$\left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| = 1$$

是必要且充分的。

我们的任务是: 寻求能保持面积不变的平面变换的一般形状。

此时我们可以在前面的条件中去掉绝对值符号而将它写成

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = 1 \quad (15)$$

的形状, 因为在必要时将 ξ 及 η 的地位交换一下, 总可把结果化为这种样子。

此外, 为简单起见我们将假定, 在雅可比式中出现的四个偏导数之一, 例如, $\frac{\partial y}{\partial \eta}$, 在整个所考察的区域中异于零。则可将方程(1)的第二个对 η 解出来, 并将所得式子代入(1)的第一个方程中后, 可将所考察的变换表如下形:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= f(\xi, y), \\ x &= x(\xi, f(\xi, y)) = g(\xi, y). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

我們將從事于求出函数 f 及 g 的特征。即, 我們將证明, 条件(15)相当于

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial \xi}. \quad (17)$$

首先, 由隱函数的微分法則, 得

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0. \quad (18)$$

再, 将 g 当作复合函数, 微分, 得

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \xi}.$$

由此并从(18)的第二个等式消去 $\frac{\partial f}{\partial \xi}$:

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}.$$

最后, 两端减去(18)的第一等式, 得恒等式

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} \left(\frac{\partial g}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} - 1,$$

这就证明了我們的断言。

由第 535 目的定理 2, 現在可以看見, 函数 f 及 g 能使变换(16)保持面积不变者其一般形状可由公式

$$f(\xi, y) = \frac{\partial U(\xi, y)}{\partial \xi}, \quad g(\xi, y) = \frac{\partial U(\xi, y)}{\partial y}$$

給出来, 其中 U 是任意函数。

584 二重积分中的变数更換 考察一二重积分

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy, \quad (19)$$

其中 (D) 是由一个分段光滑的閉路 (S) 所圍成的, 而函数 $f(x, y)$ 在这一区域上連續或至多沿有限个分段光滑的曲綫上不連續 (这时要保持有界)。

現在假定, 区域 (D) 用公式(1):

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

与 $\xi\eta$ 平面上某一区域 (Δ) 相关联, 保持在第 580 目中我們推演用曲綫坐标表示图形 (D) 的面积公式 (11) 时所有的条件.* 我們的目的是: 在积分 (19) 中更换变数, 使它表作展布在区域 (Δ) 上的积分的形状。

为此我們就用某一个分段光滑的曲綫网将区域 (Δ) 分为許多部分 (Δ_i) ($i=1, 2, \dots, n$), 則区域 (D) 被对应的 (也是分段光滑的) 曲綫分为許多部分 (D_i) (图 75, a, b)。在每一部分 (D_i) 中任取一点 (x_i, y_i) , 最后, 作关于积分 (19) 的积分和:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) D_i,$$

它当区域 (D_i) 的最大直径趋近于零时以这一积分为其极限。

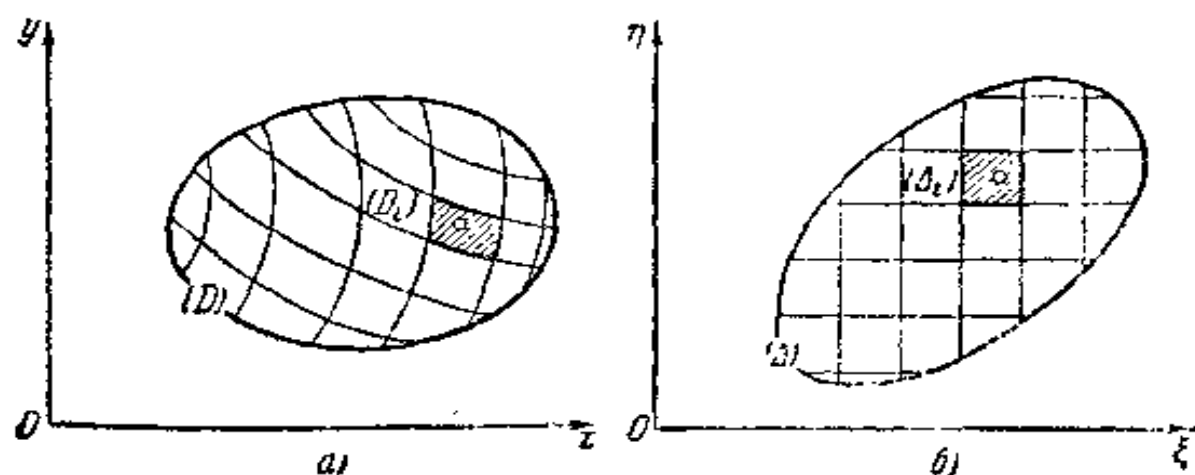


图 75

将第 581 目中的公式 (12) 应用到每一部分 (D_i) 上, 我們将有

$$D_i = |J(\xi_i^*, \eta_i^*)| \cdot \Delta_i \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

其中 (ξ_i^*, η_i^*) 是区域 (Δ_i) 的某一定点。在和 σ 中将每一 D_i 用这式子来代替, 得

$$\sigma = \sum_i f(x_i, y_i) |J(\xi_i^*, \eta_i^*)| \Delta_i.$$

点 (ξ_i^*, η_i^*) 須由中值定理得来, 不能任意选取, 而点 (x_i, y_i) 却是在

* 因此, 我們同样假定二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}$ 存在且連續。參看第 193 頁上底注。

区域(D_i)中完全任意地取出来的。利用这一任意性,我們可令

$$x_i = x(\xi_i^*, \eta_i^*), y_i = y(\xi_i^*, \eta_i^*),$$

亦即,取区域(D_i)中与区域(Δ_i)中的点(ξ_i^*, η_i^*)相对应者作为点(x_i, y_i)。因此和 σ 有下形

$$\sigma = \sum_i f(x(\xi_i^*, \eta_i^*), y(\xi_i^*, \eta_i^*)) |J(\xi_i^*, \eta_i^*)| \Delta_i$$

在这一形状之下它显然是积分

$$\iint_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta \quad (20)$$

的积分和。这一积分的存在可由下面推得: 积分号下的函数或者是連續的, 或者(同时保持有界性)仅沿有限个分段光滑的曲綫不連續, 这些曲綫是函数 $f(x, y)$ 的不連續处所成的曲綫在 $\xi\eta$ 平面上的图象。

如現在命所有区域(Δ_i)的直徑趋近于零, 則由函数(1)的連續性, 所有区域(D_i)的直徑也同样将趋近于零。因此, 和 σ 必須既趋近于积分(19)又趋近于积分(20), 因为它同时是这两积分的积分和。因此,

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \iint_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \quad (21)$$

这一公式就解决了所提出的問題——二重积分中变数更換的問題。公式(11)显然是它当 $f(x, y) \equiv 1$ 时的特殊情形。

这样, 为了要实行二重积分(19)中变数的更換, 不仅应当在函数 f 中将 x 及 y 換为它們的表示式(1), 而且應該將面积元素 $dx dy$ 換作它在曲綫坐标下的表示式。

用与第 581 目, 4° 中所引用的同样的討論, 这里也容易证明, 在許多情况下, 当加在变换(1)上的条件在一些个别的点或沿一些个别的曲綫被破坏时, 公式(21)依然成立。

585 与单积分的相似处, 在定向区域上的积分 二重积分中变数更換的公式非常类似于通常定积分中变数更換的公式:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x(\xi)) x'(\xi) d\xi. \quad (22)$$

但在公式(22)中沒有絕對值符号，这多少破坏了类似性。这一差异将简单地加以解釋。通常定积分是沿定向区間而取的[290]：与 α 可以小于或大于 β 一样， a 也可小于或大于 b 。而到现在为止我們所考察的二重积分仅仅是取在非定向区域上的。

不过，在二重积分的情形下，我們也可轉而討論定向区域。定向区域的产生是由于給它的边界以一确定的环行方向——正的或負的[523]；同时对在区域内的所有简单閉曲綫附加了这样的方向。如果取的是正的环行方向，則就說区域被正的定向了，在相反情形下，就說它被負的定向了。

如区域正的定向，很自然的，对定向区域(D)同意取它的带正号的通常面积作为它的面积；在相反的情形下如区域負的定向，就取带負号的。当区域(D)分为許多部分(D_i)时，如前所述，这些部分就按照整个区域的定向来定向；对应地它們的面积也冠以符号。

現在，对定向区域(D)可按第 563 目的样子建立二重积分

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy$$

的概念；并且如区域有正的定向时，这一积分就与以前所确定的相一致，在負定向的情况下就与它相差一符号。

这一二重积分的新观点首先可使第 580 目中在曲綫坐标下表示面积的公式(11)对雅可比式不用絕對值符号改写如下：

$$D = \iint_{(\Delta)} \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} d\xi d\eta = \iint_{(\Delta)} J(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

只要区域(D)及(Δ)的定向是按規定而做的。这直接可由 581, 1° 的說明推得。

在同样的规定下第 581 目中公式 (12) 也可不用绝对值符号写出来:

$$D = J(\xi, \eta) \cdot \Delta,$$

而在这种形式下它就是拉格朗日公式的一自然推广。

最后, 一般公式 (21) 对按规定定向的区域 (D) 及 (Δ) 现在可重写为下形:

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \iint_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) J(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

因此, 要使单积分与二重积分的类似处变得完全, 只要将它们加以一致的规定!

不过, 在以后的叙述中我们恒回到普通的观点, 只考察展布在非定向区域上的二重积分。

586 例 因为在二重积分中变数的更换常常是以简化积分区域为目的, 所以在第 583 目中关于这所作的全部说明这里又得到了应用。与此同时, 简化积分号下的式子也是变换的一自然目的。

1) 如区域是一圆 (中心在原点) 或它的一扇形, 则变成极坐标较为便利。作为例子, 重新来解第 572 目的问题: 1); 17) (a); 18) (6)。

对第二题我们有

$$\begin{aligned} V &= \iint_{(D)} xy \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \cos \theta \sin \theta \, dr \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \cdot \int_0^R r^3 \, dr = \frac{R^4}{8}. \end{aligned}$$

如同时积分号下式子含 $x^2 + y^2$ 时, 则更有理由希望应用极坐标来化简。

2) 求一球 (半径为 R) 被一直圆柱 (半径 $r < R$) 所割下部分的体积, 圆柱的轴通过球心。

解 取球心为坐标原点, 圆柱轴为 z 轴, 我们将有

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^r \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho \, d\rho \, d\theta = \\ &= \frac{4\pi}{3} [R^3 - (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}]. \end{aligned}$$

3) 求旋轉抛物面 $az = x^2 + y^2$ 与平面 $z = a$ 所围立体的体积。

答 $V = \frac{\pi a^3}{2}.$

4) 求半径为 R 中心角为 2α 的扇形的重心位置。

解 取中心角的平分线为极轴(也即 x 轴)后, 我們将有

$$M_y = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^R r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta = \frac{2}{3} R^3 \sin \alpha.$$

如将这一式子除以扇形面积 $P = R^2 \alpha$, 则求得重心的横坐标 ξ 为:

$$\xi = \frac{2}{3} R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

因为由对称性, 重心在平分线上, 故它的位置确定了。

5) 求一圆(半径为 R)的质量, 在每一点处它的密度等于自圆的边界到这点的距离。

答 $m = \frac{\pi}{3} R^3.$

我們还举一些利用极坐标较便利的例子。

6) 求“維維安尼立体”[572, 20)]的体积。

解 我們已經有过

$$V = 4 \iint_{(P)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy,$$

其中 (P) 是 xy 平面中第一象限内以球半径 R 为直径所作的半圆(图 48)。在积分号下的函数中出现有式子 $x^2 + y^2$ 就暗示引用极坐标。

(P) 的边界即半圆周其极坐标方程为 $r = R \cos \theta$, θ 自 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 。因此,

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r \, dr = \frac{4}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) \, d\theta = \\ &= \frac{4}{3} R^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

可以看見, 这里的計算确乎特別簡化了。*

7) 試求双扭綫

* 下面的可能性並沒有除掉: 簡化积分号下的式子会使积分的区域变复杂, 以致最后考虑起来变到极坐标并不便利。

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

一瓣的(a)重心的位置与(b)极惯性矩。

解 (a) 曲线的极坐标方程为:

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta \left(-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right).$$

因此我们有

$$\begin{aligned} M_y &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} a^3 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta \cdot \cos^{\frac{3}{2}} 2\theta \, d\theta = \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} \cos \theta \, d\theta. \end{aligned}$$

再令 $\sqrt{2} \sin \theta = \sin \omega$:

$$M_y = \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \omega \, d\omega = \frac{\pi}{4} a^3.$$

因为一瓣的面积 $P = a^2 [330, 12)]$, 故 $\xi = \frac{\pi a}{4}$, 因而就确定了重心的位置。

(b) 我们有

$$I_0 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r^3 \, dr \, d\theta = \frac{\pi a^4}{4}.$$

8) 求心臟线 $r = a(1 + \cos \theta)$ (所围面积) 对于极的极惯性矩。

答 $I_0 = \frac{35}{16} \pi a^4$.

9) 确定“維維安尼立体”重心的位置[参看 6)]。

解 由对称性可见, 重心在 x 轴上。算出它的静矩:

$$\begin{aligned} M_{yz} &= 4 \iint_{(P)} xz \, dx \, dy = 4 \iint_{(P)} x \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, dr \, d\theta = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta \int_0^{R \cos \theta} \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r^2 \, dr, \end{aligned}$$

里面的积分

$$\begin{aligned} \int_0^{R \cos \theta} \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r^2 dr &= \frac{r}{8} (2r^2 - R^2) \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{R^4}{8} \arcsin \frac{r}{R} \Big|_{r=0}^{r=R \cos \theta} = \\ &= \frac{R^4}{8} \left[\cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta + \frac{\pi}{2} - \theta \right]. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \frac{R^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(2 \cos^4 \theta - \cos^2 \theta) \sin \theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \cos \theta \right] d\theta = \\ &= \frac{R^4}{2} \left[-\frac{2}{5} \cos^5 \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \sin \theta - \cos \theta \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{15} R^4. \end{aligned}$$

于是, 最后,

$$\xi = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{12}{5(3\pi - 4)} R.$$

10) 求由椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

平面 $z=0$ 及下列曲面之一所围立体的体积:

(a) 平面 $z = \lambda x + \mu y + h$ ($h > 0$),

(b) 椭圆抛物面 $\frac{2z}{c} = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}$ ($c > 0$),

(B) 双曲抛物面 $cz = xy$ ($c > 0$).

解 问题可变成计算展布在 xy 平面中椭圆上的积分, 与此相关, 令

$$x = ar \cos \theta, \quad y = br \sin \theta$$

变到广义极坐标较为合适; 此时变换的雅可比式 $J = abr$.

例如, 对情形(b)我们将得

$$\begin{aligned} V &= \frac{c}{2} \iint_{(D)} \left(\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} \right) dx dy = 2abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \left(\frac{a^2 \cos^2 \theta}{p^2} + \frac{b^2 \sin^2 \theta}{q^2} \right) r^3 dr d\theta = \\ &= \frac{\pi}{8} abc \left(\frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{q^2} \right). \end{aligned}$$

同样对其它情形可求得

$$(a) V = \pi abh, \quad (b) V = \frac{\alpha^2 b^2}{2c}.$$

11) 試求橢球体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的体积。

提示 引用广义极坐标。

答 $\frac{4}{3}\pi abc.$

12) 計算积分

$$I = \iint_{(D)} xy \, dx \, dy,$$

它展布在曲綫

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2 y}{c^3}$$

第一象限內的圈上[參看 583, 3)(r)]。

提示同。答 $\frac{1}{840} \frac{\alpha^{13} b^6}{c^{12}}.$

13) 計算积分:

$$(a) I_1 = \iint_{(A)} \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \, dx \, dy, \quad (b) I_2 = \iint_{(A)} x^n y^n \, dx \, dy$$

(n 为自然数), 其中 (A) 是由坐标軸及拋物綫 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ 所范围的区域。

解 曲綫的参数方程为: $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$). 很自然的, 考察一(对原点)位似的拋物綫族: $x = \rho \cos^4 t$, $y = \rho \sin^4 t$ ($0 \leq \rho \leq 1$). 引进 ρ 及 t 作为新变数, 我們將有 $J = 4\rho \cos^3 t \sin^3 t$, 所以

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt{\rho} \cdot 4\rho \cos^3 t \sin^3 t \, d\rho \, dt = \frac{2}{15},$$

$$I_2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^{2n+1} \cos^{4n+3} t \sin^{4n+3} t \, d\rho \, dt =$$

$$= \frac{2}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{4n+3} t \sin^{4n+3} t \, dt = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{[(4n+2)!!]^2}{(8n+6)!!}.$$

* 在情形(B)下, 立体由四个对称部分组成, 其中两个位于 xy 平面的上面, 两个在下面。

最后一表示式可变为下形

$$\frac{(2n+1)!}{(n+1)(2n+2)(2n+3)\cdots(4n+3)}.$$

特别, 当 $n=1$ 时由此可得第 572 目问题 3) 的解答。

14) 计算积分

$$K = \iint_{(B)} \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^3 dx dy,$$

其中 (B) 是由坐标轴及抛物线

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$$

所范围的区域。

提示 令 $x = a\rho \cos^4 t$, $y = b\rho \sin^4 t$ ($0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$).

答 $K = \frac{2}{21}ab.$

15) 求积分

$$L = \iint_{(D)} \frac{x^2 \sin xy}{y} dx dy,$$

其中 (D) 是由四个抛物线 $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$ ($0 < a < b$, $0 < p < q$) 所范围的区域。

解 引用在 579, 4) 中所述的变数更换[参看 583, 5)], 变换积分成

$$L = \int_a^b \int_p^q \eta \sin \xi \eta d\xi d\eta$$

的样子。现在经简易的计算就能给出:

$$L = \frac{\sin pb - \sin pa}{p} - \frac{\sin qb - \sin qa}{q}.$$

同样可以猜到在下列情形下合适的曲线坐标系:

16) 求积分

$$I = \iint_{(A)} xy dx dy,$$

如 (A) 是由下列曲线所围的四边形:

$$(a) \quad y = ar^3, \quad y = br^3, \quad y^2 = pr, \quad y^2 = qr;$$

$$(b) \quad y^3 = ax^2, \quad y^3 = bx^2, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x.$$

提示 引进新坐标 ξ, η , 令

$$(a) \quad y = \xi x^3, \quad y^2 = \eta x;$$

$$(b) \quad y^3 = \xi x^2, \quad y = \eta x.$$

答 (a) $I = \frac{5}{48} (a^{-\frac{6}{5}} - b^{-\frac{6}{5}}) (q^{\frac{8}{5}} - p^{\frac{8}{5}});$

$$(b) \quad I = \frac{1}{40} (b^4 - a^4) (\alpha^{-10} - \beta^{-10}).$$

17) 設 (D) 是由不等式 $x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1$ 所确定的三角形, 假定 $p \geq 1, q \geq 1$, 試直接证明立烏維里公式[572, 16)]*

$$\iint_{(D)} \varphi(x+y) x^{p-1} y^{q-1} dx dy = B(p, q) \int_0^1 \varphi(u) u^{p+q-1} du,$$

其中 $\varphi(u)$ 是区間 $[0, 1]$ 上的連續函数。

证 令

$$x = u(1-v), \quad y = uv$$

或

$$u = x+y, \quad v = \frac{y}{x+y}.$$

用这些公式就建立起 xy 平面上的三角形 (D) 与 uv 平面上的正方形 $(\Delta) = [0, 1; 0, 1]$ 間的一个相互一意的对应。[点 $x=0, y=0$ 是一仅有的例外, 它对应于 v 軸的一段。] 此处

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = u.$$

更換变数, 得出二重积分等于

$$\int_0^1 \int_0^1 \varphi(u) u^{p+q-1} v^{q-1} (1-v)^{p-1} du dv$$

或

$$\int_0^1 v^{q-1} (1-v)^{p-1} dv \cdot \int_0^1 \varphi(u) u^{p+q-1} du.$$

因为第一因子恰恰就是 $B(q, p) = B(p, q)$, 故所需結果就被证明了。

18) 用同样的变数更換可证明一更一般的公式:

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} \varphi(x+y) \frac{x^{p-1} y^{q-1}}{(\alpha x + \beta y + \gamma)^{p+q}} dx dy &= \\ &= B(p, q) \int_0^1 \frac{\varphi(u) u^{p+q-1} du}{(\alpha u + \gamma)^p (\beta u + \gamma)^q} \end{aligned}$$

* 以前它是由第里希萊公式導得的, 它是这里的特殊情形(当 $\varphi \equiv 1$ 时)。

(其中 $p, q \geq 1$; $\alpha, \beta \geq 0$, $\gamma > 0$; $\varphi(u)$ 連續)。这里应利用已知的結果: 495, 2)。

19) 如应用替换

$$\alpha = \frac{1-x-y}{1-y}, \quad \beta = 1-y,$$

且若 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 1$, 則公式

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x} f(\alpha\beta)(1-\alpha)^{p-1} \beta^p (1-\beta)^{q-1} d\alpha d\beta &= \\ &= B(p, q) \int_0^1 f(v)(1-v)^{p+q-1} dv \end{aligned}$$

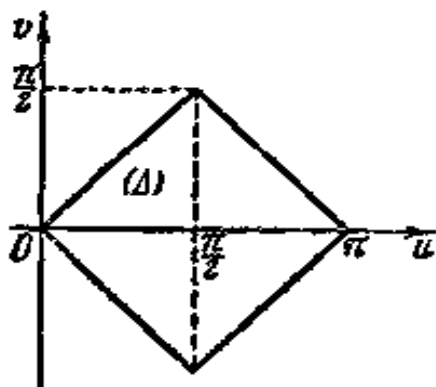


图 76

就化成立烏維里公式。雅可比式 $J = \frac{1}{1-y}^*$

20) 用变数更换求证恒等式(对任何的 $z = \text{const.}$)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z \sin \varphi \sin \theta) d\varphi d\theta = \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \sin \lambda) d\lambda \right\}^2$$

[参看 570, 7)]。

证 在二重积分中按公式

$$\varphi = \frac{u+v}{2}, \quad \theta = \frac{u-v}{2}$$

更换变数可将它导致下形

$$\frac{1}{2} \iint_{(\Delta)} [\cos(z \cos u) \cos(z \cos v) + \sin(z \cos u) \sin(z \cos v)] du dv,$$

其中 (Δ) 是一斜放着的正方形, 如图 76 所示。但第二项积分等于零 (替换 $u = \pi - u'$), 而展布在正方形 (Δ) 上的第一项积分直接可变成取在正方形 $\left[0, \frac{\pi}{2}; 0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上类似的积分的两倍。由此就容易得出所需結果。

§ 5 广义二重积分

587 展布在无界区域上的积分 二重积分概念可推广到无界区域即延伸到无穷的区域的情形, 或推广到无界函数的情形, 这与第十三章中对单积分所做的一样。

* 并且, 点 $x=0, y=1$ 这里需加限制。

首先我們来討論无界区域 $(P)^*$ 的情形。这种区域的例子有整个平面、在某一圓或其它有界平面图形外面的部分、任何一角域等等。对于这种区域的边界，假定其每一有界部分有面积 0（例如，由一些分段光滑曲綫所組成）。設在区域 (P) 中已給某一函数 $f(x, y)$ ，假定它在正常意义下在区域 (P) 的每一有界可求面积部分上可积。

引用一輔助曲綫 (K') （面积亦为 0），自区域 (P) 割下它的一有界通連部分 (P') ，由假設在它上面积分

$$\iint_{(P')} f(x, y) dx dy \quad (1)$$

存在。現在將曲綫 (K') 及其上所有的点移到无穷远去，使自原点到这曲綫上的点的最小距离 R 增大到无穷。則被它所割下的变动区域 (P') 就逐漸籠罩住区域 (P) 的所有点： (P) 的每一点对适当大的 R 将屬於 (P') 。

如积分 (1) 当 $R \rightarrow \infty$ 时存在一确定的有限极限，則称它为在无界区域 (P) 上函数 $f(x, y)$ 的 (广义) 积分，并表作

$$\iint_{(P)} f(x, y) dx dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{(P')} f(x, y) dx dy. \quad (2)$$

在函数 $f(x, y)$ 为正时，只要当考察任一变远到无穷的固定曲綫序列

$$(K_1), (K_2), \dots, (K_n), \dots$$

及被它們所割下的区域序列

$$(P_1), (P_2), \dots, (P_n), \dots,$$

假定有限的界

$$I = \sup_n \left\{ \iint_{(P_n)} f(x, y) dx dy \right\}$$

存在，就已能推出积分 (2) 的存在。

事实上，不論被曲綫 (K') 自 (P) 所分出的部分 (P') 如何，当 n 相当

* 我們恒假定这一区域为通連的。

大时这一区域将整个含在 (P_n) 内, 所以

$$\iint_{(P')} f(x, y) dx dy \leq \iint_{(P_n)} f(x, y) dx dy,$$

$$\text{因此更加} \quad \iint_{(P')} f(x, y) dx dy \leq I. \quad (3)$$

另一方面, 对已给 $\varepsilon > 0$ 可求得一 n_0 , 使

$$\iint_{(P_{n_0})} f(x, y) dx dy > I - \varepsilon.$$

对相当大的 R , *区域 (P') 又可包括 (P_{n_0}) , 因此更有

$$\iint_{(P')} f(x, y) dx dy > I - \varepsilon. \quad (4)$$

等式(3)及(4)合起来就证明了数 I 适合二重积分的定义。

由这一观察容易证明与第 440 目中定理相似的积分比较定理。其次, 如保留对函数 $f(x, y)$ 以前的假定, 则由展布在无界区域 (P) 上 $|f(x, y)|$ 的积分的存在就可以推得函数 $f(x, y)$ 的同样积分存在。

为了要证明这, 我们来考察两非负函数:

$$f_+(x, y) = \frac{|f(x, y)| + f(x, y)}{2}, \quad f_-(x, y) = \frac{|f(x, y)| - f(x, y)}{2};$$

显然,

$$f_+(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{如 } f(x, y) \geq 0, \\ 0, & \text{在相反情形下,} \end{cases}$$

$$f_-(x, y) = \begin{cases} -f(x, y), & \text{如 } f(x, y) \leq 0, \\ 0, & \text{在相反情形下.} \end{cases}$$

由函数 $|f(x, y)|$ 的可积性推得出函数

$$f_+(x, y) \leq |f(x, y)| \text{ 及 } f_-(x, y) \leq |f(x, y)|$$

因而函数

* 我們一直是將原点到曲綫 (K') 的点的最小距离記作 R 。

$$f(x, y) = f_+(x, y) - f_-(x, y)$$

积分的存在。

反过来的事实很值得注意：由展布在无界区域(P)上函数 $f(x, y)$ 积分的存在能推得 $|f(x, y)|$ 的积分也存在。这一命题就与简单广义积分的理论不相像了：我們知道[439]，在那里可以有非绝对收敛的积分。

我們将在下一目中來給出证明。

588 广义二重积分的绝对收敛性定理 每一收敛积分

$$\iint_{(P)} f(x, y) dx dy \quad (5)$$

必然也绝对收敛，即与它同时积分

$$\iint_{(P)} |f(x, y)| dx dy \quad (6)$$

也收敛。

設不是如此。取一区域序列 $\{(P_n)\}$ ，使越往后时它們逐漸能籠罩整个区域(P)，而我們将有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{(P_n)} |f(x, y)| dx dy = +\infty.$$

不失一般性我們可以設，对每一值 n ，不等式

$$\iint_{(P_{n+1})} |f(x, y)| dx dy > 3 \iint_{(P_n)} |f(x, y)| dx dy + 2n$$

适合。这是办得到的，只要(在必要时)割裂序列 $\{(P_n)\}$ ，即从它里面去掉一个部分序列再重新将它記数就可以了。

以 (p_n) 表区域 (P_{n+1}) 及 (P_n) 的差，显然我們有

$$\iint_{(p_n)} |f(x, y)| dx dy > 2 \iint_{(P_n)} |f(x, y)| dx dy + 2n.$$

但

$$|f(x, y)| = f_+(x, y) + f_-(x, y),$$

所以

$$\iint_{(P_n)} |f(x, y)| dx dy = \iint_{(P_n)} f_+(x, y) dx dy + \iint_{(P_n)} f_-(x, y) dx dy.$$

設右端两积分中例如第一个是大的一个, 則

$$\iint_{(P_n)} f_+(x, y) dx dy > \iint_{(P_n)} |f(x, y)| dx dy + n.$$

將左端的二重积分代以与它相当近似的达布下和, 不等式依然成立:

$$\sum_i m_n^{(i)} p_n^{(i)} > \iint_{(P_n)} |f(x, y)| dx dy + n. *$$

在这一和中可只留下与 $m_n^{(i)} > 0$ 相对应的項; 以 $(\tilde{p}_n)$ 表对应元素 $(p_n^{(i)})$ 的集合, 我們更可得

$$\begin{aligned} \iint_{(\tilde{P}_n)} f(x, y) dx dy &= \\ &= \iint_{(\tilde{P}_n)} f_+(x, y) dx dy > \iint_{(P_n)} |f(x, y)| dx dy + n. \end{aligned}$$

以 $(\tilde{P}_n)$ 表由 (P_n) 及 $(\tilde{p}_n)$ 組成的区域, 因为

$$\iint_{(P_n)} f(x, y) dx dy \geq - \iint_{(P_n)} |f(x, y)| dx dy,$$

故将这一不等式与前一不等式两端相加时便得

$$\iint_{(\tilde{P}_n)} f(x, y) dx dy > n.$$

区域 $(\tilde{p}_n)$ 同时 $(\tilde{P}_n)$ 可以稍为变一下使从后者可得出一个通連区域 (P'_n) , 且其面积与 $(\tilde{P}_n)$ 相差如此地小使不等式

* 这里 $(p_n^{(i)})$ 是区域 (p_n) 分割成的元素部分, 而 $m_n^{(i)}$ 是函数 $f_+(x, y)$ 的对应下确界。

$$\iint_{(P'_n)} f(x, y) dx dy > n$$

还保持成立。这很容易做到，只要将区域的孤立部分用一些狭的“走廊”其总面积任意小者联结起来就行了。

由此已经清楚，积分(5)不可能存在，与假设相违；这一矛盾就证明了定理。

注意，所引推理的最后部分涉及了一维及二维情形间的主要区别。由一些分离的区间组成的不通连线性区域就不能用一任意小的变形变成通连的（即变成一整个的区间）。

所证定理以及前目中的一些注意点，将任意函数的广义积分的存在与计算问题化为正（非负）函数的同一问题。以下我们将主要地从事于后一问题。

589 化二重积分为逐次积分 开始我们假定函数 $f(x, y)$ 为非负的。如这函数给出在一任何形状的无界区域中，则补充地令它在这一区域的外面等于零时，恒可化为无界矩形区域的情形。譬如说，设我们谈到在一个方向无穷的矩形 $[a, b; c, +\infty]$ (a, b, c 是有限数且 $b > a$)。我们将假定在每一有限矩形 $[a, b; c, d]$ (对任何的 $d > c$) 上，二重积分及对 y 的单积分在正常的意义下皆存在，所以[569]公式

$$\iint_{[a, b; c, d]} f dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f dy \quad (7)$$

成立。

要想建立对无穷矩形即 $d = +\infty$ 的情形的类似公式，假定逐次积分

$$I = \int_a^b dx \int_c^\infty f dy$$

存在。因为对任何的 $d > c$ 我们有

$$\iint_{[a, b; c, d]} f \, dx \, dy \leq I,$$

則按 587 中所述由此就得出二重积分

$$\iint_{[a, b; c, +\infty]} f \, dx \, dy = \lim_{d \rightarrow +\infty} \iint_{[a, b; c, d]} f \, dx \, dy \quad (8)$$

存在, 它显然不会超过 I 。剩下来只要证明事实上二重积分等于 I 。

如积分 $\int_c^\infty f \, dy$ 是 x 在正常意义下可积分的函数, 因此被某一常数 L

所限制住, 則更有

$$\int_c^d f(x, y) \, dy \leq L.$$

在这种情形下由第 488 目定理 II,

$$I = \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_a^b dx \int_c^d f \, dy.$$

将这与(7)及(8)相比較, 便得所需結果。

如积分 I 作为广义的存在时, 它依然成立。例如, 設 b 是 x 的函数 $\int_c^\infty f \, dy$ 的唯一奇点。則由已证的, 对 $0 < \eta < b - a$,

$$\iint_{[a, b-\eta; c, +\infty]} f \, dx \, dy = \int_a^{b-\eta} dx \int_c^{+\infty} f \, dy, \quad (9)$$

等式的两端当 $\eta \rightarrow 0$ 时趋近于 I 。注意到

$$I \geq \iint_{[a, b; c, +\infty]} f \, dx \, dy \geq \iint_{[a, b-\eta; c, +\infty]} f \, dx \, dy$$

时, 又可作出矩形 $[a, b; c, +\infty]$ 上二重积分及逐次积分的等的結論。

我們注意, 如无穷逐次积分有无穷大值, 則由前面兩关系式可看出, 二重积分的值也是如此。

这样, 与(7)相似我們有

$$\iint_{[a, b; c, +\infty]} f \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_c^{+\infty} f \, dy, \quad (10)$$

且由右端逐次积分的存在就推得二重积分的存在。甚至在右端的积分等于 $+\infty$ 的情形下等式仍成立。

最后, 我們考察在两个互相垂直方向延伸到无穷的矩形 $[a, +\infty; c, +\infty]$ 。这里我們也将假定在每一有限矩形 $[a, b; c, d]$ (对任何的 $b > a$ 及任何的 $d > c$) 上二重积分及对 y 的单积分在正常的意义下皆存在。

对所考察的情况同样可建立公式

$$\iint_{[a, +\infty; c, +\infty]} f \, dx \, dy = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f \, dy, \quad (11)$$

其中假定右端的逐次积分存在。与上面我們自(9)得到(10)时相像, 当 $b \rightarrow +\infty$ 变到极限时这可由(10)很容易得来。这里也是如此, 如逐次积分的值等于 $+\infty$, 則二重积分也是这样。

現在对函数 $f(x, y)$ 变号的情形談几句, 为明确起見我們限于討論公式(10)。在有限矩形 $[a, b; c, d]$ (对 $d > c$) 中我們保留前面的假定, 但与函数本身的逐次积分

$$\int_a^b dx \int_c^{+\infty} f(x, y) \, dy$$

存在的同时这一次我們又設它的绝对值的逐次积分

$$\int_a^b dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)| \, dy$$

存在。

因此对第 587 目末所提到的函数 $f_+(x, y)$ 及 $f_-(x, y)$ 同样的逐次积分也将存在。分别应用已证的公式(10)到这两非负函数上并将结果相减, 我們就能证明这一公式对已知函数 $f(x, y)$ 的正确性。

590 无界函数的积分 設函数 $f(x, y)$ 已給在有界区域 (P) 上, 但它本身在个别的点 $M_1, M_2, \dots$ 的邻域中为无界的; 在区域 (P) 的任何不包含这些点的部分中假定函数在正常的意义下可积。

現在用曲綫 $(k_1), (k_2), \dots$ 将奇点 $M_1, M_2, \dots$ 圍起来后把它們割离下来。如从区域 (P) 拿掉由这些曲綫所圍的这些奇点的邻域, 則得一区域 (P') , 由假設, 对于它积分

$$\iint_{(P')} f(x, y) dx dy \quad (1^*)$$

存在。将曲綫 $(k_1), (k_2), \dots$ 在所述各点处“收縮”使这些閉路 (k) 的点到对应点 M 的最大距离——以 ρ 表之——趋近于零。^{*}我們可以看到此时所考察的各邻域的面积(小于 $\pi\rho^2$)亦将趋近于零。

无界函数 $f(x, y)$ 对区域 (P) 的(广义)积分定义为当 $\rho \rightarrow 0$ 时积分 (1^*) 的极限:

$$\iint_{(P)} f(x, y) dx dy = \lim_{\rho \rightarrow 0} \iint_{(P')} f(x, y) dx dy. \quad (2^*)$$

奇点亦可能形成某些奇綫, 我們將永远假定其面积为 0。在这种情况下就必須将这些綫用向它們“收縮”的邻域圍起来, 这时原則上没有什么新的东西。

然而, 这里所被了解的极限过程其确切特征还需要加以若干說明。設奇綫 (l) 被一边界为 (k) 的邻域所圍。如在 (k) 上取一点 A , 則自 (l) 上各不同点 B 到这一点的距离中有一最小者 ρ_A 存在; 另一方面, 如变动

^{*} 不用此而假設所有被閉路 (k) 所包区域的直徑趋近于零, 也可以得到同样結果。

(k) 上 A 的位置, 则所有的 ρ_A 中必定有一最大者 ρ 。这一数在某种意义上就说明了闭路(k) 离曲线(L) 远近的程度, 而极限过程是以条件 $\rho \rightarrow 0$ 为准绳的。(当有若干个曲线存在时, ρ 应了解为同样数中的最大者。) 这里同样可以证明, 与 ρ 同时, 所考察的邻域的面积也趋近于零。

最后, 广义积分定义很容易推广到无界区域及在其中定义的函数在有限距离处可有一些奇点的情形。

附注 如在建立广义积分时, 除奇点(或奇线)外, 我们又分离出若干事实上不是奇异的点(或线)来, 则积分中出现的极限, 无论它的存在或大小都不会有任何影响。实际上, 例如, 设在奇点外另加上一非奇点 A , 并且, 超过广义积分确切意义的需要, 我们还分离出这一点 A 的一邻域。但在 A 近傍函数是有界的, 对所述邻域上的积分与其面积同时趋近于 0。

在第 587—589 目中所叙述的都可移到上所列举的广义积分的一切情形。

首先, 下一著名定理此处亦成立: 广义二重积分如果收敛, 则必然也绝对收敛。证明可如第 588 目中一样作出来。

至于谈到化二重积分为逐次积分的问题, 则这里同样只要讨论(有限)矩形 $[a, b; c, d]$ 是区域(P)的情形就够了。可以证明, 对非负函数 $f(x, y)$, 在逐次积分存在的假定下(二重积分的存在由此已能推出), 公式(7)成立。

然而, 这时应该还要确定一下函数奇点*的假定的分布。开始设它们在一水平直线上(例如, $y=d$), 或更一般地, 在一可用形如

$$y=y(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

的显方程表出的曲线上。对于这种情形其证明与第 589 目中当 $d = +\infty$ 时的相像。于是我们转到另一情形: 奇点在某一垂直直线上(例如,

* 在任一无奇点的部分矩形中, 形如(7)的公式假定正确。

$x=b$), 与上面当 $b=+\infty$ 时相像地进行推理。如所討論的函数变号, 則必須还要假定 $|f(x, y)|$ 的逐次积分存在。

推广到几个曲綫或直綫的情形或推广到无穷矩形而奇点在有限距离內的情形都很明显。

591 广义积分中的变换更换 設在 xy 及 $\xi\eta$ 平面中分別有二有界区域 (D) 及 (Δ) , 它們以变换公式

$$\begin{cases} x=x(\xi, \eta), \\ y=y(\xi, \eta) \end{cases} \quad (12)$$

或其逆变换

$$\begin{cases} \xi=\xi(x, y), \\ \eta=\eta(x, y) \end{cases} \quad (12^*)$$

相联系, 并保有在第 578 目中所詳細限制的全部条件。

又設在区域 (D) 中給出一函数 $f(x, y)$, 除去有限个个别的点甚或綫*它在那里变成无穷外, 到处連續。

我們求证, 在这些条件下, 等式

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \iint_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta \quad (13)$$

成立, 只要这两积分之一存在; 另一个的存在就能推得出来。

事实上, 如将第一个积分在区域 (D) 中的奇点及奇綫用它們的邻域分开来, 則第二个积分的奇点及奇綫就被在区域 (Δ) 中的对应的邻域分开来了。設这样得到 xy 平面上的一区域 (D') 及 $\xi\eta$ 平面上的一区域 (Δ') 。因此由第 584 目公式(21),

$$\iint_{(D')} f(x, y) dx dy = \iint_{(\Delta')} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \quad (14)$$

由于区域 (D) 及 (Δ) 間对应关系的連續性, 并且为两方面連續的,**容

* 在本目中所談到的一切曲綫都假定为分段光滑的。

** 我們指函数(12)及(12*)的連續性。

易看見, 当“收縮” xy 平面上的邻域到被它們所圍的点或綫时, 对在 $\xi\eta$ 平面上的邻域同样的过程也将发生, 反过来也是如此。由此可見, 将前面的关系式变到极限时, 由一个积分的存在我們事实上就能断定另一个的存在, 且同时也能断定等式(13)成立。

甚至还可設在区域 (Δ) 的一些个别的点处或沿它里面的一些个别的綫(与前面所討論的在这一区域上的奇綫不相交)上雅可比式 $J(\xi, \eta)$ 成为无穷, 因此同时第二个积分的积分号下函数也成为无穷。虽然在 xy 平面上的对应点及綫对第一个积分來說不是奇异的, 但將它們分离出来, 按前目的附注, 并不产生什么困难, 所以在新的假設下上面的結論依然有效。

还要注意, 在所考察的情况下常常会遇到在一些个别点处或沿一些个别的綫上关系式的連續性或相互一意性被破坏了。在这种情形下第 581 目 4° 的討論可以应用[参照第 584 目之末]。

最后, 我們轉到至少区域 (D) , (Δ) 之一为无界的情形。

如这两区域都延伸到无穷且它們的位于有限距离的点以关系式(12)或(12*)相关联, 則用(对应的)曲綫分离出这两区域的有界部分 (D') 及 (Δ') 后, 当上面所述条件保留时我們將有等式(14)。因为所提到的这些曲綫显然只在同时才可能移到无穷远处, 故要得到(13), 只須在(14)中变到极限, 且又由积分之一的存在得出另一个的存在。

現設, 例如, 区域 (D) 延伸到无穷而区域 (Δ) 不延伸到无穷, 且区域 (D) 的点与区域 (Δ) 的所有点, 除一个别的点(或曲綫)对应于区域 (D) 的边界的无穷远部分者外, 相互对应。用曲綫將区域 (D) 的有界部分分离出来后, 我們用在区域 (Δ) 中的对应曲綫就拣出了上述的点(或曲綫), 同时就得区域 (D') 及 (Δ') , 对它們前述推理已可应用了, 再这样下去。

注意, 变数的更換与变成逐次积分同时是确立广义二重积分存在性的非常方便的工具。关于这一点, 讀者在下一目中可見到許多例題。

592 例 1) 确立下面积分存在的条件 ($m > 0$):

$$(a) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^m}, \quad (b) \iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^m},$$

$$(B) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{(1-x^2-y^2)^m}.$$

解 在极坐标下这些积分化为下形:

$$(a) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r dr}{r^{2m}} = 2\pi \int_0^1 \frac{dr}{r^{2m-1}} \quad (b) 2\pi \int_1^\infty \frac{dr}{r^{2m-1}} \quad (B) 2\pi \int_0^1 \frac{r dr}{(1-r^2)^m}.$$

显然, 存在条件是:

$$(a) m < 1, \quad (b) m > 1, \quad (B) m < 1.$$

2) 对下面各积分解同样的问题 ($\alpha, \beta, m > 0$):

$$(a) \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x^\alpha + y^\beta \leq 1}} \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^m}, \quad (b) \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x^\alpha + y^\beta \geq 1}} \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^m},$$

$$(B) \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x^\alpha + y^\beta \leq 1}} \frac{dx dy}{(1 - x^\alpha - y^\beta)^m}.$$

提示 采用替换

$$x = r^{\frac{2}{\alpha}} \cos^{\frac{2}{\alpha}} \theta, \quad y = r^{\frac{2}{\beta}} \sin^{\frac{2}{\beta}} \theta.$$

$$\text{答} \quad (a) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} > m, \quad (b) \frac{1}{-\alpha} + \frac{1}{-\beta} < m, \quad (B) m < 1.$$

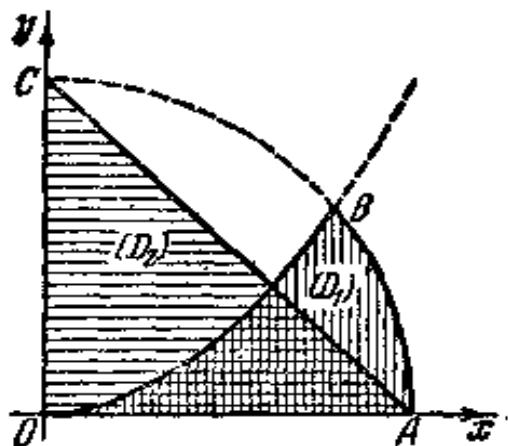


图 77

当在问题 1), 2) 中变量的变化被限制在射线 $\theta = \theta_0$ 及 $\theta = \theta_1$ 间的扇形内时, 可得同样的答案。

3) 如变数 x, y 变化的区域 (D_1) 是由 x 轴的线段 AO , 抛物线 $y = x^2$ 的弧 OB 及圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 的弧 BA 所围成的曲线三角形 AOB (图 77) 时, 则与前面一样以原点为奇点的积分

$$\iint_{(D_1)} \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$$

一样也存在 (虽然对圆并不存在^{*})。事实上, 当变到

极坐标时, 积分就变成*

* 以 δ 表射线 OB 与极轴的交角。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}}^1 \frac{dr}{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} d\theta,$$

由此就推得所述的。

4) 同样, 取三角形 AOC (同一图) 作为区域 (D_2) 后, 可以证明 以点 A 及 C 为奇点的积分

$$\iint_{(D_2)} \frac{dr dy}{1-x^2-y^2}$$

亦存在。

因为在极坐标下, 直线 AC 的方程为 $r = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}$, 故上述积分就可化为下形:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} \frac{r dr}{1-r^2} = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\sin 2\theta}{1 + \sin 2\theta} d\theta = - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\sin \varphi}{1 + \sin \varphi} d\varphi,$$

它显然存在。

5) 在对照 1) 中所考察的积分后, 可得下一收敛判定法:

如 (D) 是: (a) 包含原点的一有界区域, 或 (b) 不包含原点而延伸到无穷远的区域, 则函数 $f(x, y)$ 在 (D) 上的积分存在, 只要 $f(x, y)$ 在 (D) 中可表作下形:

$$f(x, y) = \frac{\varphi(r, y)}{(x^2 + y^2)^m},$$

其中 φ 是有界的, 且在分别的情况下, (a) $m < 1$ 或 (b) $m > 1$ 。

很容易将这一判定法变到原点换作任何一点 (x_0, y_0) 的情形。

6) 验证展布在下列图形上的函数

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

的二重积分存在与否: (a) 三角形 OBC (图 78), (b) 正方形 $OABC$, (c) 无穷的长带 $YCBE$, (d) 无穷三角形 EBG , (e) 无穷正方形 EBF' 。

答 在情形 (a), (c) 下积分不存在 (在情形 (b), (d) 下更是如此); 在情形 (e) 下积分存在, 它等于 $\frac{\pi}{4}$ 。

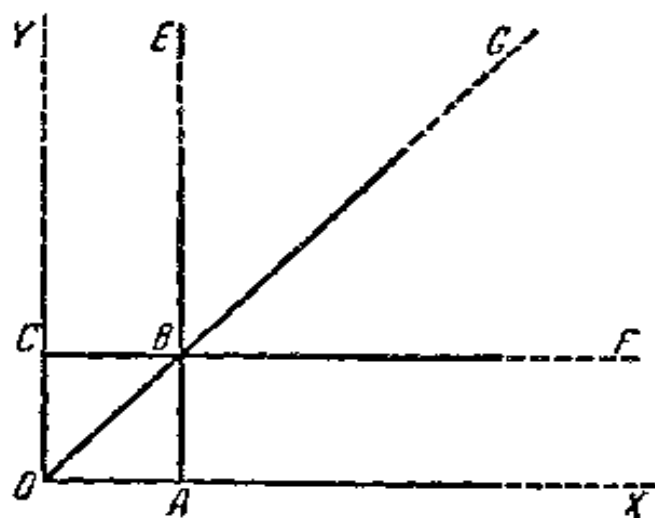


图 78

7) 設函数 $f(x)$ 及 $g(y)$ 绝对可积——第一个在区间 $[a, b]$ 上, 而第二个在区间 $[c, d]$ 上 (每一区间都可为有限的或无穷的)。求证: 二重积分

$$\iint_{[a, b; c, d]} f(x)g(y) dx dy = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_c^d g(y) dy$$

亦存在[参照 570, 9)]。

問題很容易化为非負函数的情形, 我們就限于这一假定。

例如, 如两区间都是有限的且 b 及 d 分别为唯一的奇点, 則如我們所已知道的, 常义二重积分 (δ 及 $\epsilon > 0$)

$$\iint_{[a, b-\delta; c, d-\epsilon]} f(x)g(y) dx dy = \int_a^{b-\delta} f(x) dx \cdot \int_c^{d-\epsilon} g(y) dy$$

存在, 再只要令 $\delta \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$ 时变到极限。

除二积分

$$\int_a^b |f(x)| dx, \int_c^d |g(y)| dy$$

之一等于零的情况外, 对函数 f 及 g 的所述条件也对二重积分的存在是必要的条件。

8) 求由抛物綫 $y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right)$ 及 $y^2 = 2q\left(x - \frac{q}{2}\right)$ 与 x 軸間所围的图形 (D_1) 的面积 [参看 583, 8)]。

解 引用在該处用过的曲綫坐标, 我們就有:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{4} \int_0^p \int_0^q \left(\sqrt{\frac{u}{v}} - \sqrt{\frac{v}{u}} \right) du dv = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \int_0^p \frac{dv}{\sqrt{v}} \cdot \int_0^q \sqrt{u} du - \int_0^p \sqrt{v} dv \cdot \int_0^q \frac{du}{\sqrt{u}} \right\} = \frac{4}{3} (q-p) \sqrt{pq}. \end{aligned}$$

面积的计算导致 广义积分 (奇綫是 u 軸的一段)。因为变数的更換也可放到广义积分的情形上去, 所采用计算的合理性毋庸置疑。

9) 計算积分 ($0 < c < a$)

$$R = \int_0^1 \int_0^c \sqrt{a^2 - x^2 - (c^2 - x^2)y^2} \sqrt{c^2 - x^2} dx dy.$$

应用替换

$$x = \frac{v}{\sqrt{1+u^2}}, \quad y = \frac{uv}{\sqrt{c^2(1+u^2) - v^2}},$$

其中 (u, v) 变动于无穷矩形 $[0, +\infty; 0, c]$ 中; 雅可比式等于 $-\frac{v}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{c^2(1+u^2)-v^2}}$.

我們有:

$$\begin{aligned} R &= \int_0^c \int_0^\infty \frac{v\sqrt{a^2-v^2}}{1+u^2} du dv = \int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} \cdot \int_0^c v\sqrt{a^2-v^2} dv = \\ &= \frac{\pi}{6} \left[a^3 - (a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}} \right]. \end{aligned}$$

这里将显示出常义积分化成更易计算的广义积分的便利。

10) 二重积分

$$P = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy$$

存在, 因为逐次积分

$$P = \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dy = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \left\{ \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right\}^2$$

存在。

如将它变为极坐标, 则就易于计算; 此时 xy 平面上的第一象限就变成 $r\theta$ 平面上的由直线 $\theta=0$, $r=0$ 及 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围的长带。因此,

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4}.$$

所以

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

这一简洁的计算方法是属于普安松的。

11) 如在这同一积分 P 中按公式

$$x = \frac{\lambda\mu}{c}, \quad y = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}}{c}, \quad x^2 + y^2 = \lambda^2 + \mu^2 - c^2,$$

$$\frac{D(x, y)}{D(\lambda, \mu)} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}}$$

变为椭圆坐标[579, 5)], 則得

$$P = \int_0^\infty \int_0^c \frac{e^{-(\lambda^2 + \mu^2 - c^2)}}{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}} d\mu d\lambda = \frac{\pi}{4}$$

或

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2} \lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - c^2}} \cdot \int_0^c \frac{e^{-\mu^2} d\mu}{\sqrt{c^2 - \mu^2}} - \int_c^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2} d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - c^2}} \cdot \int_0^c \frac{e^{-\mu^2} \mu^2 d\mu}{\sqrt{c^2 - \mu^2}} = \frac{\pi}{4} e^{-c^2}.$$

如取 $c=1$ 并作替换 $\lambda = \sqrt{v+1}$, $\mu = \sqrt{v}$ 则得一奇特的关系式:

$$\int_0^{\infty} e^{-v} \sqrt{\frac{1+v}{v}} dv \cdot \int_0^1 \frac{e^{-v} dv}{\sqrt{v(1-v)}} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-v} dv}{\sqrt{v(1+v)}} \cdot \int_0^1 e^{-v} \sqrt{\frac{v}{1-v}} dv = \pi.$$

12) 借广义极坐标

$$x = ar \cos \theta, \quad y = br \sin \theta \quad (0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

之助易于求出二重积分的值

$$J = \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1}} \frac{dx dy}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = \frac{\pi}{2} ab.$$

如变到刚才所谈过的椭圆坐标(取 $c^2 = a^2 - b^2$, 故所给椭圆对应于 $\lambda = a$), 则对此积分得

$$J = ab \int_0^c \int_a^c \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\sqrt{(a^2 - \lambda^2)(a^2 - \mu^2)(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}} d\lambda d\mu.$$

因此,

$$\int_0^c \int_a^c \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\sqrt{(a^2 - \lambda^2)(a^2 - \mu^2)(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}} d\lambda d\mu = \frac{\pi}{2}.$$

在这里令 $a=1$, $c=k < 1$, $k' = \sqrt{1-k^2}$, 最后, $\lambda = \sqrt{1-k'^2 \sin^2 \psi}$, $\mu = k \sin \varphi$ ($0 \leq \varphi, \psi \leq \frac{\pi}{2}$), 我们将这一积分化为下式积分:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-k'^2 \sin^2 \psi) + (1-k^2 \sin^2 \varphi) - 1}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \varphi)(1-k'^2 \sin^2 \psi)}} d\varphi d\psi = \frac{\pi}{2}.$$

这又可表作下形

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k'^2 \sin^2 \psi} d\psi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \psi}} \times \\ & \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \psi}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

讀者此处看到了为我們已經所遇見过的勒戎德关系式〔参看 473, 11) 及 495, 10)〕。

13) 試引导在第一种与第二种尤拉积分間属于雅可比的熟知关系式来。

因为(当 $\alpha > 0$ 及 $b > 0$)

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha-1} dy, \quad \Gamma(b) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{b-1} dx,$$

故显然,

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(b) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x-y} x^{b-1} y^{\alpha-1} dx dy,$$

在这里令

$$x = u(1-v), \quad y = uv,$$

故 xy 平面上的第一象限与 uv 平面上由直綫 $v=0$, $u=0$, $v=1$ 所圍的长带相对应。变换的雅可比式等于 u 。所以

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) \Gamma(b) &= \int_0^1 \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha+b-1} \cdot v^{\alpha-1} (1-v)^{b-1} du dv = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha+b-1} du \cdot \int_0^1 v^{\alpha-1} (1-v)^{b-1} dv = \Gamma(\alpha+b) B(\alpha, b), \end{aligned}$$

这就是所要证明的。

14) 以前我們导出过許多公式, 现在这些公式的应用范围可加以推广。例如, 对第里希萊公式

$$\iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} x^{p-1} y^{q-1} dx dy = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}$$

[572, 12)] 及更一般的立烏維里公式

$$\iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} \varphi(x+y) x^{p-1} y^{q-1} dx dy = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \int_0^1 \varphi(u) u^{p+q-1} du$$

[586, 17)] 都可如此, 它們对任何 p 及 $q > 0$ 都成立。证明依然一样。

还可以更进一步: 到現在为止在立烏維里公式中我們假定函数 $\varphi(u)$ 当 u 自 0 变至 1 时是連續的, 現在可允許它在这一区間中于一个或几个点处变为无穷, 只要右端的积分绝对收敛 (否則左端的积分根本不收敛)。

最后, 在立烏維里公式中可将二重积分展布到由不等式

$$x \geq 0, y \geq 0, x+y \geq 1$$

所定义的无穷区域上去,只須将右端的积分自 1 取到 $+\infty$ (仍假定它绝对收敛)。

在整个证明中不需有任何实质上的改变。

15) 如在第里希莱及立烏維里公式中将 p 及 q 換作 $\frac{p}{\alpha}$ 及 $\frac{q}{\beta}$, 再实行替换 $x = \left(\frac{\xi}{a}\right)^\alpha$
 $y = \left(\frac{\eta}{b}\right)^\beta$, 則这些公式就得更一般的形状:

$$\iint_{\left(\frac{\xi}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{\eta}{b}\right)^\beta \leq 1, \xi, \eta \geq 0} \xi^{p-1} \eta^{q-1} d\xi d\eta = \frac{a^p b^q}{\alpha \beta} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + 1\right)}.$$

$$\iint_{\left(\frac{\xi}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{\eta}{b}\right)^\beta \leq 1, \xi, \eta \geq 0} \varphi\left(\left(\frac{\xi}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{\eta}{b}\right)^\beta\right) \xi^{p-1} \eta^{q-1} d\xi d\eta =$$

$$= \frac{a^p b^q}{\alpha \beta} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta}\right)} \int_0^1 \varphi(u) u^{\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} - 1} du,$$

$$\iint_{\left(\frac{\xi}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{\eta}{b}\right)^\beta \geq 1, \xi, \eta \geq 0} \varphi\left(\left(\frac{\xi}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{\eta}{b}\right)^\beta\right) \xi^{p-1} \eta^{q-1} d\xi d\eta =$$

$$= \frac{a^p b^q}{\alpha \beta} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta}\right)} \int_1^\infty \varphi(u) u^{\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} - 1} du. *$$

作为例题,試确定下列积分的存在条件并計算之($m > 0$):

$$(a) \quad \iint_{\substack{x, y \geq 0 \\ x^\alpha + y^\beta \leq 1}} \frac{x^{p-1} y^{q-1}}{(x^\alpha + y^\beta)^m} dx dy,$$

$$(b) \quad \iint_{\substack{x, y \geq 0 \\ x^\alpha + y^\beta \geq 1}} \frac{x^{p-1} y^{q-1}}{(x^\alpha + y^\beta)^m} dx dy,$$

* 所有的常数 $a, b, \alpha, \beta, p, q$ 此处都假定为正的。

$$(B) \iint_{\substack{x, y \geq 0 \\ x^\alpha + y^\beta \leq 1}} \frac{x^{p-1} y^{q-1}}{(1-x^\alpha - y^\beta)^m} dx dy.$$

答 (a) $\frac{B\left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\beta}\right)}{\alpha\beta\left(\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} - m\right)}$ (在条件 $\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} > m$ 下),

(b) $\frac{B\left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\beta}\right)}{\alpha\beta\left(m - \frac{p}{\alpha} - \frac{q}{\beta}\right)}$ (在条件 $\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} < m$ 下),

(B) $\frac{1}{\alpha\beta} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right) \Gamma(1-m)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + 1 - m\right)}$ (在条件 $m < 1$ 下)。

[参照问题 1)]。

16) 第 572 日, 15) 中所推演的喀塔朗公式:

$$\iint_{n \leq g(x, y) \leq M} f(x, y) \varphi[g(x, y)] dx dy = \int_n^M \varphi(u) d\psi(u),$$

其中

$$\psi(u) = \iint_{n \leq g(x, y) \leq u} f(x, y) dx dy.$$

在引入广义积分时可推广到 $M = +\infty$ 的情形, 只须在此处了解 $\int_n^{+\infty}$ 为 $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_n^M$ 。

17) 求积分

$$L = \iint_{(A)} \log \sin(x-y) dx dy$$

的值, 其中 (A) 是由直线 $y=0$, $x=\pi$, $y=x$ 所围成的三角形 (图 79, a)。

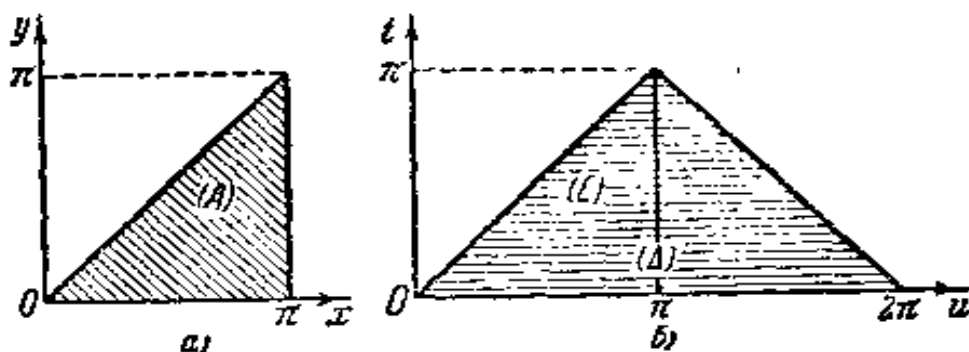


图 79

令

$$x = \frac{u+t}{2}, \quad y = \frac{u-t}{2}.$$

将区域(A)变换为 ut 平面上由直线 $u=t$, $u+t=2\pi$, $t=0$ 所围的三角形(Δ)(图 79, 6)。因为变换的雅可比式等于 $\frac{1}{2}$, 故

$$I = \frac{1}{2} \iint_{(\Delta)} \log \sin t \, dt \, du = \iint_{(E)} \log \sin t \, dt \, du,$$

其中(E)表由直线 $u=t$, $u=\pi$, $t=0$ 所围的三角形(见图), 再又可写:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_0^\pi \log \sin t \, dt \, du = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \log \sin t \, dt = -\frac{\pi^2}{2} \log 2.$$

18) 计算(对任意的自然数 m 及 n) 积分

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{X_m(x) X_n(y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx \, dy,$$

其中 X_n 表第 n 个勒戎德多项式。

解 我们回忆到, 奇(偶)附标的勒戎德多项式只含 x 的奇(偶)次项。由此立刻可见, 只要附标 m 或 n 中至少有一个是奇数时就有 $I=0$ 。

设它们两个都是偶数: $m=2\mu$, $n=2\nu$ 。考察积分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{X_{2\mu}(x) y^{2p}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx \, dy = \int_{-1}^1 X_{2\mu}(x) dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y^{2p}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy.$$

由熟知的公式

$$\int_{-a}^a \frac{y^{2p}}{\sqrt{a^2-y^2}} dy = 2 \int_0^a = 2a^{2p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} \theta \, d\theta = \pi a^{2p} \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}$$

所以我们的积分就化成

$$\frac{(2p-1)!!}{(2p)!!} \int_{-1}^1 X_{2\mu}(x) \cdot (1-x^2)^p dx,$$

因此, 当 $p < \nu$ 时它等于 0 [由勒戎德多项式的基本性质: 308, (8)]。于是, 当 $n=2\nu \neq m=2\mu$ 时, 上述积分 $I=0$, 还剩下当 $n=m=2\mu$ 的情形。在这一情形下,

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{X_{2\mu}(x) X_{2\mu}(y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx \, dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{X_{2\mu}(x) y^{2\mu}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx \, dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \frac{(2\mu-1)!!}{(2\mu)!!} \int_{-1}^1 X_{2\mu}(x) (1-x^2)^\mu dx = \\
&= (-1)^\mu \pi \frac{(2\mu-1)!!}{(2\mu)!!} \int_{-1}^1 X_{2\mu}(x) x^{2\mu} dx = \\
&= (-1)^\mu \pi \frac{(2\mu-1)!!}{(2\mu)!!} \int_{-1}^1 X_{2\mu}(x) X_{2\mu}(x) dx = (-1)^\mu 2\pi \frac{(2\mu-1)!!}{(2\mu)!!} \frac{1}{4\mu+1}
\end{aligned}$$

[308(10)]. 这样, 最后,

$$f = \begin{cases} 0, & \text{除 } n=m=2\mu \text{ 的情形外,} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} 2\pi \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{1}{2n+1}, & \text{如 } n=m=2\mu. \end{cases}$$

讀者試驗證所作运算的正确性。

19) 試計算积分(立烏維里)

$$R(\lambda) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y+\frac{\lambda^3}{xy})} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} y^{\frac{2}{3}-1} dx dy \quad (\lambda > 0).$$

利用萊布尼茲規則求得它对参数 λ 的导数:

$$\frac{dR}{d\lambda} = -3\lambda^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y+\frac{\lambda^3}{xy})} x^{\frac{1}{3}-1} y^{\frac{2}{3}-1} \frac{dx dy}{xy}.$$

此处只换一个变数 x , 令(当 $y = \text{const.}$ 时) $z = \frac{\lambda^3}{xy}$, 所以 $\frac{dx}{x} = -\frac{dz}{z}$; 我們得

$$\frac{dR}{d\lambda} = -3 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(y+z+\frac{\lambda^3}{yz})} y^{\frac{1}{3}-1} z^{\frac{2}{3}-1} dy dz = -3R.$$

积分这一简单微分方程, 得 $R = Ce^{-3\lambda}$. 如令 $\lambda = 0$ 就可决定常数 C :

$$R(0) = C = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi.$$

因此, 最后,

$$R = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi e^{-3\lambda}.$$

20) 試計算积分

$$A = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} \frac{\cos 2k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} dx dy$$

* 建議讀者驗證积分 R 的存在及允許应用萊布尼茲規則。后者可如在单积分情形时用同样的观察而处理。

(其中 $k = \text{const.}$)。

因为积分号下的函数其绝对值不超过函数

$$\frac{e^{-x-y}}{\sqrt{xy}},$$

当然它在第一象限内的积分是有的[参看 7)], 故积分 A 的存在得以保证。

以 (D) 表第一象限中 $x \geq y$ 的部分(在图 80 中打了斜线), 显然, 我们有

$$A = 2 \iint_{(D)} e^{-x-y} \frac{\cos 2k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} dx dy.$$

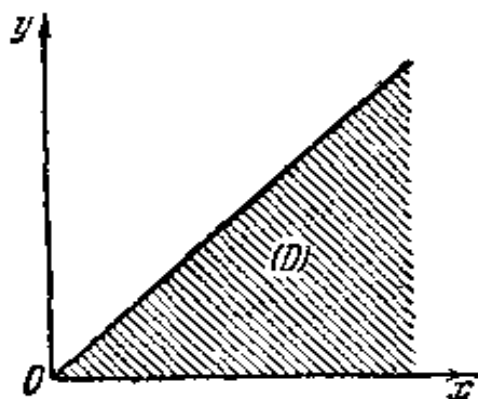


图 80

现在按公式

$$u = x + y, \quad v = 2\sqrt{xy}$$

进行变数更换, 点 (u, v) 在 uv 平面上描画出与 (D) 相对应的区域 (Δ) , 故 $u \geq v$ 。同时

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{x-y}{\sqrt{xy}} = \frac{2\sqrt{u^2-v^2}}{v} \quad \& \quad \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{v}{2\sqrt{u^2-v^2}}.$$

在代入后得

$$A = 2 \iint_{(\Delta)} e^{-u} \frac{\cos kv}{\sqrt{u^2-v^2}} du dv = 2 \int_0^\infty e^{-u} du \int_0^u \frac{\cos kv}{\sqrt{u^2-v^2}} dv.$$

为了计算里面的积分, 我们令

$$v = u \sin \theta, \quad dv = u \cos \theta d\theta = \sqrt{u^2-v^2} d\theta,$$

而它就化为积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(ku \sin \theta) d\theta = \frac{\pi}{2} J_0(ku)$$

[412.10)], 利用熟知的结果[486, 3)], 最后得:

$$A = \pi \int_0^\infty e^{-u} J_0(ku) du = \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}.$$

21) 试计算积分

$$B = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\alpha \sqrt{x^2+y^2}} \cos x\xi \cos y\eta dx dy,$$

其中 α, ξ 及 η 是常数且 $\alpha > 0$ 。

显然,

$$B = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots dx dy.$$

令

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

变到极坐标; 同时为了简化计算起见, 又令

$$\xi = \rho \cos \varphi, \quad \eta = \rho \sin \varphi.$$

代入并略加改变后得

$$B = \frac{1}{8} \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-ar} \cos[r\rho \cos(\theta - \varphi)] \cdot r dr + \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-ar} \cos[r\rho \cos(\theta + \varphi)] \cdot r dr \right\}.$$

令 $\theta \mp \varphi = \lambda$ 并利用周期性, 我们将这两个逐次积分化为同样的一个:

$$B = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\infty} e^{-ar} \cos(r\rho \cos \lambda) \cdot r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\lambda \int_0^{\infty} e^{-ar} \cos(r\rho \cos \lambda) \cdot r dr.$$

容易计算出(例如, 分部积分)

$$\int_0^{\infty} e^{-ar} \cos br \cdot r dr = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (a > 0).$$

此时,

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 - \rho^2 \cos^2 \lambda}{(a^2 + \rho^2 \cos^2 \lambda)^{\frac{3}{2}}} d\lambda = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a}{(a^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a}{(b^2 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

在更一般形状下也可证明(用同一方法): 如积分

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}) \cos x\xi \cos y\eta dx dy$$

存在, 则它恒仅与 $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ 相关, 即有 $f(\sqrt{\xi^2 + \eta^2})$ 的形状。

22) 设 (D) 是由不等式 $0 \leq x \leq a$ 及 $y \leq x$ 所指的三角形 OAB (图 81), 而 $f(x)$ 是任

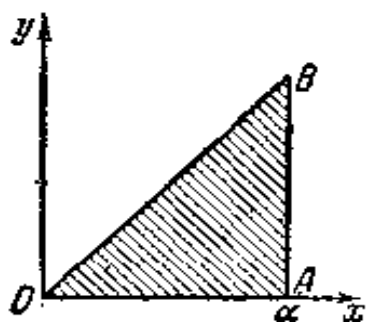


图 81

意一自 0 到 α 的連續函数。将二重积分

$$\iint_{(D)} \frac{f(y) dx dy}{\sqrt{(\alpha-x)(x-y)}}$$

用两种方法化为逐次积分以证公式

$$\int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{\alpha-x}} \int_0^x \frac{f(y) dy}{\sqrt{x-y}} = \pi \int_0^\alpha f(y) dy. \quad (15)$$

[实质上, 这是第里希萊公式 572, 10) 的一特殊应用, 不过这一次应用到广义积分上罢了; 这里的奇线是: $x=\alpha$ 及 $y=x$].

我們利用公式(15)来解一个属于亚培尔的有趣問題。

設 $\varphi(x)$ 是一已給函数, 在区間 $[0, \alpha]$ 上它及其导函数皆連續, 且 $\varphi(0)=0$ 。要來确定在同一区間上的連續函数 $f(x)$, 使对所有的 x , 下一条件适合:

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{f(y) dy}{\sqrt{x-y}}. \quad (16)$$

[这种类型的方程其未知函数在积分号下面者, 称作积分方程。亚培尔方程是积分方程原始例題之一, 现在积分方程已出現有广泛发展了的理論。]

在等式(16)两端同乘上 $\frac{1}{\sqrt{\alpha-x}}$, 将它对 x 自 0 积分到任一 $\alpha (0 < \alpha \leq a)$; 由(15)我們得

$$\int_0^\alpha \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{\alpha-x}} = \pi \int_0^\alpha f(y) dy.$$

如利用我們所已知的結果 473, 13), 在左端及右端对 α 取导数, 則就得到所求函数的表示式:

$$f(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \frac{\varphi'(t) dt}{\sqrt{\alpha-t}}.$$

剩下还要验证: 所得函数滿足提出的条件。它对 α 的連續性容易借在 473, 13) 中所述替换来证明。如将这一函数代入方程(16), 則倚靠公式(15), 得

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \frac{dy}{\sqrt{x-y}} \int_0^y \frac{\varphi'(t) dt}{\sqrt{y-t}} = \int_0^\alpha \varphi'(t) dt = \varphi(x) \quad [\varphi(0)=0],$$

这就是所要证的。

最后我們还討論两三个能說明某些原則性东西的例題。

23) 首先我們证明: 对于(甚至非負函数的)广义积分, 第 569 目中自二重积分的存在

可推得逐次积分存在的定理一般不成立。

設在正方形 $[0, 1; 0, 1]$ 中函数 $f(x, y)$ 定义如下:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2^n, & \text{如 } x = \frac{2m-1}{2^n} \text{ 及 } 0 < y \leq \frac{1}{2^n} \\ & (n=1, 2, 3, \dots; m=1, 2, \dots, 2^{n-1}), \\ 0, & \text{在其它各点。} \end{cases}$$

当 $y = \text{const.}$ 时, 只有有限个 x 的值能使 $f \neq 0$ 。这就是說,

$$\int_0^1 f(x, y) dx = 0 \quad \text{及} \quad \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = 0.$$

現在, 若 $x = \text{const.}$ 且不是 $\frac{2m-1}{2^n}$ 的形状, 則 $f = 0$ 且 $\int_0^1 f(x, y) dy = 0$ 。而若 $x =$

$= \text{const.} = \frac{2m-1}{2^n}$, 則 $\int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^{\frac{1}{2^n}} f dy = 1$ 。由此可見, 逐次积分

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy \text{ 不存在。}$$

[对函数 $f(x, y) + f(y, x)$, 显然, 两个逐次积分没有一个存在。]

至于二重积分, 則我們首先注意, 奇点填滿了 x 軸上的綫段 $[0, 1]$ 。对任何的 $\epsilon > 0$ 在矩形 $[0, 1; \epsilon, 1]$ 上函数 f 只在有限个直綫段即对 $\frac{1}{2^n} \geq \epsilon$ 的 $x = \frac{2m-1}{2^n}$ 上异于0。故

$$\iint_{\{0, 1; \epsilon, 1\}} f(x, y) dx dy = 0;$$

当 $\epsilon \rightarrow 0$ 变到极限时, 就可見到

$$\iint_{\{0, 1; 0, 1\}} f(x, y) dx dy = 0.$$

24) 不準確证, 二重积分

$$(a) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-xy} \sin x dx dy, \quad (b) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

都不存在(在第 587 目所給出定义的意义下)。

在情形(a)下很清楚, 积分号下函数绝对值的积分不存在, 因为否則逐次积分

$$\int_0^{\infty} |\sin x| dx \int_0^{\infty} e^{-xy} dy = \int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

将有有限值,但事实上不是如此[439]。于是,由 588,就得出断言。

在情形(6)下,如以 (KR) 表中心在原点半径为 R 的圆的四分之一,则变到极坐标时将有

$$\iint_{(KR)} \sin(x^2+y^2) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^R \sin r^2 \cdot r dr = \frac{\pi}{4}(1 - \cos R^2).$$

当 R 增大到无穷时这一式子没有确定的极限,亦就解决了问题。

很奇怪的我们注意,在所讨论的两例中的每一个,其两种逐次积分均存在(甚且彼此相等):

$$\int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-xy} \sin x dx = \int_0^\infty \sin x dx \int_0^\infty e^{-xy} dy = \frac{\pi}{2} \quad [484, 2^\circ],$$

$$\int_0^\infty dy \int_0^\infty \sin(x^2+y^2) dx = \int_0^\infty dx \int_0^\infty \sin(x^2+y^2) dy = \frac{\pi}{4} \quad [484, 5^\circ].$$

因此,对于变号的函数,逐次积分之一的存在还不足保证二重积分的存在(我们回忆一下,在 589 中我们补充要求了函数绝对值逐次积分的存在。)

25) 因为无穷矩形 $[0, +\infty; 0, +\infty]$ 不能当作任意无穷伸展的区域(如在第 587 目中定义所要求者)来概括,而只能当作形如 $[0, A; 0, B]$ 的特殊矩形区域的极限,故在上所考察的两情形下仍可证得:积分

$$\iint_{[0, A; 0, B]} \dots dx dy$$

当 $A, B \rightarrow +\infty$ 时有一确定的有限极限存在。

这立刻可以从积分

$$\begin{aligned} \iint_{[0, A; 0, B]} \sin(x^2+y^2) dx dy &= \\ &= \int_0^A \sin r^2 dr \cdot \int_0^B \cos y^2 dy + \int_0^A \cos x^2 dx \cdot \int_0^B \sin y^2 dy \end{aligned}$$

看出来,它在所述极限过程下趋近于极限 $\frac{\pi}{4}$ [484, 5[°]]。

现在我们来考察积分

$$\iint_{[0, A; 0, B]} e^{-xy} \sin x dx = \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^A \frac{e^{-Bx} \sin x}{x} dx.$$

右端的第一个积分(当 $A \rightarrow +\infty$ 时)趋近于 $\frac{\pi}{2}$,而第二个(当 $A, B \rightarrow +\infty$ 时)有极限 0,因

为其绝对值不超过积分

$$\int_0^A e^{-Bx} dx = \frac{1 - e^{-AB}}{B}.$$

这样,最后取极限时得 $\frac{\pi}{2}$ 。^{*}

与极限过程特殊化相关的类似极限好像广义积分的“主值”[448]一样。在任意伸展到无穷的区域的情况下也可考察它们,如在区域的外面令函数等于零。有些数学家认为将这些极限就放在广义二重积分概念的定义本身中很为合适(这与在我们的叙述中所采用的定义本质上相异)。在这种观点下,24)中所考察的两个积分就是收敛的且非绝对收敛。

附注 类似的情况发生在二重级数中。因为我们在那里总是从无穷长方矩阵出发,所以不断用加边的有限长方矩阵来概括它是很自然的。这已被我们安置在二重级数和的定义中[380]。因此之故,二重级数既能绝对收敛,也能非绝对收敛。然而,也另有一种观点存在,按照这种观点,从一个无穷矩阵中可以用任何形式的一些曲线分离出有限块来,只要这些曲线能移所有的点到无穷远去就行了[587]。如站在这种观点上的话,则二重级数亦可与广义二重积分一样能仅仅绝对收敛。

^{*} 这一极限与两逐次积分的值相一致,在两情形下都如此,当然不是偶然的[参照158]。

俄中名詞对照表

А

Абель 亚培尔
аддитивная функция от области плоской
平面区域的可加函数
——, определение её по производной
平面区域的可加函数由导数来确定它
——промежутка 区間的可加函数
Арцела 阿尔裁拉
астроида 星形綫

Б

Бесселевы функции 貝塞尔函数
Бю и Савара закон 皮奥-沙凡尔定律
буняковского неравенство 布涅科夫斯基
不等式
бета-функция β 函数

В

векторное произведение 向量积
Вивьани тело 維維安尼立体
Вольтерра 伏尔推拉
вращение плоской фигуры 平面图形的旋轉
вращения тело 旋轉体

Г

гамма-функция Γ 函数
гамоническая функция в области плоской
平面区域中的調和函数
Гаусс 高斯
главное значение несобственного интег-
рала 广义积分的主值
Грина формула 格林公式

Гульдина теорема 古里金定理

Д

Дарбу верхние и нижние интегралы 达
布上积分及下积分
——как пределы 达布上积分及下积
分当作极限
——суммы 达布-斯底尔吉斯和
——суммы для интеграла двойного 二重
积分的达布和
двойной интеграл 二重积分
——выражение через первообразную 二
重积分, 以原函数表示
——как аддитивная функция области 二
重积分当作区域的可加函数
——, классы интегрируемых функций 二
重积分, 可积函数类
——несобственный 二重积分, 广义的
——, приведение к повторному 二重积分,
化为逐次积分
——, свойства 二重积分的性质
——, условия существования 二重积分存
在的条件
——ряд, сопоставление с двойным интег-
ралом 二重級数, 与二重积分的比較
Дикартов лист 笛卡儿叶形綫
диаметр точечного множества 点集的直
徑
Дирхле формулы 第里希茨公式
дифференциал точный, интегрирование
确切微分的积分法
——, признаки 确切微分的判定法
——, связь с криволинейным интегралом

第十七章 曲面面积 · 曲面积分

§ 1 双侧曲面

593. 曲面的侧 让我们首先来建立在以后讨论中占重要地位的曲面的侧这一概念。

在许多情形中, 这个概念是通过直觉就可以了解的。如果曲面是由形如 $z=f(x, y)$ 的显方程给出, 那就可以说到这曲面的上侧或下侧。^{*} 如果曲面范围着一个立体, 那也容易想像到它的两侧——朝向立体的内侧, 与朝向立体的周围空间的外侧。

从这直觉的概念出发, 我们现在要对曲面的侧这个概念给以确切的定义。

考虑一个光滑的曲面 (S), 它是封闭的或者是由分段光滑的边界所围成的, 并且它上面没有奇点; 因此, 在这曲面的各点上都有确定的切面, 它的位置随着切点位置的改变而连续地改变。

在曲面上取一定点 M_0 , 并在这点引一法线, 这法线有两个可能的方向(它们可用方向余弦的符号来区别), 我们认定其中一方向。沿曲面画一个起自 M_0 而又回到 M_0 的闭路, 并假定它不越过曲面的边界。令点 M 沿着这闭路环行, 并在其各个接续的位置上给与法线一个方向; 这些方向就是由我们在起点 M_0 处所选定的那个法线方向连续地转变来的。这时下面两种情形必有一种发生: 令点 M 环行一周再回到 M_0 时, 法线的方向或与出发时所定者相同, 或与出发时所定者相反。

如果对于某一点 M_0 及某一通过 M_0 的闭路 M_0AM_0 , 后一种情形发生, 则对于其它任一点 M_1 也容易作出一个起自 M_1 而又回到 M_1 的

^{*} 我们常采用这类说法, 这时是指 z 轴本身垂直向上。

閉路,使回到 M_1 时法綫的方向与起初所定者相反。例如,假若我們理解 M_1M_0 为曲面上联結 M_1 与 M_0 两点但不越过曲面的边界的任一曲线,而 M_0M_1 为与其方向相反的同一曲线,則 $M_1M_0AM_0M_1$ 就是这样的

的一个閉路。

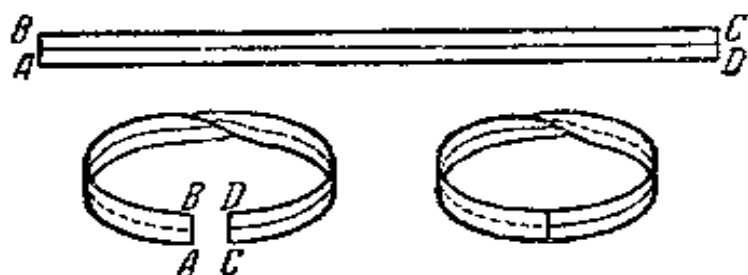


图 82

在这情况下曲面叫做单側的。所謂的莫彼阿斯带(图 82)就是这类曲面的一个典型的例子。如果我們把一长方形紙条 $ABCD$ 先扭一

次,再粘起来,使 A 点与 C 点相合, B 点与 D 点相合,我們就可得到它的一个模型。假若用一种颜色来塗这个扭成的环带,那就可以不越过它的边界而用这种顏色塗遍环带的全部。像这一类的曲面不在我們今后討論之列。

現在我們假定不論 M_0 是怎樣的点,不論通过 M_0 而不越过曲面边界的綫是怎樣的閉路,沿此綫进行一周再回到起点 M_0 时,法綫的方向与起初所定者相同。在这些条件下的曲面叫做双側的。

設 S 是一个双側曲面。在 S 上任取一点 M_0 ,并給这点的法綫一个确定的方向。取这曲面的其它任一点 M_1 ,我們用任一个在曲面上但不越过曲面边界的道路(K)来連接 M_0 与 M_1 ,并令点 M 沿这道路从 M_0 进行到 M_1 。如果这时法綫的方向連續地改变,則点 M 到达 M_1 的位置时就带着一个完全确定的法綫方向,不倚賴于道路(K)的选择。实际上,假若說 M 沿着两个不同的道路(K_1)与(K_2)从 M_0 进行到 M_1 时我們会在 M_1 点得到两个不同的法綫方向,則閉路 $M_0(K_1)M_1(K_2^{-1})M_0$ 就会使得回到 M_0 时所带的法綫方向不同于起初的法綫方向。这和双側曲面的定义相矛盾。

由此可見,在双側曲面上,选定了一个点上的法綫方向便唯一地决定全部点上的法綫方向的选择。曲面上全部点的集合連同那按指定的

規則对这全部点上的法綫所給与的方向,叫做曲面的一个定側。

594. 例 1° 最简单而又最重要的双侧曲面的例子是用显方程 $z=f(x, y)$ 表达的曲面, 这里假定函数 z 在某一平面区域 (D) 内連續, 并且在这区域内有連續的偏导数

$$p=\frac{\partial z}{\partial x} \text{ 且 } q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

在这种情况下曲面的法綫方向余弦具有表达式.

$$\cos \lambda = \frac{-p}{\pm \sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos \mu = \frac{-q}{\pm \sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos \nu = \frac{1}{\pm \sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

在根式前选取一确定的符号后, 就在曲面的全部点上都建立了确定的法綫方向。因为根据假设, 方向余弦是点的坐标的連續函数, 故它所定的法綫方向也連續地依赖于点的位置。由此显然可見, 在 $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$ 的公式中根式前符号的选擇, 正是在以前所說的曲面的側这个概念的意义之下, 确定了曲面的一側。

如果我們在根式前选取正号, 則在曲面的全部点上

$$\cos \nu = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

是正的, 就是說所选一側的对应法綫和 z 軸作成的角是銳角。因此, 由这选定的符号所确定的曲面的一側是上側。反之, 在法綫方向余弦的表达式中选取負号就显示出曲面的下側 (全部法綫都和 z 軸交成鈍角)。

2° 我們現在考虑, 更一般地, 任意一个由参数方程

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v) \quad (1)$$

給出的非封閉的光滑曲面 (S) , 并且参数 u, v 在 uv 平面上某一有界区域 (Δ) 内变化。光滑性要求(1)中各函数及其偏导数都在 (Δ) 内連續, 并且曲面沒有奇点。此外(特別着重地指出), 我們假定重点不出現, 所以曲面的每一点只能从参数 u, v 的一对值得到。

如果像尋常一样用 A, B, C 表示矩陣

$$\begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}$$

中三个行列式, 再假设恒有 $A^2+B^2+C^2>0$, 則曲面的法綫方向余弦可用熟知的公式来表达:

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, & \cos \mu &= \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos \nu &= \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

并且在这情况下根式前选定一种符号便决定曲面的一侧，所以曲面是双侧的。实际上，如果符号已选定，则对于曲面的每一点（因为只有 u, v 的一对值对应于它：）公式(2)和一个确定的法线方向相对应。当点移动时，法线方向连续地改变。

没有无重点的假定时，那就不能无条件地肯定说这曲面是双侧的。因为和曲面的重点 M_0 对应至少有参数的两对不同的值 u_0, v_0 与 u_1, v_1 ，而对于这两对值即使把根式前的符号取得一样，公式(2)仍可能对 M_0 处的法线定出两相反的方向。如果真是这样，则这曲面一定是单侧的。实际上，我们连接点 $m_0(u_0, v_0)$ 与点 $m_1(u_1, v_1)$ 成为 uv 平面上一个曲线 m_0m_1 ，于是沿这曲线我们得到曲面 (S) 上一个起自 M_0 而再回到 M_0 的闭曲线：若一个点带着一个法线方向从 M_0 出发，则沿这曲线环行一周而回到 M_0 时，它所带的法线方向已与出发时所定者相反！

3° 若一光滑曲面 (S) 是封闭的，围着一个立体，则它具有两侧——内侧与外侧——是很明显的。设这曲面是由(1)中各参数方程表达。这时，虽然关于曲面上的点与区域 (Δ) 上的点成一对应的假设不完全能实现，但是公式(2)中符号的选择却全然确定曲面的一侧。事实上像刚才上面说过的那种情形在这里是根本不可能的。

595. 曲面和空间的定向 设 (S) 是由简单闭路 (L) 所范围的一个非封闭的光滑双侧曲面；选取这曲面的一个定侧。我们现在按下面的规则对闭路 (L) 记上一确定的环行方向作为正向：这一个方向由观察者看来必须是依反时针方向进行的；这时假想观察者依这方向沿着这界线进行，且与选定的一侧对应的曲面的法线同向地站着。“反时针方向”的含义，确切地说，就是观察者必须在他左边看见与他紧接的曲面的部分。对于曲面上每一个围着一部分曲面的简单闭曲线来说，它的正向由这同一个规则同时建立起来。^{*} 与正向相反的环行方向叫做负向，总之，这就是曲面的定向概念的内容。

如果从曲面的另一侧出发，则法线要改其方向为相反的方向，观察

^{*} 当在闭路上确定正向时，必须只考虑这个部分。

者的位置也要变更；因此按照我們的規則必須重新布置閉路(L)的正負向以及曲面上其它各閉路的正負向：曲面改变其定向。由此可見，如果始終保持这个确立了的規則，則选定了曲面的一側就确定了曲面的定向；反之，选定了曲面边界的方向，就唯一地确定了曲面的一側。

在封閉的光滑曲面(S)範圍着某一个立体的情况下，这里所能談到的是对于这个立体來說曲面的外側或內側。要对于任一个簡單的閉曲綫用上述的規則来确立它的正向，这时不能做到，其原因是双重的。首先是这种曲綫(例如在环面上的任一經綫或緯綫)簡直可以“不分割”曲面，那时曲面从双方紧接着曲綫：我們的規則不能給出什么。然而即使閉路“分割”曲面成两区域，它也同样地“範圍着”这两区域，并且我們的規則要看选取的是那一个区域来定这閉路的两方向中那一个作为正向。以“分割”曲面的那种閉路为限，我們开头把一个区域和边界一同指出，然后正向就完全而唯一地建立起来。^{*}于是曲面的两定向之一就全靠所选取的一側决定。

如果对于每一个这样的曲面，把那个和曲面的外側对应的定向規定作正的定向，而把和它相反的当作負的定向，則空間本身由此而产生了某种确定的定向。这完全类似于平面上任一簡單閉曲綫的正向(可以說是正的定向)的选取，可以表征平面的定向[523]。

現在定义的那个空間定向，归根到底是以反时針方向的旋轉作为它的基础的，叫做右手定向。若所持的出发点是順时針方向的旋轉，則得到空間的左手定向。为了避免混乱起見，我們今后在空間定向起作用的那些問題上总是預定右手的空間定向。

必須指出，空間坐标軸的安排要由所規定的空間定向去决定。在右手定向下，坐标軸要安排得这样，當我們从正的 z 軸望它們时，由正

^{*} 如果考虑平面上由同样的方向所确定的开的或閉的曲綫，則在第一种情形下可以說出曲綫上的任意两点那个在前与那个在后，而在第二种情形下只有指出了那两个点及由它們所限制的弧綫以后，才能够那样地说。可以看出这里所說的与正文中所說的相类似之处。

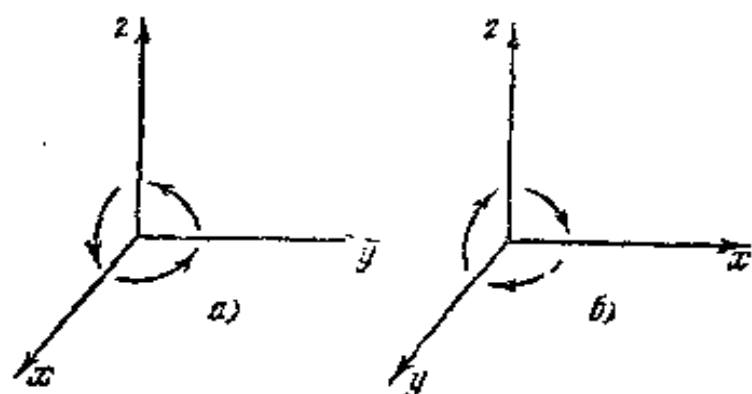


图 83

的 x 軸到正的 y 軸的旋轉是按反時針方向進行的 (當字母 xyz 循環輪換時這也保持有效) (圖 83, a); 在左手定向下, 所說的旋轉就順時針方向進行 (圖 83, b)。在第一種情形下坐標系 $Oxyz$ 叫做右手的, 而在第二種情形

下叫做左手的。遵照上面所定的條件, 我們今後在所指的各情況下採用右手坐標系。

596. 法綫方向余弦公式中符號的選擇 我們現在要對前面說過的概念, 即曲面的一個側的選擇和其一個定向的建立兩者之間的關係, 給出一個在以後極重要的應用。

我們再考慮在 594, 2° 中所說的非閉的光滑曲面 (S), 並選取它的一個定側 (跟着也選好了定向!)。設 (A) 是 uv 平面上的區域 (Δ) 的邊界, 而 (L) 是我們的曲面上和它對應的邊界。我們假定 (這總容易實現), 邊界 (L) 的正向對應於邊界 (A) 的正向。於是對於兩個彼此對應的在區域 (Δ) 內的閉路 (λ) 和在曲面 (S) 上的閉路 (l), 也有同樣的情形: (λ) 的正向引出 (l) 的正向。*

在這些條件下為了顯示所選的曲面一側, 必須選取法綫方向余弦公式 (2) 中根式前的正號。

要證明這個斷語只要查明, 至少在一點處由這些帶正號的公式所確定的方向和所要求的法綫方向相一致。取曲面上任意一個內點 M_0 ; 在區域 (Δ) 內有和它對應的點 $m_0(u_0, v_0)$ 。設在這點處, 譬如說, 行列式

* 因為一閉路的方向可以由它的任一部分的方向來判斷, 所以對於和 (A) 有一公共部分的閉路 (λ) 來說, 所下的斷言是顯明的, 然後容易變到一般場合。

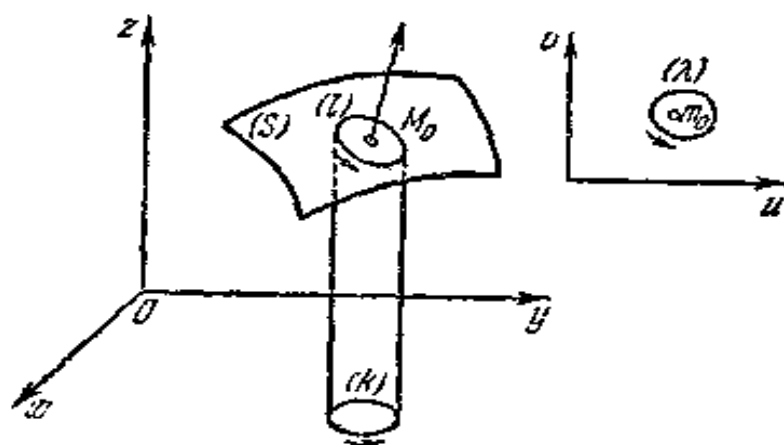


图 84

$$C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$$

不为零。于是在 uv 平面上找得到点 m_0 的一个这样小的邻域 (其边界为 (λ))，使得在曲面 (S) 上和它对应的点 M_0 的邻域 (其边界为 (l)) 是一一对应地射影到 xy 平面上。用 (k) 表这射影在 xy 平面上的闭路 (图 84)。

如果在所考虑的点处以及在它的邻域内 $C > 0$ ，则对应于闭路 (λ) 的正向有闭路 (k) 的正向 (即在所选择的坐标轴的排列下其方向是反时针方向) [参看 581, 1]。从图形中显然可见，要曲面上和 (k) 对应的闭路 (l) 的方向也是反时针方向，就必须从上面朝它看，因此在这情况下点 M_0 处的法线应该是向上的，即应该与 z 轴交成锐角。如果在公式 (2) 中取正号，则由公式 (2) 就正有这情形，因为当 $C > 0$ 时 $\cos \nu > 0$ 。反之， $C < 0$ 时法线应该与 z 轴交成钝角，这在上述选取的符号下一样地成立，因为 $C < 0$ 时 $\cos \nu < 0$ 。

若光滑的曲面 (S) 是闭的而且范围着某一个立体 [参看 594, 3°]，则对于它来说就有类似的情形发生。假设我们已认定了曲面的一个定侧，并且假设对应于区域 (Δ) 内任一闭路 (λ_0) 的正向有曲面 (S) 上由它定义的闭路 (l_0) 的正向，只要 (l_0) 所范围的那个在曲面 (S) 上的区域是

与 uv 平面上由闭路 (λ_0) 所范围的区域相对应。在这种情况下, 上面对于开曲面所证明的命题这时也是正确的。

597. 分片光滑曲面的情形 在 595 目中所发展的概念, 也为曲面的侧的概念推广到分片光滑的曲面的情形提供了一个便利的方法。第 593 目中所叙述的一些见解不能直接地应用到这里, 因为沿着那些连接各片光滑曲面的“棱”没有确定的切面, 而且通过这些棱时谈不到法线方向的连续变化。

设给定的分片光滑的曲面 (S) 是由各光滑的曲面 $(S_1), (S_2), \dots$ 所组成, 它们是沿着棱(即它们边界的公共部分)一个接着一个的。首先假设这些面片中各片分开来都是双侧的。可是, 要能够把整个曲面 (S) 看作是双侧的, 这个假设自然是不充分的; 不难看出莫彼阿斯曲面是由两片光滑的双侧曲面作成的。

在每片曲面 $(S_i) (i=1, 2, \dots)$ 的边界 (K_i) 上选取其两方向中之一作为正向; 我们已知道, 这可以确定曲面 (S_i) 的一侧。若这选择法能够进行到这样, 使得相接的两边界的公共部分*总是在两边具两个相反的方向(图 85), 则只有这时曲面 (S) 是双侧的。曲面 (S) 的一侧定义为

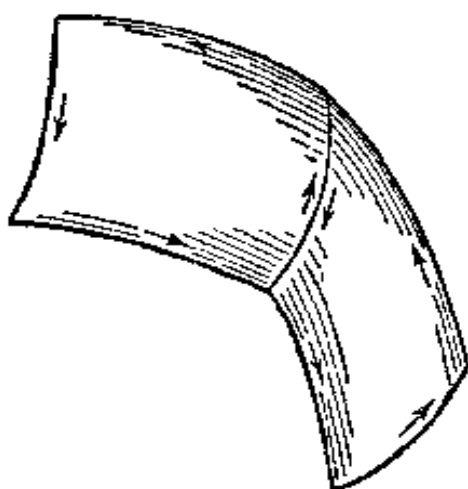


图 85

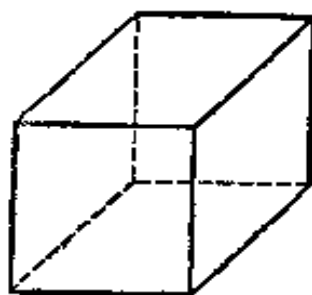


图 86

* 这个部分也可以由一些单独的面片组成。

由所述方法选出来的它的各部分的侧的总和。

如果就在一个地方把一个边界的方向改为相反的方向，则为了遵守我们的条件必须对所有的边界都这样做。于是所选的各片曲面(S_i)的侧都要用与它们相反的侧来替代；这些相反的侧的总和就组成曲面的第二侧。

为了要掌握所作的一些规定，向读者建议：1)用一立方体的面(图86)作为例子，选择其六个面的边界的应有方向来实现这些规定，2)假若企图对一已分解成为两个或多个双侧曲面的莫彼阿斯带也这样做，试了解当中会有那些困难发生，最后，3)指出上面所给的关于曲面侧的定义与曲面被分解为怎样的光滑面片无关。

§2 曲面面积

598. 许瓦耳兹的例子 曲面面积的概念与曲线长的概念有相似的地方。我们已定义(开口)弧长为内接于这弧的折线的周界当其各个边长趋于零时的极限。在曲面(譬如说也是开的)的情况下，很自然地会去考虑内接于它的多面形，并且定义曲面面积为这多面形的面积当其各个面的直径趋向于零时的极限。

可是，在前世纪末这个定义的缺陷已被揭露出来。那就是许瓦耳兹(H. A. Schwarz)证明了上述极限甚至对于简单的直圆柱面都可以不存在！我们来给出这一具启发性的例子。

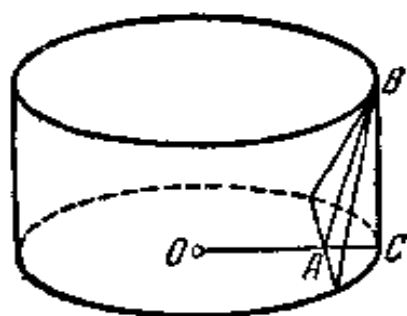


图 87

设给出一个半径为 R 与高为 H 的圆柱面。

用下面的方法画内接于这柱面的多面形。将柱面的高分为 m 等分，过每一分点作垂直于这柱面的轴的平面，于是在这曲面上得到 $m+1$ 个圆周(包括柱面两底上的圆周在内)。将每一圆周分为 n 等分，使上一圆周的分点位于其下一圆周的弧的中点上头。

由所有这些弧的弦以及联结每一弦的端点到其上一圆周上和下一

圆周上的分点(它們恰巧分別地安置在对应弧的中点上头和下头)的綫段作成三角形(图 87)。这些三角形的总数是 $2mn$ 个, 并且都是全等形。它們总合起来就构成我們所需要的一个多面形($\Sigma_{m,n}$); 图 88 就代表它的一个模型。

我們現在来計算每个三角形的面积 σ 。取弦做底, 其长等于

$$2R \sin \frac{\pi}{n},$$

求三角形的高 AB (參看图形), 要我們注意 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$, 其中

$$AC = OC - OA = R \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right), \quad BC = \frac{H}{m}.$$

因此, 这一三角形的面积等于

$$\sigma = R \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)^2 + \left(\frac{H}{m} \right)^2},$$

而多面形的全面积等于

$$\Sigma_{m,n} = 2mn\sigma = 2R \cdot n \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{R^2 m^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)^2 + H^2}.$$

当 m 与 n 无限增加时, 所有三角形的直徑趋向于零, 但面积 $\Sigma_{m,n}$ 沒有极限。实际上, 若令 m 与 n 这样地增加, 使得比值 $\frac{m}{n^2}$ 趋向于一个确定的极限 q :

$$\lim \frac{m}{n^2} = q,$$

則因我們原有

$$\lim n \cdot \sin \frac{\pi}{n} = \pi,$$

而另一方面根据所作的假設又有

$$\lim m \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) = \lim m \cdot 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n} = \lim \frac{\pi^2}{2} \frac{m}{n^2} = \frac{\pi^2}{2} q,$$

所以

$$\lim \Sigma_{m,n} = 2\pi R \sqrt{\frac{\pi^4 R^2}{4} q^2 + H^2}.$$

我們看到, 这个极限实质上依赖于 q 的大小, 即依赖于 m 与 n 同时增加的方式。当 $q=0$ 时而且只有在这时, 所說的极限等于 $2\pi RH$ (这是在几何学教程中所已求出的面积的大小), 但它甚至可以和 q 同时为无穷大。因此, 当 m 与 n 两数各自独立地变到无穷大时, 面积 $\Sigma_{m,n}$ 确实沒有确定的极限。由此可見, 如果站在上述定义的观点上, 則柱面是沒有面积的。

重要的是要了解, 在內接于曲綫的折綫情况与內接于曲面的多面形情况間有些什么区别。为了簡便起見, 我們把所說的曲綫与曲面都算作光滑的。在曲綫上, 只要所作折綫的各个弦足够小, 則每个弦的方向与其对应弧上任一点处的切綫方向要相差多小就多小。所以这种无穷小的弦可以越来越加准确地当作其对应的弧的元素。相反, 要多小就可多小的那种頂点落在曲面上的多角形的面, 可以完全地按自己在空間的位置不与曲面的切面接

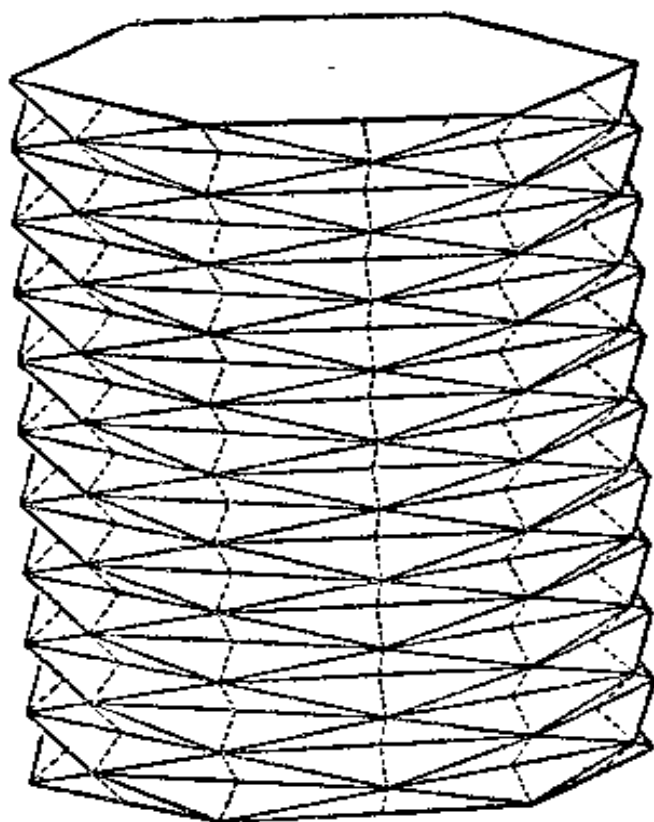


图 88

近; 在这种情形下它显然不能替代曲面的元素。这种情形很好地說明了剛才所考虑的例子: 柱面的切面全是直立的, 而內接于柱面的各个三角形的面当 q 很大时几乎都变成水平的, 而构成一些微小的皺紋。

599. 曲面面积的定义 整个以上所述, 引使我們想到預先要求于所給曲面的內接多面形的, 不仅是它的各个面的直徑要趋向于零, 而且

这些面在空間的位置要无限地接近于曲面的各个切面的位置。

可是这种想法要完全实现很不简单, 我們只好放弃它[参看第 602 目]。我們要以另一种但也完全出乎自然的想法做基础, 来给出曲面面积概念的定义。

我們將考虑一个由分段光滑的閉路 (L) 所範圍的开的光滑曲面 (S)。設这曲面被一个分段光滑的曲綫网分成許多部分

$$(S_1), (S_2), \dots, (S_n),$$

并在每一部分 (S_i) 內任意地选取一点 $M_i (i=1, 2, \dots, n)$ 。把元素 (S_i) 垂直地射影到曲面在点 M_i 处的切面上, 我們得到在射影內的平面图形 (T_i), 其面积为 T_i 。

这些面积 $T_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的和在各个元素 (S_i) 的直徑趋于零时的极限 S 叫做曲面 (S) 的面积。

若用 λ 表示上述的各个直徑中最大者, 則可写

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i T_i.$$

讀者無論用“ ε - δ 說法”或用“序列的說法”不难重新訂出对这一极限步驟的精確說明。

600. 附注 为了使所說的定义得到确切的意義, 我們要建立下面的輔助断語:

曲面 (S) 上每个直徑足够小的部分 (S') 是一一对应地射影到这部分任一点 M' 处的切面上。

因此, 如果前一目所指的曲面的一切元素 (S_i) 的直徑都足够小, 則它們在其对应切面上的射影 (T_i) 都是完全确定的平面图形。这些图形都是由分段光滑的曲綫所圍成的, 而且显然是可求面积的: 和数 $\sum T_i$ 具有意义。

我們来证明这断語。設曲面 (S) 是由参数方程

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad (1)$$

给出, 其中 (u, v) 在 uv 平面上一个由分段光滑的边界 (Δ) 所围的区域 (Δ) 内变化。同时假定在 (S) 的点与 (Δ) 的点之间有一一对应关系, 并且 (S) 的边界 (L) 上的点对于边界 (Δ) 上的点。此外我们还保留 594 (2°) 中的假设与记法。

为了消除与边界上的点联系着的一些困难, 宜在事先把 (1) 中各函数扩张到某一更大的区域 $(\tilde{\Delta})$ 上, 但保存其可微性 [249], 从而就得到作为曲面 (S) 的延展的一个曲面 $(\tilde{S})$ 。

曲面 (S) 的每一点 M_0 可用曲面 (S) 的这样的一块面 (s) 来掩盖 [如果所说的点是在 (S) 的边界上, 则 (s) 算是属于 $(\tilde{S})$ 的], 使得这一块面是由 [218 目中] 三个显方程之一来表达并且射影到对应的坐标面上某一圆内。除此以外, 可以假定在 (s) 的两个点处的法线无论何时也不会互相垂直 (这不难用缩小区域直径的办法来达到)。于是我们肯定说, 面块 (s) 一一对应地射影到它的任一点处的切面上。

要证明这一断言, 我们用反证法。假设这个断言不成立, 于是在 (s) 上就有这样的三个点 M_1, M_2, M_3 , 使得弦 M_1M_2 平行于曲面在点 M_3 处的法线 (图 89)。设这时曲面 (s) 本身, 譬如说, 是由形如

$$z = f(x, y)$$

的显方程表达, 这里点 (x, y) 在 xy 平面的圆 (k) 内变动。通过弦 M_1M_2 作平行于 z 轴的平面; 它沿着某一弧 $\overline{M_1M_2}$ 与曲面 (s) 相交。* 我们知道 [118, 120], 在这弧上必有一点 M_4 , 在这点的切线平行于这个弦。但是,

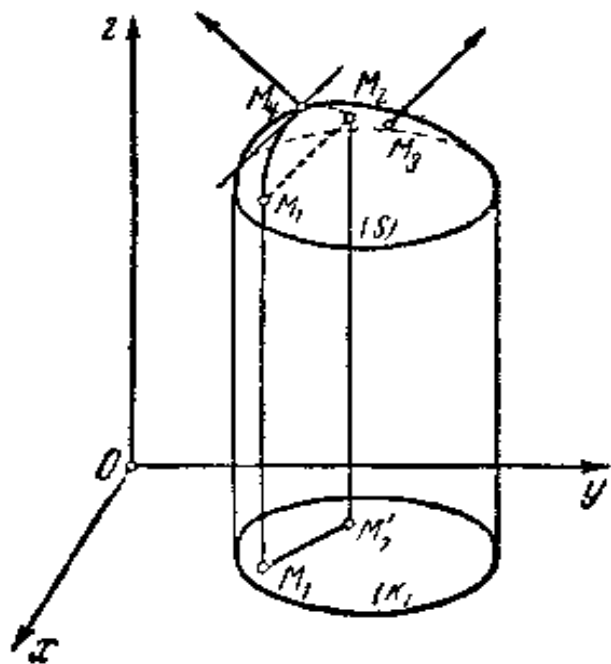


图 89

* 弦 M_1M_2 在 xy 平面上的射影线段 $M'_1M'_2$ 全部属于圆 (k) , 这点情况在这里发生了作用。

这时在 M_4 处的法綫一定是垂直于这个弦的, 也就是垂直于在点 M_3 处的法綫的, 这与我們的假設相矛盾。于是我們的断言得到了证明。

由此出发我們現在进行证明起初所作的断語。对于曲面 (S) 的每一点 M_0 我們用它的一个更小的“邻域” (s') 来替代上面所提到的它的“邻域” (s) , 使得它們的边界沒有公共点。在 uv 平面上有点 m_0 及它的邻域 (δ') 对应于点 M_0 及面块 (s') ; 不要把 (s') 与 (δ') 的边界列入 (s') 与 (δ') 之内, 就是說它們都算作开的区域。把波雷尔的預备定理[165]应用到复盖着全部区域 (Δ) 的开域的集合 $\{(s')\}$ 上, 我們可选出其中有限多个开域来复盖 (Δ) ; 回到曲面 (S) 上, 也就不难得到有限多个面块

$$(s'_1), (s'_2), \dots, (s'_m),$$

用来复盖全部曲面 (S) 。与此同时, 我們还要考虑起初所提到的較大的对应区域:

$$(s_1), (s_2), \dots, (s_m).$$

对每个 i 言我們取出由曲面的部分 $(S) - (s'_i)$ 上所有点到 (s'_i) 上所有点的距离的下确界, 并用 η 表这些下确界中最小的一个。設我們的曲面部分 (S') 的直徑小于 η 。如果它的某一点落在某一个确定的 (s'_i) 内, 則全部 (S') 整个地包含在对应的 (s_i) 内; 因此 (S') 和 (s_i) 同时具有所要求的特性。

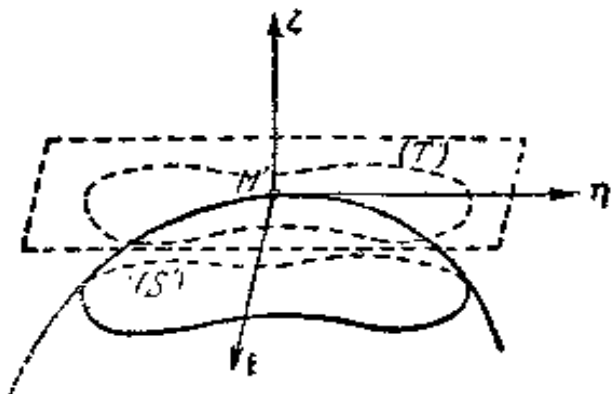


图 90

601. 曲面面积的存在及其計算 我們要证明在前面所給的一些假設下曲面(1)是可求面积的, 并且我们要建立一个計算它的面积的方便公式。

設 (S') 是 (S) 的任一部分, 具有在前一目开头所述的特性者, 而

$M'(x', y', z')$ 是它的任一点。把坐标原点移到这点上, 我們就轉到新坐

标系 $\xi\eta\zeta$ 的上面来: 就是说, 取曲面在点 M' 处的切面作为 $\xi\eta$ 平面, 而对应的法线作为 ζ 轴(图 90)。坐标变换的公式为:

$$\begin{cases} \xi = (x-x') \cos \alpha_1 + (y-y') \cos \beta_1 + (z-z') \cos \gamma_1, \\ \eta = (x-x') \cos \alpha_2 + (y-y') \cos \beta_2 + (z-z') \cos \gamma_2, \\ \zeta = (x-x') \cos \lambda' + (y-y') \cos \mu' + (z-z') \cos \nu', \end{cases}$$

其中 $\alpha_1, \beta_1, \dots, \nu'$ 依照下表

	x	y	z
ξ	α_1	β_1	γ_1
η	α_2	β_2	γ_2
ζ	λ'	μ'	ν'

表示新旧坐标轴间的夹角。

因为 (S') 是一一对应地射影到 $\xi\eta$ 平面的某一区域 (T') 内, 而另一方面, (S') 的点与区域 (Δ) 的某一部分 (Δ') 的点又是一一对应地联系着的, 所以在 (T') 的点与 (Δ') 的点之间也具有同样的对应关系。这可以用变换公式中前二式来实现, 只要把 x, y, z 理解为函数(1)。应用曲线坐标的面积表示式[580], 我们有

$$T' = \iint_{(\Delta')} \left| \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)} \right| du dv. \quad (2)$$

但是雅可比式

$$\begin{aligned} \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)} &= \\ &= \begin{vmatrix} x'_u \cos \alpha_1 + y'_u \cos \beta_1 + z'_u \cos \gamma_1 & x'_v \cos \alpha_1 + y'_v \cos \beta_1 + z'_v \cos \gamma_1 \\ x'_u \cos \alpha_2 + y'_u \cos \beta_2 + z'_u \cos \gamma_2 & x'_v \cos \alpha_2 + y'_v \cos \beta_2 + z'_v \cos \gamma_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

是与两矩阵

$$\begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \end{vmatrix}$$

的乘积相对应的行列式, 并且由代数学中熟知的定理知, 它等于每两个对应的二阶行列式的乘积之和

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \gamma_1 & \cos \alpha_1 \\ \cos \gamma_2 & \cos \alpha_2 \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 \end{vmatrix} = A \cos \lambda' + B \cos \mu' + C \cos \nu'. \end{aligned}$$

在这里我們利用了, 行列式

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \lambda' & \cos \mu' & \cos \nu' \end{vmatrix} = 1$$

中各个元的代数余子式恰好等于各个元自身这一性质。例如, 这可由 $(\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1), (\cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2), (\cos \lambda', \cos \mu', \cos \nu')$ 中的任一个是其它二个的向量乘积[参看 639(2)]而得来。

另一方面, 如果用 A', B', C' 表示行列式 A, B, C 在点 M' 的值, 则

$$\begin{aligned} \cos \lambda' &= \frac{A'}{\pm \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}, \quad \cos \mu' = \frac{B'}{\pm \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}, \\ \cos \nu' &= \frac{C'}{\pm \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \end{aligned}$$

(在一切情况下取同一种符号), 因此

$$\left| \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)} \right| = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

右端是一个在区域 $(\Delta) \times (\Delta)^*$ 內的含四个自变量 u, v, u', v' 的連續函数。当 $u' = u, v' = v$ 时它变为

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

* 我們是用它来表示点 (u, v, u', v') 的四維区域, 其中 (u, v) 与 (u', v') 則各自屬於二維区域 (Δ) 。

并且它与达式相差一个量 $\alpha = \alpha(u, v, u', v')$ 。依据上述函数的一致連續性, 只要点 (u, v) 与 (u', v') 的距离足够小时, 这个量 α 就可变得任意地小, 而与点 (u', v') 的位置无关。

于是由(2)得到

$$T' = \iint_{(\Delta')} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv + \varepsilon' \Delta',$$

其中 ε' 与 Δ' 的直径同时为无穷小量, 也可以說, 与 S' 的直径同时为无穷小量。把这結果应用到曲面 (S) 被割成的各部分 (S_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) 上去, 我們得到一系列同样形式的等式

$$T_i = \iint_{(\Delta_i)} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv + \varepsilon_i \Delta_i;$$

在这里 (Δ_i) 是区域 (Δ) 中与 (S_i) 对应的部分。相加, 得

$$\sum_i T_i = \iint_{(\Delta)} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv + \varepsilon,$$

其中

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i \Delta_i$$

显然与 λ 同时为无穷小量。因此, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时 $\sum_i T_i$ 的极限确实存在:

$$S = \iint_{(\Delta)} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv, \quad (3)$$

按定义这就是曲面的面积。

如果把矩陣

$$\begin{bmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{bmatrix}$$

“自乘”起来而作出行列式

$$\begin{vmatrix} x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2 & x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \\ x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v & x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2 \end{vmatrix},$$

則由代数学中熟知的定理它正好等于 $A^2 + B^2 + C^2$, 通常令

$$x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2 = E, \quad x_u'x_v' + y_u'y_v' + z_u'z_v' = F,$$

$$x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2 = G,$$

这就是所謂曲面的高斯系数, 在微分几何学中起重要的作用。用这种記号, 得到

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2,$$

于是公式(3)亦可写为:

$$S = \iint_{(\Delta)} \sqrt{EG - F^2} \, dudv. \quad (3^*)$$

表示式

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv \equiv \sqrt{EG - F^2} dudv \quad (4)$$

叫做在曲綫坐标下的面积元素。

直到現在止我們都是討論开的光滑曲面情形。如果曲面不是这种情况, 但可分成有限多个开的光滑面块, 則各块曲面的面积和就叫做这曲面的面积。同时不难证明, 这样定义的面积实际上不倚賴于如何将給定的曲面分成所需要形状的面块。如果整个給定的曲面是由参数方程表示, 則它的面积在上述一般情形下仍然是由公式(3)或(3*)来表示。

最后說到最簡單的特殊情形, 就是曲面(S)是由显方程

$$z = f(x, y)$$

給出, 其中 (x, y) 在 xy 平面上的区域 (D) 内变动。变量 x 与 y 具有参数 u 与 v 的功用。像平常一样, 令

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

我們按照矩陣

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix}$$

作出行列式 $A = -p$, $B = -q$, $C = 1$; 因此在所考虑的情况下

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy. \quad (5)$$

回忆对于法綫与 z 軸作成的銳角 ν 有

$$\cos \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

面积的公式亦可写为:

$$S = \iint_{(D)} \frac{dx dy}{\cos \nu}. \quad (5a)$$

最后, 如果不特別要求 ν 为銳角, 則

$$S = \iint_{(D)} \frac{dx dy}{|\cos \nu|}. \quad (5b)$$

[参看第 518 目中由显方程 $y = f(x)$ 給出的曲綫的弧长公式(7).]

602. 用內接多面形的接近法 虽然我們放弃了以曲面的內接多面形作基础的曲面面积概念的定义, 但現在我們又回到这上面来, 并且要证明至少可以如何作一个內接多面形, 它的面积确乎趋向于所給曲面的面积。

我們主要研究一下当区域 (Δ) 本身是一个矩形, 而它的边是与坐标軸平行的情形。

选取曲面 (S) 的确定一側, 因而就規定了它的边界的方向。这个方向可以算作对应于矩形 (Δ) 的边界的方向。我們知道[596], 在这些条件下曲面的法綫方向余弦是由公式

$$\cos \lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos \mu = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

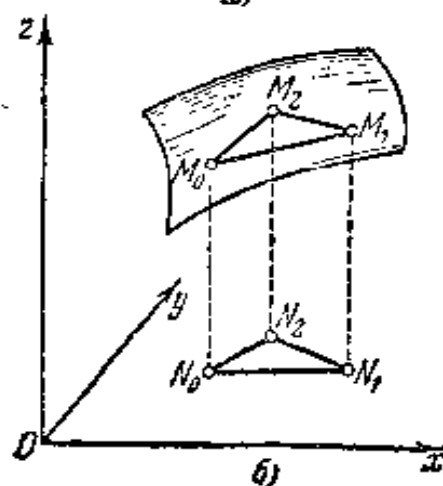
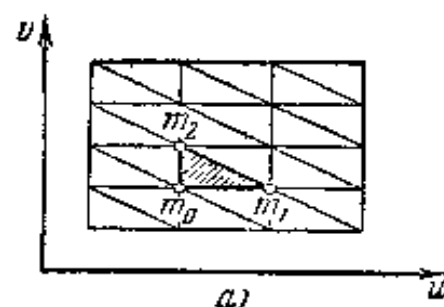


图 91

$$\cos \nu = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

给出, 其中根式取正值。

用和矩形(Δ)的边平行的线把它分成许多小矩形, 再用对角线把每个小矩形分成两个直角三角形(图 91, α)。于是我们实行了区域(Δ)的三角分裂法。设元素三角形之一为 $\Delta m_0 m_1 m_2$, 它的顶点为

$$m_0(u_0, v_0), \quad m_1(u_0 + h, v_0), \quad m_2(u_0, v_0 + k),$$

其中 h 与 k 为同号的数。在曲面(S)上和它们对应的三个点

$$M_0(x_0, y_0, z_0), \quad M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(x_2, y_2, z_2)$$

确定空间内某一三角形 $\Delta M_0 M_1 M_2$ (图 91, β)。所有这样的三角形组成一个内接于(S)的多面形(Σ); 它就是我们要研究的对象。若使每一个这样的三角形的边界的方向恰好按方向 $M_0 M_1 M_2 M_0$ 对应于三角形 $\Delta m_0 m_1 m_2$ 的边界的方向, 则依照 597 日中所规定的一些条款, 多面形(Σ)的一侧就这样地被确定了。

如果把 $\Delta M_0 M_1 M_2$ 射影到 xy 平面上, 则得到顶点为

$$N_0(x_0, y_0), \quad N_1(x_1, y_1), \quad N_2(x_2, y_2)$$

的 $\Delta N_0 N_1 N_2$ 。这一三角形的面积, 我们从解析几何学中知道, 其大小以及符号(考虑到它的定向)都由行列式

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}$$

来表示。按有限增量的公式,

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= x(u_0 + h, v_0) - x(u_0, v_0) = x'_u(u_0 + \theta h, v_0) \cdot h = \\ &= [x'_u(u_0, v_0) + \varepsilon_1] \cdot h, \end{aligned}$$

其中 ε_1 与 h 一起为任意小的量, 不依赖于点 (u_0, v_0) 的位置。^{*} 同样有

$$y_1 - y_0 = (y'_u + \varepsilon_2) \cdot h,$$

$$x_2 - x_0 = (x'_v + \varepsilon_3) \cdot k, \quad y_2 - y_0 = (y'_v + \varepsilon_4) \cdot k,$$

其中各个导数都是在 $u = u_0, v = v_0$ 时计算的, 而各个附有标记的字母 ε 在这里(和以后)都是表示与 h 和 k 一起同为任意小的量, 不依赖于点 (u_0, v_0) 的位置。于是这一个量 σ_{xy} 可写为

^{*} 我们在这里利用到导数 x'_u 的一致连续性。类似的讨论后面也用到。

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{1}{2}hk \begin{vmatrix} x'_u + \epsilon_1 & y'_u + \epsilon_2 \\ x'_v + \epsilon_3 & y'_v + \epsilon_4 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}hk(C + \epsilon_5) = (C + \epsilon_5) \cdot \delta,\end{aligned}\quad (6)$$

其中 δ 是 $\triangle m_0 m_1 m_2$ 的面积。同样, 对于其它两坐标平面上的射影我们又得到:

$$\sigma_{yz} = (A + \epsilon_6) \cdot \delta, \quad \sigma_{zx} = (B + \epsilon_7) \cdot \delta. \quad (6a)$$

现在 $\triangle M_0 M_1 M_2$ 本身的面积 σ 可按照公式

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{yz}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2}$$

来计算, 于是又得到表示式

$$\sigma = \{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + \epsilon_8}\} \cdot \delta. \quad (7)$$

不难看出, 比值

$$\frac{\sigma_{yz}}{\sigma}, \quad \frac{\sigma_{zx}}{\sigma}, \quad \frac{\sigma_{xy}}{\sigma}$$

表示三角形 $\triangle M_0 M_1 M_2$ 平面法线上对应于平面定向的方向余弦。由(6), (6a)与(7)看来, 当 h 与 $k \rightarrow 0$ 时这三个比值趋向于所给曲面的法线方向余弦, 并且对于多面形(Σ)的所有的面都是一样。同样可见, 在所述的极限过程中多面形(Σ)所有的面的直径一致趋向于零。

最后, 把属于形式(7)的一些等式加起来, 不难看出多面形(Σ)的面积

$$\Sigma = \sum \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \delta + \sum \epsilon_8 \cdot \delta,$$

当 h 与 $k \rightarrow 0$ 时恰趋向于曲面的面积(3)。

这一结果自然可推广到当区域(Δ)是由多个矩形组成时的情形。要对于任意一个区域也施行三角分裂法, 那就需要很精密的(虽然也是很基本的)理论, 这我们不去讨论了。

603. 面积定义的特殊情况 再设所给的光滑曲面没有重点。它具有由公式(3)或(3*)所表示的面积 S 。我们假定(s)是在曲面(S)上划出来的某一个由分段光滑的曲线(l)所范围的部分; 与它相应, 有区域(Δ)内一个也由分段光滑的曲线(λ)所范围的部分(δ)。分出(s)后所剩下的曲面部分(S')的面积, 以及(s)本身的面积, 显然分别等于

$$S' = \iint_{(\Delta) - (\delta)} \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad s = \iint_{(\delta)} \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

如果现在图形(s)在曲面上集结于一点或一曲线, 则同样的情形也发生于平面图形(δ), 于是它的面积 δ 趋于零。与此同时 s 也趋于零, 所以

$$\lim S' = S. \quad (8)$$

我們現在假想这同一个曲面是由另一种表示式

$$x = x^*(u^*, v^*), \quad y = y^*(u^*, v^*), \quad z = z^*(u^*, v^*)$$

給出的, 在它上面个别的点处或沿着个别的綫有“奇点”出現(特別是, 在这面数表示式下出現的导数变为无穷大)。把这个点或綫用它的邻域划分出来, 所余下部分(S')的面积像平常一样表为:

$$S' = \iint_{(\Delta^*) - (\delta^*)} \sqrt{E^*G^* - F^{*2}} du^* dv^*,$$

这里星号表示相应于第二表示式的各量。但我們已經知道[見(8)], 当(s)集結于上述的一点或一綫时, S' 应趋于 S ; 因此, 要得到 S 我們可在上面的公式中令区域 δ^* 集結于一点或一綫而取其极限。于是又得到寻常形式的公式

$$S = \iint_{(\Delta^*)} \sqrt{E^*G^* - F^{*2}} du^* dv^*,$$

只是这积分可能成为广义的。

甚至在这样一种情形, 即当曲面(S)一般地是光滑的, 但在个别的点处或沿着个别的綫具有不可除去的(即不依赖于它的表示方法的)奇点, 我們还是利用积分(3*)来表示它的面积, 尽管这积分是广义的但只要它存在就行。显然, 这时我們实际上定义面积 S 为面积 S' 的极限, 即我們把在上面已证明了的等式(8)在这里当作我們起初的定义的简单扩张。

604. 例 1) 求下列各个被割下的曲面部分的面积:

(a) 双曲抛物面 $z = xy$ 被柱面 $x^2 + y^2 = R^2 (x, y > 0)$ 所割;

(б) 椭圆抛物面 $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$ 被柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$ 所割;

(в) 双曲抛物面 $xy = az$ 被柱面 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ 所割;

(г) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 被柱面 $x^2 + y^2 = \rho^2 (\rho < R)$ 所割。

解 (a) 我們有 $p = y, q = x$, 因此按公式(5),

$$S = \iint_{\substack{x, y > 0 \\ x^2 + y^2 \leq R^2}} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy.$$

換为极坐标, 我們求得

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^R r \sqrt{1 + r^2} dr = \frac{\pi}{6} \left[(1 + R^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right].$$

(G) 提示 利用广义极坐标。答 $S = \frac{2}{3} \pi ab [(1+c^2)^{\frac{3}{2}} - 1]$.

(H) 提示 换为极坐标。用极坐标表示的柱面的准线方程为 $r^2 = a^2 \sin 2\theta$. 我們得到

$$S = \frac{2}{3} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(1 + \sin 2\theta)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] d\theta.$$

利用替换 $\theta = \frac{\pi}{4} + \lambda \left(-\frac{\pi}{4} \leq \lambda \leq \frac{\pi}{4} \right)$,

答 $S = \frac{2}{3} a^2 \left(\frac{10}{3} - \frac{\pi}{2} \right).$

(I) 答 $S = 4\pi R(R - \sqrt{R^2 - \rho^2}).$

2) 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 被柱面 $x^2 + y^2 = Rx$ 所割下的部分的面积 (“維維安尼立体”的上下底的面积, 参看 572, 20), 图 48).

解 对于上底来说, 我們有

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad p = -\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{y}{z},$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

于是

$$S = 2R \int \int_{(D)} \frac{dr dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

并且由圆周 $x^2 + y^2 = Rx$ 所范围的圆就是这积分的区域。

换为极坐标, 我們得到[参看 586, 6)]

$$S = 2R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} \frac{r dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 4R \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} \frac{r dr}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

实行积分, 最后求得 $S = 4R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).$

因为半球的面积等于 $2\pi R^2$, 所以半球被“維維安尼立体”割去后所剩下的那部分的面积等于 $4R^2$, 因而可用半径 R 表示而不涉及任何无理数. 参看 572, 20) 中与这相关的关于“維維安尼立体”的体积公式的附注。

附注 当然, 在区间 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 上的积分不能用在区间 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 上的积分的二倍去

替代。可是，一开始计算由 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 的积分时，就必须记住里面的积分表示式

$$\int_0^{R \cos \theta} \frac{r dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \left[-\sqrt{R^2 - r^2} \right]_{r=0}^{r=R \cos \theta} = R - R\sqrt{\sin^2 \theta}$$

对于 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 应写成这一个形式： $R(1 - \sin \theta)$ ，而对于 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$ 应写成另一个形式： $R(1 + \sin \theta)$ [因为根式总为正的，而在第一情况下正弦具有正号，但在第二情况下正弦具有负号]。如果不注意这点，就会得到错误的结果。

3) 求 (a) 锥面 $y^2 + z^2 = x^2$ 落在柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 内的部分的面积；(b) 锥面 $z^2 = 2xy$ ($x, y \geq 0$) 包含在平面 $x=a$ 与 $y=b$ 之间的部分的面积；(c) 前一题中的锥面落在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 内的部分的面积。

提示 (a) $S = 8\sqrt{2} \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} dy \int_y^{\sqrt{R^2 - y^2}} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 2\pi R^2.$

(b) $S = \sqrt{2} \int_0^b dy \int_0^a \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \right) dx = \frac{4}{3}(a+b)\sqrt{2ab}.$

(c) 两曲面的交线落在平面 $x+y=\pm a$ 内。于是，

$$\begin{aligned} S &= 2\sqrt{2} \iint_{\substack{x, y > 0 \\ x+y \leq a}} \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \right) dx dy = \\ &= 4\sqrt{2} \int_0^a \sqrt{x} dx \int_0^{a-x} \frac{dy}{\sqrt{y}} = 8\sqrt{2} \int_0^a \sqrt{x(a-x)} dx = \pi\sqrt{2} a^2. \end{aligned}$$

4) 证明任意一个在旋转锥面

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

的一腔上(譬如说，上面一部分的一腔)的图形的面积 S 与它在平面 xy 上的射影的面积成比例。

提示 从显方程 $z = \frac{c}{a} \sqrt{x^2 + y^2}$ 着手并利用公式(5)。

5) 给定曲面 $z = \arcsin(\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y)$ ，求它包在平面 $x=a$ 与 $x=b$ ($0 < a < b$) 中间的部分的面积。

解 我們有

$$p = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} y}{\sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y}}, \quad q = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y}{\sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y}},$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}{\sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y}}.$$

积分的区域由条件

$$\alpha \leq x \leq b, \quad |\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y| \leq 1$$

来确定。作替换 $\operatorname{sh} x = \xi, \operatorname{sh} y = \eta$, 于是新变量的变化区间是

$$\operatorname{sh} \alpha \leq \xi \leq \operatorname{sh} b, \quad -\frac{1}{\xi} \leq \eta \leq \frac{1}{\xi}.$$

由此可见,

$$S = \int_{\operatorname{sh} \alpha}^{\operatorname{sh} b} d\xi \int_{-\frac{1}{\xi}}^{\frac{1}{\xi}} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \xi^2 \eta^2}} = \pi \int_{\operatorname{sh} \alpha}^{\operatorname{sh} b} \frac{d\xi}{\xi} = \pi \log \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} \alpha}.$$

6) 求柱面 $x^2 + y^2 = Rx$ 包在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 内的部分[“維維安尼立体”的侧面]的面积。

解 曲面的前面一部分的方程为 $y = \sqrt{Rx - x^2}$ 。自变量 (x, z) 的变域是由 z 轴与抛物线 $z = \sqrt{R^2 - Rx}$ 所包围的区域。因为

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2}R - x}{\sqrt{Rx - x^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0,$$

所以

$$\begin{aligned} S &= R \int_0^R \int_{-\sqrt{R^2 - Rx}}^{\sqrt{R^2 - Rx}} \frac{dz dx}{\sqrt{Rx - x^2}} = \\ &= 2R\sqrt{R} \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4R^2. \end{aligned}$$

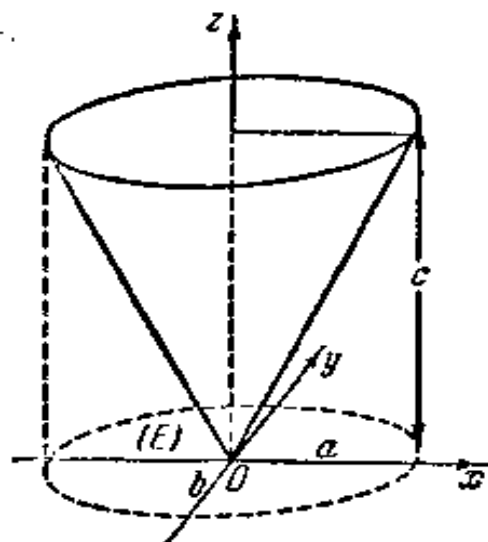


图 92

[参照 338, 4).]

7) 求一锥面的侧面积, 它的高等于 c 它的底是一个半轴为 a 与 b ($a > b$) 的椭圆, 并且高通过底的中心。

解 若把坐标原点取在锥的顶点, 并作 xy 平面平行于它的底(图 92), 则锥面的方程为

$$z = c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2},$$

而所求的面积

$$S = \iint_{(E)} \sqrt{\frac{\left(\frac{\alpha x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\beta y}{b}\right)^2}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}} dx dy,$$

其中 (E) 表椭圆盘

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1,$$

并且

$$\alpha = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{a}, \quad \beta = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{b}.$$

改用广义极坐标, 我们得到

$$S = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\alpha^2 \cos^2 \theta + \beta^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

这一结果不难化为第二型全椭圆积分:

$$S = 2a\sqrt{b^2 + c^2} E(k), \quad \text{其中 } k = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}}.$$

8) 求曲线 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$, $f(x) \geq 0$) 绕 x 轴旋转所成的旋转面的面积。

解 不难看出旋转面的方程是

$$y^2 + z^2 = [f(x)]^2,$$

而它的上半部的方程是

$$z = \sqrt{[f(x)]^2 - y^2}.$$

由此, 得

$$p = \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}}, \quad q = \frac{-y}{\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = f(x) \frac{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}{\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}}.$$

于是所求的面积由积分

$$S = 2 \iint_{(D)} f(x) \frac{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}{\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}} dx dy$$

来表示, 其中 (D) 是由 xy 平面上的线 $x=a, x=b, y=f(x)$ 和 $y=-f(x)$ 所围成的区域。

化为逐次积分, 我们求得

$$S = 2 \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \int_{-f(x)}^{f(x)} \frac{dy}{\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}}.$$

因为单面的积分等于 π , 故又得到我们熟知的公式[335(22)]:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

读者大概已发觉, 在问题 2)–8) 中我们全部时间用在计算第 603 目中已讲过的特殊情形下的面积。

9) 利用球面的球坐标参数表示式

$$\begin{aligned} x &= R \sin \varphi \cos \theta, \quad y = R \sin \varphi \sin \theta, \quad z = R \cos \varphi \\ (0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi) \end{aligned}$$

来解问题 2)。

按导数的矩阵

$$\begin{vmatrix} R \cos \varphi \cos \theta & R \cos \varphi \sin \theta & -R \sin \varphi \\ -R \sin \varphi \sin \theta & R \sin \varphi \cos \theta & 0 \end{vmatrix}$$

容易求到球面的高斯系数:

$$E = R^2, \quad F = 0, \quad G = R^2 \sin^2 \varphi, \quad \text{因此 } \sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin \varphi.$$

我们只考虑落在第一卦限内的所要研究的曲面的四分之一。对于“维维安尼曲线”(即球面与柱面的交线)上的点(在第一卦限范围内)有 $\varphi + \theta = \frac{\pi}{2}$ 。

实际上, 把 x 与 y 用 φ 与 θ 表示的式子代入柱面方程 $x^2 + y^2 = R^2$, 我们得到 $\sin \varphi = \cos \theta$ 。但因在所考虑的点上显然有 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 与 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, 于是推得 $\varphi + \theta = \frac{\pi}{2}$ 。

根据上述, 把参数 φ 与 θ 的变化范围确定出来, 我们按公式(3*)得到

$$S = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta} \sin \varphi d\varphi = 4R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

由此可见, 我们得到了业已知道的结果而这时却避免了积分号下面函数的不连续性。

10) 考虑所谓的一般螺旋曲面[219, 5)], 它是由曲线

$$x = \varphi(u), \quad z = \psi(u), \quad [\varphi(u) \geq 0]$$

(落在 xy 平面内) 繞着 z 軸轉并順着 z 軸作螺旋运动时所画成的。它的方程 (如果用 v 表示它的轉动角度) 是

$$x = \varphi(u) \cos v, \quad y = \varphi(u) \sin v, \quad z = \psi(u) + cv.$$

按导数的矩陣

$$\begin{vmatrix} \varphi'(u) \cos v & \varphi'(u) \sin v & \psi'(u) \\ -\varphi(u) \sin v & \varphi(u) \cos v & c \end{vmatrix}$$

作成曲面的高斯系数:

$$E = [\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2, \quad F = c\psi'(u), \quad G = [\varphi(u)]^2 + c^2.$$

因此, 表示式

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\{[\varphi(u)]^2 + c^2\} \{[\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2\} - c^2[\psi'(u)]^2}$$

只依赖于 u , 一般說来, 簡化了計算。

11) 利用这些結果来确定下連部分的面积:

a) 尋常的螺旋曲面

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = cv$$

被柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 与平面 $z = 0$ 及 $z = 2\pi c$ (因此 $0 \leq v \leq 2\pi$) 割下的部分;

6) 螺旋曲面

$$x = \operatorname{tg} u \cos v, \quad y = \operatorname{tg} u \sin v, \quad z = \frac{\sin u}{2 \cos^2 u} + \log \sqrt{\frac{1 + \sin u}{\cos u}} + v$$

上与参数在矩形

$$0 \leq u \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

中变化相对应的部分。

(a) 解 在这种情况下

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + c^2},$$

因此

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{u^2 + c^2} du dv = \\ &= 2\pi \left[\frac{a}{2} \sqrt{a^2 + c^2} + \frac{c^2}{2} \log \frac{a + \sqrt{a^2 + c^2}}{c} \right]. \end{aligned}$$

6) 答 $S = \frac{8}{3}\pi.$

12) 如果在曲线作螺旋运动的问题上令 $c=0$, 就是说没有前进的运动, 则得到螺旋曲面:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u) \cos v, \quad y = \varphi(u) \sin v, \quad z = \psi(u) \\ (\alpha \leq u \leq \beta, \quad 0 \leq v \leq 2\pi). \end{aligned}$$

于是

$$\sqrt{EG - F^2} = \varphi(u) \sqrt{[\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2},$$

而这曲面的面积就可用下公式表示:

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u) \sqrt{[\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2} du.$$

这公式推广了问题 8) 的结果, 但已无须引用广义积分. [参照 335(21).]

13) 从一般的公式(3*)出发, 证明第 337 目中推出的关于柱面的部分的面积公式(25)是正确的。

14) 有时候适宜用极坐标或球坐标 r, θ, φ 来给出曲面, 它们与寻常的直角坐标的联系就是熟知的公式:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi \\ (r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi). \end{aligned}$$

这时, 假定向径 r 是用角度 θ 与 φ 的函数给出:

$$r = r(\varphi, \theta)$$

(曲面的极坐标方程), 求曲面在这种情形下的面积表示式。

解 只要取 φ 与 θ 当作参数就可以利用一般表示式(3*)。上面所写的公式恰好给出曲面的参数表示, 只要认为 r 已由曲面的极坐标方程中 φ 与 θ 所表示的式子所替代。

按照导数的矩阵

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \sin \varphi + r \cos \varphi \right) \cos \theta & \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \sin \varphi + r \cos \varphi \right) \sin \theta & \frac{\partial r}{\partial \varphi} \cos \varphi - r \sin \varphi \\ \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \cos \theta - r \sin \theta \right) \sin \varphi & \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \sin \theta + r \cos \theta \right) \sin \varphi & \frac{\partial r}{\partial \theta} \cos \varphi \end{vmatrix}$$

容易求出

$$E = \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2 + r^2, \quad F = \frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial \theta}, \quad G = \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 + r^2 \sin^2 \varphi,$$

$$EG - F^2 = \left[\left(r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2 \right) \sin^2 \varphi + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 \right] r^2.$$

因此, 最后有

$$S = \iint_{(\Delta)} \sqrt{\left(r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2\right) \sin^2 \varphi + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} \cdot r \, d\varphi \, d\theta, \quad (9)$$

其中 (Δ) 是变元 φ, θ 的变化区域。

在球坐标下的面积元素是这样的:

$$dS = \sqrt{\left(r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2\right) \sin^2 \varphi + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} \cdot r \, d\varphi \, d\theta.$$

15) 计算曲面

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2 xy$$

的面积。

解 这里正适宜运用公式(9)。曲面的极坐标方程是:

$$r = a \sin \varphi \sqrt{\sin 2\theta}.$$

于是

$$\sqrt{\left(r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2\right) \sin^2 \varphi + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} = \frac{a \sin \varphi}{\sqrt{\sin 2\theta}},$$

再由公式(9)得到

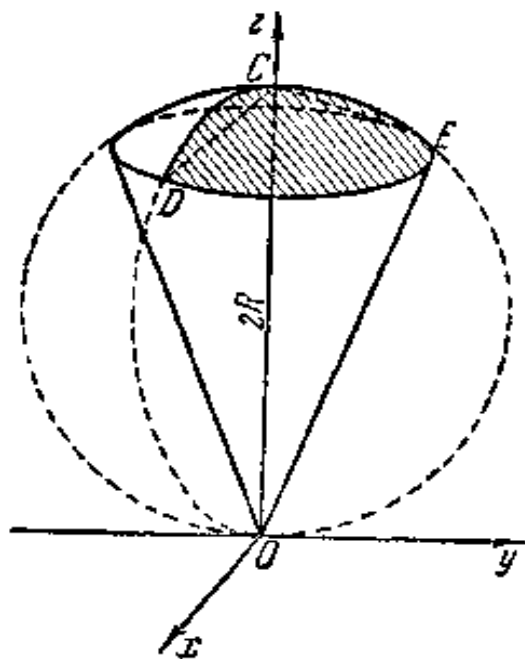


图 93

$$S = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \, d\varphi \, d\theta = \frac{1}{2} \pi^2 a^2.$$

16) 考虑半径为 R 的球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz,$$

它与 xy 平面相切于坐标原点。试求它包在顶点为原点的锥面 $z^2 = Ax^2 + By^2$ 内的部分的面积(图93)。

解 从球面的极坐标方程 $r = 2R \cos \varphi$ 出发, 这里也可以利用公式(9)。我们有

$$S = \iint_{(\Delta)} 4R^2 \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta,$$

其中对 φ 与 θ 积分的区域 (Δ) 是由曲线

$$(A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi$$

所范围的。如果归结为求曲面落在第一卦限内的那个部分的面积, 则对于0与 $\frac{\pi}{2}$ 之间的任一个 θ , 角度 φ 由0变到角度 $\varphi_0 = \varphi_0(\theta)$, 而

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_0 = \frac{1}{A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta}.$$

显然,

$$S = 16R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\varphi_0} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi.$$

但
$$\int_0^{\varphi_0} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \sin^2 \varphi_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta},$$

于是最终得

$$S = 8R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(A+1)\cos^2 \theta + (B+1)\sin^2 \theta} = \frac{4\pi R^2}{\sqrt{(A+1)(B+1)}}.$$

有趣的是, 这个面积与以 DC 及 EC 为半轴的椭圆(见图)的面积相同。

17) 证明曲面

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2$$

的面积与椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的面积相同, 如取

$$a = \frac{\beta\gamma}{\alpha}, \quad b = \frac{\gamma\alpha}{\beta}, \quad c = \frac{\alpha\beta}{\gamma}.$$

证 在球坐标下这曲面的方程是:

$$r^2 = \alpha^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \beta^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \gamma^2 \cos^2 \varphi,$$

于是按公式(9)它的面积等于

$$S_1 = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\alpha^4 \cos^2 \theta + \beta^4 \sin^2 \theta) \sin^2 \varphi + \gamma^4 \cos^2 \varphi} \sin \varphi d\varphi d\theta.$$

另一方面, 如果从椭球面的寻常的参数表示式

$$x = a \sin \varphi \cos \theta, \quad y = b \sin \varphi \sin \theta, \quad z = c \cos \varphi$$

$$(0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

出发, 则导数矩阵的行列式等于

$$A = cb \sin^2 \varphi \cos \theta, \quad B = ac \sin^2 \varphi \sin \theta, \quad C = ab \sin \varphi \cos \varphi,$$

而按公式(3)椭球面的面积得表为:

$$S = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(c^2 b^2 \cos^2 \theta + c^2 a^2 \sin^2 \theta) \sin^2 \varphi + a^2 b^2 \cos^2 \varphi} \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta.$$

我們看出, S_1 与 S 的表示式实际上是全同的, 只要令

$$cb = \alpha^2, \quad ca = \beta^2, \quad ab = \gamma^2$$

或

$$a = \frac{\beta\gamma}{\alpha}, \quad b = \frac{\gamma\alpha}{\beta}, \quad c = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$$

这就是所要证明的。

18) 我們現在来确定三軸橢球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c > 0)$$

的面积。

把曲面在第一卦限內的方程写成显式:

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

我們有

$$p = -c \frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}, \quad q = -c \frac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}},$$

因此

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{1 - \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) \frac{x^2}{a^2} - \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) \frac{y^2}{b^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

为簡便起见, 我們令

$$1 - \frac{c^2}{a^2} = \alpha^2, \quad 1 - \frac{c^2}{b^2} = \beta^2,$$

于是所求的面积, 由公式(5), 可由积分

$$S = 8 \iint_{\substack{x, y \geq 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1}} \sqrt{\frac{1 - \alpha^2 \frac{x^2}{a^2} - \beta^2 \frac{y^2}{b^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \, dx \, dy$$

来表示。利用替换 $\frac{x}{a} = \xi$, $\frac{y}{b} = \eta$, 上面的积分可变为下面的形状:

$$S = 8ab \int_{\substack{\xi, \eta \geq 0 \\ \xi^2 + \eta^2 \leq 1}} \sqrt{\frac{1 - \alpha^2 \xi^2 - \beta^2 \eta^2}{1 - \xi^2 - \eta^2}} d\xi d\eta.$$

在这里需要利用喀塔朗的二重积分变换公式[参考 572, 15) 与 592, 16)]。我們注意, 曲线

$$\sqrt{\frac{1 - \alpha^2 \xi^2 - \beta^2 \eta^2}{1 - \xi^2 - \eta^2}} = u = \text{const.} \quad (u \geq 1)$$

不是别的, 恰是椭圆

$$\frac{\xi^2}{\frac{u^2 - 1}{u^2 - \alpha^2}} + \frac{\eta^2}{\frac{u^2 - 1}{u^2 - \beta^2}} = 1,$$

因此它的面积的四分之一是

$$\int_{\substack{\xi, \eta \geq 0 \\ \sqrt{\frac{1 - \alpha^2 \xi^2 - \beta^2 \eta^2}{1 - \xi^2 - \eta^2}} \leq u}} d\xi d\eta = \frac{\pi}{4} \frac{u^2 - 1}{\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}}.$$

于是按喀塔朗公式,

$$S = 2\pi ab \int_1^{\infty} u d \frac{u^2 - 1}{\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}}.$$

我們来变换这个椭圆积分。

首先用分部积分法: *

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} u d \frac{u^2 - 1}{\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}} &= \\ &= \left\{ \frac{u(u^2 - 1)}{\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}} - \int \frac{(u^2 - 1) du}{\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}} \right\} \Big|_1^{+\infty}. \end{aligned}$$

再实行替换

$$u = \frac{\alpha}{\sin \varphi}, \quad du = -\frac{\alpha \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} d\varphi,$$

并令 φ 由 $\mu = \arcsin \alpha$ 变到 0。因此, 一方面有

$$\frac{u(u^2 - 1)}{\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)}} = \frac{\alpha^2 - \sin^2 \varphi}{\alpha \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

如果令 $k = \frac{\beta}{\alpha}$ ($k < 1$)。另一方面又有

* 注意在这里无论是积分外面的項的双重代入也好, 由 1 到 $+\infty$ 的单积分也好, 单独起来就都没有意义。当 $u = +\infty$ 时出現不定型 $\infty - \infty$!

$$\begin{aligned}
-\frac{(u^2-1)du}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}} &= \left(\frac{\alpha^2}{\sin^2 \varphi} - 1 \right) \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \sin^2 \varphi}} = \\
&= \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \sin^2 \varphi}}{\sin^2 \varphi} - \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \sin^2 \varphi}} \right) d\varphi = \\
&= \left(\alpha \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{\sin^2 \varphi} - \frac{1 - \beta^2}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right) d\varphi,
\end{aligned}$$

可見在双重代入記号下的积分成为下形

$$\alpha \int \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{\sin^2 \varphi} d\varphi - \frac{1 - \beta^2}{\alpha} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

把第一項分部积分, 逐次地将这式化为:

$$\begin{aligned}
&= \alpha \operatorname{ctg} \varphi \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - k^2 \alpha \int \frac{\cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi - \\
&\quad - \frac{1 - \beta^2}{\alpha} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = -\alpha \operatorname{ctg} \varphi \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - \\
&\quad - \frac{1}{\alpha} \int \frac{1 - k^2 \alpha^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = -\alpha \operatorname{ctg} \varphi \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - \\
&\quad - \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \alpha \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.
\end{aligned}$$

然后把在积分以外的兩項合并起来, 有:

$$\frac{\alpha^2 - \sin^2 \varphi}{\alpha \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - \alpha \operatorname{ctg} \varphi \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2 \cos^2 \varphi - 1) \sin \varphi}{\alpha \cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

按 φ 由 $\mu = \arcsin \alpha$ 到 0 作双重代入, 得到这式的这样的一結果: $\sqrt{(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)}$. 再对积分作双重代入的計算, 最后得到由勒戎德首先給出的公式

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi ab \left\{ \sqrt{1 - \alpha^2} \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} F(\mu, k) + \alpha E(\mu, k) \right\} = \\
&= 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}} \left\{ c^2 F(\mu, k) + (\alpha^2 - c^2) E(\mu, k) \right\}
\end{aligned}$$

这里

$$u = \arcsin \frac{\sqrt{\alpha^2 - c^2}}{\alpha},$$

$$k = \frac{a}{b} \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}}.$$

19) 高斯对于曲面曾引进过在一所給点处的全曲率概念, 它与平面曲綫的曲率概念完全类似[238].

設給定一曲面及其上一点. 取这曲面上圍着这一点的任一部分(S), 并考虑在(S)的各个点处所有法綫的集合. 画一个以原点为中心的單位球面, 并由原点出发作平行于上述所有法綫的射綫; 它們割下球面的某一部分(Σ). 它的面积 Σ 是所画的一切射綫填滿了

* 这样, 我們最后就避免了上述的它在 $\varphi = 0$ 时的不定性。

的立体角的度量: 这和第 238 节定义中所说的角 ω 相当。比值 $\frac{\Sigma}{S}$ 当 (S) 收缩为所给的点时的极限叫做这曲面在这点处的全曲率。我们提出计算这曲率的问题。

假定曲面由方程

$$z = f(x, y)$$

给出, 并且函数 f 具有连续的一阶及二阶导数

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

此外, 设行列式

$$\frac{D(p, q)}{D(x, y)} = rt - s^2 \quad (10)$$

不为零(在所考虑的点处及其附近)。

按公式(56)有

$$S = \iint_{(D)} \frac{dx dy}{|\cos \nu|}, \quad \Sigma = \iint_{(D')} \frac{dx' dy'}{|\cos \nu|},$$

其中 (D) 与 (D') 分别为 (S) 与 (Σ) 在 xy 平面上的射影, 并且对于这两曲面上的对应点 (x, y, z) 与 (x', y', z') 角度 ν 是相同的。

用变数 x, y 来变换第二个积分。因为显然有

$$x' = \cos \lambda = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad y' = \cos \mu = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\left(z' = \cos \nu = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right),$$

所以

$$\frac{D(x', y')}{D(p, q)} = \frac{1}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

只要注意(10)式, 最后就得到

$$\frac{D(x', y')}{D(x, y)} = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

在这种情形下, 按照变数更换公式, 得

$$\Sigma = \iint_{(D)} \frac{|rt - s^2|}{(1+p^2+q^2)^2} \frac{dx dy}{|\cos \nu|}.$$

把 S 与 Σ 都对于区域 (D) 来微分[568], 现在不难得到

$$\lim_{(S) \rightarrow M} \frac{\Sigma}{S} = \frac{|rt - s^2|}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

这就是所要求的全曲率的表示式。

20) 公式(56)可以很简单地得到, 只要从曲面面积的另一定义出发(这里是对曲面 (S)

由显方程表示的情形而言)。

分割曲面(S)成多个部分(S_i)($i=1, 2, \dots, n$)；按照这分法它在 xy 平面上的射影(D)被分割成许多部分(D_i)。在(S_i)的某一点(M_i)处作曲面的切面并把面积(S_i)平行于 z 轴地射影到这切面上。用 T_i 表这所得的平面图形的面积, 显然有

$$D_i = T_i \cdot |\cos \nu_i|,$$

其中 ν_i 是曲面在点 M_i 处的法线与 z 轴作成的角。只要把曲面的面积 S 理解为这些平面图形的面积之和的极限, 则立得结果

$$S = \lim \sum_i T_i = \lim \sum_i \frac{D_i}{|\cos \nu_i|} = \iint_{(D)} \frac{dx dy}{|\cos \nu|},$$

因为所写出来的和显然是对最后这一积分的积分和。

我们要着重指出, 从这个改变了的曲面面积的定义, 虽然很简单地在这里导出了最终的公式, 但有着本质上的缺点: 它在形式上是与坐标三面形的选择有关(射影要平行于 z 轴!), 而且只能应用到个别形式的曲面上。

21) 假由光滑曲面(S)的参数表示式

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v) \quad z=z(u, v) \quad ((u, v) \text{ 属于 } (\Delta))$$

借公式*

$$u=U(u^*, v^*), \quad v=V(u^*, v^*) \quad ((u^*, v^*) \text{ 属于 } (\Delta^*))$$

之助, 我们得到它的另一个表示式

$$x=x^*(u^*, v^*), \quad y=y^*(u^*, v^*), \quad z=z^*(u^*, v^*),$$

就这表示式言它同样地没有奇异性。不难直接证明, 关于曲面面积 S 的公式(3)这时变为类似的公式

$$S = \iint_{(\Delta^*)} \sqrt{A^{*2} + B^{*2} + C^{*2}} du^* dv^*$$

(对于新的表示式我们用星号记在所有各个量上)。

实际上, 令

$$I = \frac{D(u, v)}{D(u^*, v^*)},$$

我们由所熟悉的函数行列式性质得

$$A^* = AI, \quad B^* = BI, \quad C^* = CI.$$

由此便看出, 在 (Δ^*) 内 I 异于零; 因为不这样, 则在新的表示式下曲面就会有奇异性。按照

* 函数 U 与 V 连同它们的偏导数都假定是连续的。

变数更换公式, 立得

$$\begin{aligned}\iint_{(\Delta)} \sqrt{A^2+B^2+C^2} du dv &= \iint_{(\Delta^*)} \sqrt{A^2+B^2+C^2} \cdot |I| du^* dv^* = \\ &= \iint_{(\Delta^*)} \sqrt{A^{*2}+B^{*2}+C^{*2}} du^* dv^*,\end{aligned}$$

这就是所需要证明的。

§3 第一型曲面积分

605. 第一型曲面积分的定义 第一型的曲面积分是二重积分同样自然的推广, 正像第一型曲线积分对于简单定积分一样。

这一推广是这样建立的。设 (S) 是某一个由分段光滑的边界所范围的光滑的(或分片光滑的)双侧曲面, 函数 $f(M) = f(x, y, z)$ 定义于 (S) 的点上。用任意画的一些分段光滑的曲线把曲面分成 (S_1) , (S_2) , $\dots$, (S_n) 诸部分。在各个部分 (S_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) 上各任取一点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$, 计算函数在这点的值

$$f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i),$$

并用对应的曲面部分的面积 S_i 来乘它。作出所有这样的乘积的和:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(M_i) S_i = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) S_i,$$

像对以前讨论过的许多和一样, 我们称这个和为积分和。

若当各个部分 (S_i) 的直径趋于零时积分和有一个确定的有限极限而不依赖于曲面 (S) 的分法及点 M_i 的选择, 则这极限叫做函数 $f(M) = f(x, y, z)$ 沿曲面 (S) 的(第一型*)曲面积分, 并用记号

$$I = \iint_{(S)} f(M) dS = \iint_{(S)} f(x, y, z) dS \quad (1)$$

来表示, 其中 dS 表示面积 S_i 的元素。

* 不同于以后[609]将要讨论的第二型曲面积分。

606. 化为寻常的二重积分 我們只討論沒有重点的不封閉的光滑曲面 (S) [594, 2°]。

設 $f(x, y, z)$ 是任何一个定义于曲面 (S) 上的点函数并有界:

$$|f(x, y, z)| \leq L, \quad (2)$$

則等式

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} f(x, y, z) dS &= \\ &= \iint_{(\Delta)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv, \end{aligned} \quad (3)$$

在这两个积分中有一个存在 (也就引起另一个存在) 的假定下是成立的。

因此, 要化第一型曲面积为寻常的二重积分, 只須用坐标 x, y, z 的参数表示式来代替它們, 而用面积元素 dS 在曲綫坐标下的表示式来代替 dS 。

我們来給出所說的这个断語的证明。

像曾經指出过的情形一样, 与用分段光滑的一些曲綫来分割曲面 (S) 的方法相对应, 有区域 (Δ) 的同样分法, 反轉过来也是如此。

用对应的方法分割曲面 (S) 成 $(S_1), (S_2), \dots, (S_n)$ 諸部分, 而分区域 (Δ) 成 $(\Delta_1), (\Delta_2), \dots, (\Delta_n)$ 諸部分, 并在每个部分 (S_i) 上与每个部分 (Δ_i) 上分別地取彼此对应的点 (x_i, y_i, z_i) 与 (u_i, v_i) , 使得

$$x_i = x(u_i, v_i), y_i = y(u_i, v_i), z_i = z(u_i, v_i). \quad (4)$$

作关于积分(1)的积分和:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) S_i.$$

按照第 601 目中一般的公式(3*), 有

$$S_i = \iint_{(\Delta_i)} \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

应用中值定理, 得

$$S_i = [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} \cdot \Delta_i,$$

其中 $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ 是区域 (Δ_i) 的某一个点。

利用 S_i 的这个表示式并记住(4)式, 我們可以写和 σ 为:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \cdot \Delta_i.$$

在这个形状下它相像于(3)中第二个积分的积分和:

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^n f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \cdot \Delta_i.$$

在和 σ 与 σ^* 之间的区别是这样的, 在后一个和中复合函数 $f(\cdots)$ 与根式 $\sqrt{\cdots}$ 都恰好是在同一个(任意取的)点 (u_i, v_i) 处计算的, 而在第一个和中复合函数 $f(\cdots)$ 是在点 (u_i, v_i) 处计算的, 但表示式 $\sqrt{\cdots}$ 则是在点 $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ 处计算的(点 $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ 要由中值定理来规定而不是任意的)。

考虑这两个和的差:

$$\sigma - \sigma^* = \sum_i f(\cdots) \left\{ [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} - [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \right\} \Delta_i.$$

设 $\varepsilon > 0$ 为任意小的一个数。由函数 $\sqrt{EG - F^2}$ 的(一致)连续性, 我們知道当所有的区域 (Δ_i) 的直径足够小时, 有

$$\left| [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} - [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \right| < \varepsilon.$$

把条件(2)估计进去, 不难得到

$$|\sigma - \sigma^*| < \varepsilon L \Delta,$$

因此

$$\lim (\sigma - \sigma^*) = 0.$$

由此可見, 从这两个和中一个和的极限存在可推到另一个和的极

限存在并与它相等。这就证明了我們的断語。

特別, (3)式右端的二重积分, 也就是說左端的曲面积分, 在函数 $f(x, y, z)$ 沿曲面 (S) 的連續性的假定下是存在的。

如果曲面 (S) 是由显方程

$$z = z(x, y)$$

給出, 則公式(3)具有下形:

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dS = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy, \quad (5)$$

其中 (D) 表曲面 (S) 在 xy 平面上的射影,

因为 $\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{1}{|\cos \nu|}$ (其中的 ν 像尋常一样是曲面的法綫与 z 軸之間的角), 所以公式(5)又可写为:

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dS = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) \frac{dx dy}{|\cos \nu|}. \quad (5^*)$$

直到这里我們都假定了在它上面展布积分的曲面 (S) 是光滑的而且是开的。我們的結果容易推广到分片光滑的曲面情形, 無論这曲面是开的或是閉的。

607. 第一型曲面积分在力学上的应用 1° 当质点以一定的密度分布在一曲面的各点处时, 我們可以利用所說的积分来确定这块物质的曲面的质量、矩、重心的坐标以及其它类似的量。

因为和以前討論过的质量在平面形上分布的情形比較起来, 这里并没有什么新的东西, 所以我們只在习题中去讲这些問題。

2° **单层的引力** 在研究分布于曲面上的质量的引力时, 自然要考虑到第一型曲面积分。

設沿着一曲面 (S) 連續地分布有质量, 它在曲面的每一点 $M(x, y, z)$ 处都有給定的密度 $\rho(M) = \rho(x, y, z)$. * 再設在点 $A(\xi, \eta, \zeta)$ 处 (在曲面之外) 有一单位质量。如果以牛頓引力定律 (万有引力定律) 为根据, 試确定点 A 被曲面 (S) 吸引的力 $\vec{F}$ 的大小与方向。

假若点 A 仅被一个质点 $M(x, y, z)$ 所吸引, 集中在 M 上的质量是 m , 則引力的大小等于

* 在这情形下說的是单层 (与我們不考虑的双层不同)。

$$F = \frac{m}{r^2}, *$$

其中 r 表距离 AM , 即

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}. \quad (6)$$

因为这力是朝着由 A 到 M 的方向, 所以它的方向余弦是

$$\frac{x-\xi}{r}, \quad \frac{y-\eta}{r}, \quad \frac{z-\zeta}{r},$$

于是引力 $\vec{F}$ 在坐标轴上的射影可表为:

$$F_x = m \frac{x-\xi}{r^3}, \quad F_y = m \frac{y-\eta}{r^3}, \quad F_z = m \frac{z-\zeta}{r^3}. \quad (7)$$

在吸引的质点为一系时, 这些表示式各应以类似的一些表示式的和来代替; 最后, 当质量是连续地沿着曲面分布时, 积分就代替和而出现。

应用寻常的讲述方法, 可以把具有质量 ρdS 的曲面元素 dS 看作集中在它的一个点 $M(x, y, z)$ 上。这一个点对 A 所发生的引力在坐标轴上具有射影[参照(7)]:

$$dF_x = \rho \frac{x-\xi}{r^3} dS, \quad dF_y = \rho \frac{y-\eta}{r^3} dS, \quad dF_z = \rho \frac{z-\zeta}{r^3} dS,$$

其中 r 是由公式(6)表示的距离 AM 。现在只要把这些表示式“加”起来, 便得到单层的引力 $\vec{F}$ 在坐标轴上的射影公式:

$$F_x = \iint_{(S)} \rho \frac{x-\xi}{r^3} dS, \quad F_y = \iint_{(S)} \rho \frac{y-\eta}{r^3} dS, \quad F_z = \iint_{(S)} \rho \frac{z-\zeta}{r^3} dS. \quad (8)$$

于是力 $\vec{F}$ 的大小方向都已完全确定。

假若被引点 A 本身也在曲面 (S) 上, 则引力在坐标轴上的射影仍然由积分(8)来表示, 不过这时积分是广义的, 因为在点 A 的近邻各积分号下的函数不再是有界的。

3° 单层的位势 在一个吸引点 $M(x, y, z)$ 的情况下, 我们已知道引力在坐标轴上的射影具有表示式(7)。不难看出, 这三个射影是函数

$$W(\xi, \eta, \zeta) = \frac{m}{r}$$

对于 ξ, η, ζ 的偏导数, 这一函数叫做点 M 的场对于点 A 的牛顿位势[参照 541, 1)]。

如果场由质点系形成, 则位势是由这种形式的分式的和来表示, 并且位势对于 ξ, η, ζ 的导数仍然给出引力在坐标轴上的射影。

* 像寻常一样, 为了书写简便计, 我们用 γ 来代替“引力常数”, 即在牛顿公式(与单位的选择有关系)中的比例乘数。

于是我們很自然地得到, 以密度 ρ 分布在曲面 (S) 上面作用于点 A 的单层位势的表示式:

$$W(\xi, \eta, \zeta) = \iint_{(S)} \rho \frac{dS}{r}. \quad (9)$$

問題只发生在, 对于这位势來說, 基本性质

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = F'_x, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} = F'_y, \quad \frac{\partial W}{\partial \zeta} = F'_z \quad (10)$$

是否能够保持不变, 其中 F'_x, F'_y, F'_z 是单层的引力 $\vec{F}$ 在坐标軸上的射影并且是由公式(8)确定的。

如果点 A 不在曲面上, 就是說連續性毫无破坏, 則不难证明, 在积分(9)对于 ξ, η , 或 ζ 施行微分时, 萊布尼茲的法則是可用的(这只需要重演一遍我們已熟悉的推理)。用这种方法, 在所考虑的质量分布的情况下关系式(10)可得到证实。

608 例 1) 計算曲面积分:

$$(a) \quad I_1 = \iint_{(S)} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} dS,$$

$$(b) \quad I_2 = \iint_{(S)} \frac{dS}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

其中 (S) 表示椭球面:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c > 0).$$

解 (a) 如果采用这椭球面的表示式:

$$x = a \sin \varphi \cos \theta, \quad y = b \sin \varphi \sin \theta, \quad z = c \cos \varphi$$

$$(0 \leq \varphi \leq \pi; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

則[604, 17)] 曲面元素可表为下面的形状

$$dS = abc \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi \sin^2 \theta}{b^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{c^2}} \sin \varphi d\varphi d\theta.$$

另一方面, 积分号下的函数为

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi \sin^2 \theta}{b^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{c^2}}.$$

由对称性, 我們的計算可化到第一卦限內, 因此

$$I_1 = 8abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi \sin^2 \theta}{b^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{c^2} \right) \sin \varphi d\varphi d\theta =$$

$$= \frac{4}{3} \pi abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).$$

(6) 同样,

$$I_2 = 8abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi \, d\varphi \, d\theta}{(a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

要计算里面的对于 φ 的积分, 我们令 $\cos \varphi = z$, 得

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{dz}{\{(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) - (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta - c^2) z^2\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \times \\ & \times \left. \frac{z}{\sqrt{(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) - (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta - c^2) z^2}} \right|_{z=0}^{z=1} = \\ & = \frac{1}{c} \frac{1}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}, \end{aligned}$$

最后得到

$$I_2 = 8ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} = 4\pi.$$

2) 计算积分

$$L = \iint_{(S)} (y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) dS,$$

其中 (S) 是锥面 $z^2 = k^2(x^2 + y^2)$ 被柱面 $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ 截下的上部一块曲面。

解 把曲面的方程写成 $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$, 我们得到 $dS = \sqrt{1+k^2} \, dx \, dy$, 并由公式(5)得到

$$L = \sqrt{1+k^2} \iint_{(D)} [k^2(x^2 + y^2)^2 + x^2 y^2] dx \, dy,$$

其中 (D) 是 xy 平面上的圆周 $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ 所围的圆域。化为极坐标, 我们求得

$$L = \frac{1}{24} (80k^2 + 7) \pi a^5 \sqrt{1+k^2}.$$

3) 试推演(普安松的)公式:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(m \sin \varphi \cos \theta + n \sin \varphi \sin \theta + p \cos \varphi) \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = \\ & = 2\pi \int_{-1}^1 f(u \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}) \, du, \end{aligned}$$

(其中 $m^2+n^2+p^2>0$ 并且 $f(t)$ 于 $|t|\leq\sqrt{m^2+n^2+p^2}$ 时为连续函数)。

解 用 P 表左端的积分, 不难把它表为曲面积分的形状

$$P = \iint_{(S)} f(mx+ny+pz) dS,$$

其中 (S) 表半径为 1 而中心为原点的球面。

换为新坐标系 uvw , 取平面 $mx+ny+pz=0$ 当作 vw 平面, 并令 u 轴垂直于它(图 94); 于是

$$u = \frac{mx+ny+pz}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

在 uvw 坐标下这同一积分可写为:

$$P = \iint_{(S)} f(u\sqrt{m^2+n^2+p^2}) dS.$$

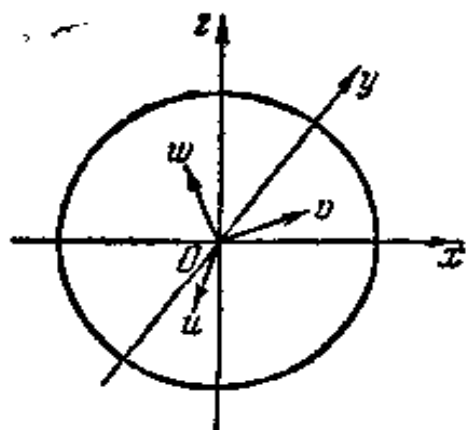


图 94

如果把球面 (S) 的参数表示式取作下面的形状

$$u = u, \quad v = \sqrt{1-u^2} \cos \omega, \quad w = \sqrt{1-u^2} \sin \omega \\ (-1 \leq u \leq 1; \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi),$$

则 $dS = du d\omega$, 而最后得到

$$P = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 f(u\sqrt{m^2+n^2+p^2}) du d\omega = 2\pi \int_{-1}^1 f(u\sqrt{m^2+n^2+p^2}) du.$$

令 $u = \cos \lambda$ ($0 \leq \lambda \leq \pi$), 则普安松公式立可写成下形

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(m \sin \varphi \cos \theta + n \sin \varphi \sin \theta + p \cos \varphi) \sin \varphi d\theta d\varphi = \\ = 2\pi \int_0^\pi f(\sqrt{m^2+n^2+p^2} \cos \lambda) \sin \lambda d\lambda.$$

4) 設一质量是沿曲面 (S) 分布的, 具有密度 $\rho = \rho(x, y, z)$ 。試用展布在 (S) 上的曲面积分来表示: (a) 质量的总值 m ; (6) 它对于坐标平面的静矩 M_{yz}, M_{zx}, M_{xy} 与惯矩 I_{yz}, I_{zx}, I_{xy} ; (B) 质量重心的坐标 ξ, η, ζ 。

5) 試求球面的质量, 如果在它上面各点处的密度等于 (a) 这点到铅垂直径的距离, (6) 这距离的平方。

(a) 解 取球心当作坐标原点, 并把铅垂綫定为 z 轴。令

$$x = R \sin \varphi \cos \theta, \quad y = R \sin \varphi \sin \theta, \quad z = R \cos \varphi,$$

其中 R 是球的半径, 我们变到球坐标 φ 与 θ 。于是

$$dS = R^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = R \sin \varphi,$$

因此

$$m = \iint_{(S)} \rho \, dS = R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \, d\varphi \, d\theta = \pi^2 R^3.$$

(6) 答 $m = \frac{8}{3} \pi R^4.$

6) 当质量分布的情形分别地和前题中的(a)与(6)一样时, 试求球面的上半部重心的位置。

(a) 解 如果像刚才一样选取坐标轴, 则由对称性立刻知道 $\xi = \eta = 0$ 。

计算静矩:

$$M_{xy} = \iint_{(S)} z \rho \, dS = R^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta = \frac{2}{3} \pi R^4.$$

我们已知[见问题5)]质量的全部大小 $m = \frac{1}{2} \pi^2 R^3$ 。于是

$$\zeta = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{4}{3\pi} R.$$

(6) 答 在同样安排坐标轴时, $\xi = \eta = 0$, $\zeta = \frac{3}{8} R$ 。

7) 试求(a)均匀的($\rho = \text{const.}$)锥面

$$z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \leq R^2)$$

重心的位置, (6) 它对于坐标平面的静矩。

解 (a) 显然, $\xi = \eta = 0$ 。其次, 有

$$dS = \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \, dx \, dy = \frac{l}{R} \, dx \, dy \quad (l = \sqrt{h^2 + R^2}),$$

于是

$$M_{xy} = \frac{hl}{R^2} \rho \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \frac{2\pi hl}{R^2} \rho \int_0^R r^2 \, dr = \frac{2}{3} \pi hl R \rho.$$

因为 $m = \pi l R \rho$, 所以 $\zeta = \frac{2}{3} h$ 。

(6)
$$I_{xy} = \iint_{(S)} \rho z^2 \, dS = \frac{2\pi h^2 l}{R^3} \rho \int_0^R r^3 \, dr = \frac{\pi h^2 l R}{2} \rho.$$

同样

$$I_{yz} = I_{zx} = \frac{\pi l R^2}{4} \rho.$$

8) 已给一个半径为 R , 高为 h 的直圆柱面。设它的侧面是均匀的 ($\rho=1$), 试求 (a) 底的中心感受到的曲面侧面的引力, (6) 这曲面对于底的中心的位势。

解 (a) 如果取底的中心当作坐标原点, 柱面的轴当作 z 轴, 则显然有 $F'_x = F'_y = 0$ 。将柱面用参数表示为

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad z = z$$

时有 $dS = R dz d\theta$, 于是

$$F'_z = \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{zR dz d\theta}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi R \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right).$$

(6) 我们有

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{R dz d\theta}{\sqrt{R^2 + z^2}} = 2\pi R \log \frac{h + \sqrt{R^2 + h^2}}{R}.$$

9) 就问题 7) 中的锥面求出 (a) 这曲面对于锥底的中心的位势及 (6) 对于它的顶点的位势, 又 (b) 锥底的中心感受的引力及 (r) 它的顶点感受的引力。

解 (a) 令

$$l = \sqrt{R^2 + h^2},$$

得

$$\begin{aligned} W &= \frac{l}{R} \rho \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} = \\ &= 2\pi l \rho \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{l^2 r^2 - 2Rh^2 r + h^2 R^2}} = \\ &= \frac{2\pi}{l} \rho \int_0^R \frac{l^2 r - Rh^2}{\sqrt{l^2 r^2 - 2Rh^2 r + h^2 R^2}} dr + \frac{2\pi Rh^2}{l} \rho \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{l^2 r^2 - 2Rh^2 r + h^2 R^2}} = \\ &= \frac{2\pi \rho}{l} \sqrt{l^2 r^2 - 2Rh^2 r + h^2 R^2} \Big|_{r=0}^{r=R} + \\ &\quad + \frac{2\pi Rh^2 \rho}{l^2} \log [l^2 r - Rh^2 + \sqrt{l^2 (l^2 r^2 - 2Rh^2 r + h^2 R^2)}] \Big|_{r=0}^{r=R} = \\ &= \frac{2\pi R \rho}{l} (R - h) + \frac{2\pi Rh^2 \rho}{l^2} \log \frac{R}{h} \cdot \frac{l + R}{l - h}. \end{aligned}$$

$$(6) \quad W = \frac{l\rho}{R} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 2\pi l\rho.$$

(B) 按对称性, $F'_x = F'_y = 0$ 。其次,

$$\begin{aligned} F'_z &= \frac{l\rho}{R} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{z-h}{[x^2+y^2+(z-h)^2]^{\frac{3}{2}}} dx dy = \\ &= 2\pi h l R \rho \int_0^R \frac{(r-R)r dr}{[l^2 r^2 - 2Rh^2 r + h^2 R^2]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

这一积分可化为三积分的和:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{l^2} \int_0^R \frac{dr}{(l^2 r^2 - 2Rh^2 r + R^2 h^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R(h^2 - R^2)}{l^4} \int_0^R \frac{l^2 r - Rh^2}{(l^2 r^2 - 2Rh^2 r + R^2 h^2)^{\frac{3}{2}}} dr - \\ &\quad - \frac{2Rh^2}{l^4} \int_0^R \frac{dr}{(l^2 r^2 - 2Rh^2 r + R^2 h^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{1}{l^3} \log \frac{R}{h} \frac{l+R}{l-h} + \frac{h^2 - R^2}{Rh l^4} (R-h) - \frac{2}{l^4} (R+h). \end{aligned}$$

整理所有的结果, 最后我们得到:

$$F'_z = \frac{2\pi h R \rho}{l^2} \log \frac{R}{h} \frac{l+R}{l-h} - \frac{2\pi \rho (R+h)}{l}.$$

(r) 这时广义积分是发散的:

$$F'_z = \frac{Rh}{l^2} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{dx dy}{x^2+y^2} = +\infty.$$

10) 设分布在--锥面上的质量在各点的密度等于这点到顶点的距离, 试求(a)这曲面对于顶点的位势, (6)顶点受到的曲面侧面的引力。

答 (a) $W = \pi R l = S$; (6) $F'_x = F'_y = 0$, $F'_z = \frac{2\pi R h}{l}$.

11) 求均匀的($\rho=1$)球层上的点的引力。

解 设球心位于坐标原点, 被引点(质量为1)位于正的 z 轴上离球心距离为 a 处。这个引力在 x 与 y 轴上的射影 F'_x 与 F'_y 显然等于零。其次, 我们有

$$F'_z = \iint_{(S)} \rho \frac{z-a}{r^3} dS$$

(r 是球面上任一点 M 与点 A 的距离)。如果换为球坐标:

$$x = R \sin \varphi \cos \theta, \quad y = R \sin \varphi \sin \theta, \quad z = R \cos \varphi,$$

則
而

$$dS = R^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta, \quad r = \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \varphi},$$

$$F'_z = 2\pi R^2 \rho \int_0^\pi \frac{(R \cos \varphi - a) \sin \varphi \, d\varphi}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}}. \quad (11)$$

用替换 $R^2 + a^2 - 2Ra \cos \varphi = t^2$ 将这表示式改为

$$\begin{aligned} F'_z &= \frac{\pi R}{a^2} \rho \int_{|R-a|}^{R+a} \left(\frac{R^2 - a^2}{t^2} - 1 \right) dt = \\ &= -\frac{\pi R^2}{a^2} \rho \left(2R - \frac{R^2 - a^2}{|R-a|} - |R-a| \right). \end{aligned}$$

我們現在要討論两种情形。

(1) 設 $a < R$, 則 $|R-a| = R-a$. 而括号內的值为零, 于是

$$F'_z = 0.$$

因此, 凡在一均匀球层里面的点, 都不感受球层表面的任何引力。

(2) 若 $a > R$, 則 $|R-a| = -(R-a)$, 于是

$$F'_z = -\frac{4\pi R^2 \rho}{a^2}.$$

因此, 在均匀球层外面的点感受到的球层表面的引力, 与集中球层的全部质量 $m = 4\pi R^2 \rho = S\rho$ 于球心时它感受到的引力一样。

特別来討論 $a = R$ 的情形。在这情形下点 A 在球面上, 而积分(11)成为广义的。經過很明显的簡化手續后, 它作下面的形状:

$$F'_z = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \rho \int_0^\pi \frac{\sin \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - \cos \varphi}} = -2\pi \rho.$$

当 a 从比 R 小的值或比 R 大的值趋近于 R 时, F'_z 分別地有极限值 0 与 $-4\pi\rho$ 。由此可見, 当被引点通过球面时, 引力的連續性遭到破坏, 并且它对于球面上的点的值是上述两个极限值的算术平均数。

12) 求均匀球层对于任意一点的位势。

解 在前面的記法下, 我們有

$$\begin{aligned} W(a) &= \iint_{(S)} \mu \frac{dS}{r} = 2\pi R^2 \rho \int_0^\pi \frac{\sin \varphi \, d\varphi}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \varphi}} = \\ &= \frac{2\pi R}{a} \rho \int_{|R-a|}^{R+a} dt = \frac{2\pi R}{a} \rho (R+a - |R-a|). \end{aligned}$$

若 $\alpha < R$, 則

$$W(\alpha) = 4\pi R\rho,$$

所以, 在均匀球层里面, 它的位势是一常数。

反之, 当 $\alpha > R$ 时, 則

$$W(\alpha) = \frac{4\pi R^2 \rho}{\alpha},$$

也就是說, 如果把球层的全部质量集中于球心, 球层在其外部空間的位势不起变化。

在 $\alpha = R$ 的情形下, 表达位势的广义积分具有值

$$W(R) = 4\pi R\rho.$$

由此可见, 当被引点通过球的表面时位势保持其連續性。

§ 4 第二型曲面积分

609. 第二型曲面积分的定义 这一新积分的形成是按照第二型曲线积分的样子建立的。

在那里我們从有向 (定向) 曲线出发, 并把它分成一些元素后, 再把这种各有方向的元素射影到坐标軸上来。射影也是有方向的, 而我們則取其长带正号或負号, 依其方向是否与軸的方向相同而定。

用类似的方法我們現在来考虑光滑的或分片光滑的双侧曲面 (S), 并且取定其兩側中某一側; 如已所知[595], 这等于說选取曲面的一个确定的定向。

为明确起見, 我們首先假定这曲面由显方程

$$z = z(x, y)$$

給出, 并且点 (x, y) 是在 xy 平面上由分段光滑的閉路所范围的区域 (D) 內变动。于是在曲面的上側与下側* 之間可以加以选择。在第一种情况下曲面上的閉曲线, 如果从上面去看, 要記以反时針的方向, 而在第二种情况下則記以相反的方向。

如果把曲面分割为許多元素并把这种各有定向的每个元素射影到

* 參看第 249 頁中的底注。

xy 平面上来, 则被射影的图形边界的环行方向决定着它的射影闭路的环行方向。若曲面 (S) 的上侧是固定的, 则这一方向和反时针方向的转动相一致, 也就是与 xy 平面本身的定向一致; 在这种情况下我们对射影的面积要取正号。在下侧的情形转动是相反的, 而我们对射影的面积要取负号 [参考 585]。

现在设在所给曲面 (S) 的点上定义有某一函数 $f(M) = f(x, y, z)$ 。用分段光滑的曲线网把这曲面分成许多元素

$$(S_1), (S_2), \dots, (S_n)$$

后, 在每个元素 (S_i) 内选取一点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$ 。再算出函数的值 $f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$ 并用元素 (S_i) 在 xy 平面上的射影的面积 D_i 去乘它, D_i 所带的符号是按照上面所说的规则来给的。最后作出和(也是一种积分和)

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(M_i) D_i = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) D_i. \quad (1)$$

如果当各个小块 (S_i) 的直径趋于零时这个和有一个确定的有限极限, 则这极限叫做

$$f(M) dx dy = f(x, y, z) dx dy$$

展布在曲面 (S) 这个选定的侧上的 (第二型) 曲面积分, 并用记号

$$\begin{aligned} I &= \iint_{(S)} f(M) dx dy = \\ &= \iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy \end{aligned} \quad (2)$$

来表示 (在这里 $dx dy$ 象征曲面元素在 xy 平面上的射影的面积)。

但是在这记号中恰恰没有包含着一种记号说明曲面是取的那一侧, 因此每

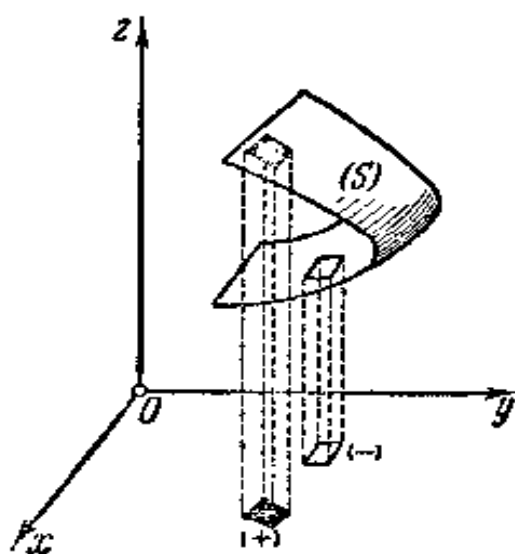


图 95

次必須把这一說明特別提出来。从定义本身可見，当所考虑的曲面的一側換为和它相反的一側时，积分要改变符号。

如果曲面(S)不具备所說的特別形状，則曲面积分的定义也可以照样完全建立起来，只是各个射影的面积 D_i 无須全部帶同样的符号，譬如說，如果曲面元素中有些在上面而其余的在下面(图 95)，那就要帶不同的符号。

如果元素在曲面的具有平行于 z 軸的母綫的柱面部分上，則它的射影集結于一綫，面积成为零，而用不着去談它的符号。

可是这里会遇到这样的情形，就是一个元素部分地落在上面，部分地落在下面，或者是一个元素不是按一一对应的方式射影到 xy 平面上。

因为在实际上这类“不規則的”元素不起什么作用，所以我們在积分和中可以不把与这些元素的对应項加进去。以后我們要证实这样做，无論是在曲面积分的計算中或是在它的应用中都不会引起任何紊乱。

若替代 xy 平面把曲面的各元素射影到 yz 或 zx 平面上，則我們得到另外两个第二型曲面积分：

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dy dz \text{ 或 } \iint_{(S)} f(x, y, z) dz dx, \quad (2^*)$$

在应用中常常遇到这几个形状积分連接在一起：

$$\iint_{(S)} P dy dz + Q dz dx + R dx dy,$$

其中 P, Q, R 是 (x, y, z) 的函数，定义于曲面(S)的点处。我們再一次着重指出，在各种情况下曲面(S)都假定是双側的并且积分是展布在它的确定的一側上。

610. 最簡單的特殊情形 1° 再回到积分(2)当曲面(S)是由显方程

$$z = z(x, y) \quad ((x, y) \text{ 属于 } (D))$$

給出的情形, 并且函数 z 与它的偏导数 $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ 都是連續的。

如果积分(2)是沿曲面的上側取的, 則在积分和(1)中所有 D_i 都是正的。在这和中用 z 的值 $z(x_i, y_i)$ 来代替 z_i , 我們就把它化为下面的形状

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z(x_i, y_i)) D_i,$$

不难看出这就是尋常的二重积分

$$\iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) dx dy$$

的积分和。取极限, 我們就确立了等式

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) dx dy, \quad (3)$$

并且这两个积分中一个存在就能推出另一个的存在。特別, 如果函数 f 是連續的, 則这两个积分一定存在。

若积分展布在曲面 (S) 的下側, 則显然有

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = - \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) dx dy. \quad (3^*)$$

附注 在各种情况下公式(3)可以保持不变, 只要认为右端二重积分所展布的区域 (D) 有其应有的定向[参看585]。

我們現在要证明(在所考虑的情况下), 第二型曲面积分可化为第一型曲面积分。在选定曲面上側的假設下, 就是說所有的 $D_i > 0$, 我們来重新考虑和(1)。按照第 601 目中公式(5a),

$$S_i = \iint_{(D_i)} \frac{dx dy}{\cos \nu},$$

其中 ν 是曲面的法綫与 z 軸之間夾的銳角。应用中值定理，我們得到

$$S_i = \frac{D_i}{\cos \nu_i^*} \text{ 或 } D_i = S_i \cos \nu_i^*;$$

这里的 ν_i^* 代表在元素 (S_i) 的某个 (但不是任意选择的) 点处的曲面法綫与 z 軸所成的角。把 D_i 的这个值代入 σ 中，我們得到

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cos \nu_i^* S_i.$$

与这个和相应自然地有一个和

$$\bar{\sigma} = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cos \nu_i S_i,$$

其中 ν_i 是与任意选好了的点 (x_i, y_i, z_i) 相对应的；最后这个和显然是第一型曲面积分

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) \cos \nu \, dS$$

的积分和。

由函数
$$\cos \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

的連續性，如果把曲面 (S) 分成足够小的一些元素，則这余弦在各个元素范围内的振动都会小于任意一个预先給定的数 $\varepsilon > 0$ 。假定函数 f 是有界的： $|f| \leq M$ ，我們估計这两个和 σ 与 $\bar{\sigma}$ 的差：

$$|\sigma - \bar{\sigma}| \leq \sum_{i=1}^n |f(x_i, y_i, z_i)| |\cos \nu_i^* - \cos \nu_i| S_i < M S \varepsilon;$$

所以 $\sigma - \bar{\sigma} \rightarrow 0$ 。很明显，这两个和的极限同时存在并且相等。于是我們得到等式

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) \, dx \, dy = \iint_{(S)} f(x, y, z) \cos \nu \, dS, \quad (4)$$

并且从这两积分中一个的存在就得出另一个的存在。我們又看到，特別在函数 f 連續性的假定下这两个积分都存在。

把曲面的上側換为下側，我們同样要改变等式(4)左端的符号。如果与此同时把 ν 理解为方向朝下的法綫与 z 軸所成的角，則余弦照样改变符号，而右端的积分也跟着它改变符号，所以等式仍然可以保持不变。

2° 如果 (S) 是柱面的一部分，其棱平行于 z 軸，則各元素的射影都成为零，所以在这种情况下：

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = 0. \quad (5)$$

显然，在这里公式(4)也成立：因为 $\cos \nu = 0$ ，所以这公式的右端也为零。

611. 一般情形 保留在 594, 2° 中所采用的記法和假定，我們再回到曲面是由参数方程給出的一般情形。在积分和

$$\sigma' = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) D_i$$

中，像我們規定过的情形一样，沒有把曲面上那些“不規則”元素(它們或者是部分地在上而而又部分地在下面的元素，或者是不按一一对应的方式射影到 xy 平面上的元素)的对应項加进去。在和的記号上的撇号表明着这种情况。

把 ν 总认为是按照曲面选定的一側而定向的法綫与 z 軸所成的角，我們恒有連符号在內都正确的等式：

$$D_i = S_i \cos \nu_i^*$$

(ν_i^* 具有以前所說的同样意义)。因此，

$$\sigma' = \sum' f(x_i, y_i, z_i) \cos \nu_i^* S_i.$$

把这个和与和

$$\bar{\sigma}' = \sum' f(x_i, y_i, z_i) \cos \nu_i S_i$$

(ν_i 对应于所选取的点)相比较。像以前一样, 不难证实

$$\lim(\sigma' - \bar{\sigma}') = 0. \quad (6)$$

如果再把那个与抛弃了的“不规则的”元素相对应的和

$$\bar{\sigma}'' = \sum'' f(x_i, y_i, z_i) \cos \nu_i S_i$$

合并到 $\bar{\sigma}'$ 中, 则完全得到了关于第一型曲面积分

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) \cos \nu \, dS$$

的积分和 $\bar{\sigma}$ 。

可以证明[我們宁可在下面 612 中来做]当所有元素(S_i)的直径趋向于零时,

$$\bar{\sigma}'' \rightarrow 0. \quad (7)$$

于是根据(6), 我們在(4)中两个积分有一个存在的假定下(因而推出另一个的存在)重新得到等式(4)。

从曲面(S)的参数表示式出发, 可以把(4)中右端的积分化为展布在参数的变化区域(Δ)上的寻常二重积分, 而根据已证明的, 也就同时可以把左端积分化为这二重积分。就是说, 因为

$$\cos \nu = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du \, dv$$

(参考 594, 2°), 所以有

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{(\Delta)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) C \, du \, dv. \quad (8)$$

正负符号对应于曲面(S)的两个侧; 特别, 如果 uv 平面的定向对应于曲面(S)上所选一侧的定向, 则应取正号[596]。而且在这里, 两个积分中一个的存在能导出另一个的存在。

用类似的处理方法, 可以得出与曲面在另外两个坐标平面上的射影相关的另外两个第二型曲面积分。把这些结果全部结合起来, 可以写成

$$\begin{aligned}
 \iint_{(S)} P dy dz + Q dz dx + R dx dy &= \\
 &= \iint_{(S)} (P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos \nu) dS.
 \end{aligned} \quad (9)$$

这是化第二型曲面积分为第一型曲面积分的一般公式。在这里 P, Q, R 是定义于曲面 (S) 的点处的有界函数，而 $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$ 是按照曲面的选定的一侧而定向的法线方向余弦。

最后，我们导出化第二型曲面积分为寻常二重积分的一般公式：

$$\begin{aligned}
 \iint_{(S)} P dy dz + Q dz dx + R dx dy &= \\
 &= \pm \iint_{(\Delta)} (PA + QB + RC) du dv.
 \end{aligned} \quad (10)$$

在右端所指的是，函数 P, Q, R 中的 x, y, z 是由其用 u, v 表示的式子来代替的。关于符号可以重用前面的说明。

所得的各个结果都可推广到更一般的情况——分片光滑的闭的或开的曲面的情况（因为这样的曲面是由一些一个接着一个的开的光滑曲面所组成的）。

612. 证明的细节 现在回过头来证明关系式 (7)。我们可以断定，对于任一预先给定的 $\epsilon > 0$ ，找得到这样的一个 $\eta > 0$ ，只要各个元素的直径小于 η 时，在“不规则的”各个元素的各处都有不等式

$$|\cos \nu| < \epsilon. \quad (11)$$

假设这个断言不成立；于是就有这样的一个 $\epsilon_0 > 0$ 及这样的由“不规则的”而直径渐缩为零的一些元素 (S_k) 组成的序列存在，使得在每个 (S_k) 的某一点处都有

$$|\cos \nu| \geq \epsilon_0. \quad (12)$$

如果用 (δ_k) 表区域 (Δ) 中对应于 (S_k) 的元素，则元素 (δ_k) 的直径也趋于零。由波尔桑-外埃斯脱拉斯定理 [162]，从序列 $\{(\delta_k)\}$ 中可取出这样一个部分序列，它的元素集结于区域 (Δ) 的某一点 (u_0, v_0) ；但是，不失一般性不妨假定这就是序列 $\{(\delta_k)\}$ 本身。

对于与参数 u, v 的值 $u = u_0, v = v_0$ 相对应的角 $\nu = \nu_0$ ，必定有

$$\cos \nu_0 = 0. \quad (13)$$

因为, 如果不然, 则对于参数的这一对值我们就该有

$$C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \neq 0,$$

于是在点 (u_0, v_0) 的一个邻域内, u, v 便可考虑作 x, y 的单值函数, 并且当 u, v 用 x, y 表示的式子代入函数 $z = z(u, v)$ 中时, 曲面便由显方程

$$z = f(x, y)$$

来表示*. 除此以外, 若把这近邻取得足够小, 则在其内 $\cos \nu$ 保持一定的符号. 因为当 k 足够大时 (δ_k) 势必落到这个邻域之内, 所以它也就不能够对应于“不规则的”元素 (S_k) .

由此可见等式(13)成立. 这样, 当 (δ_k) 足够地接近于点 (u_0, v_0) 时, 对于这些区域我们就到处有

$$|\cos \nu| < \epsilon_0,$$

这和假设(12)相反. 这一矛盾的产生, 就证实了我们对于不等式(11)所下的断言.

现在设曲面 (S) 被分成的各个元素的直径都小于 η . 于是对于“不规则的”元素 (假若有的话) 不等式(11)成立, 并且与它们对应的和 $\overline{\sigma'}$ 的绝对值小于 MSe , M 表 $|f|$ 的一个上界. 由此可见(7)式成立.

613. 用曲面积分表立体体积 立体体积可用展布在范围着这立体的曲面上的积分来表示, 好像平面图形的面积可用沿着这图形的边界的积分来表示一样[526]. 考虑一立体 (V) , 它是由分片光滑的曲面

$$\begin{aligned} (S_1) \quad z &= z_0(x, y) \\ (S_2) \quad z &= Z(x, y) \end{aligned} \quad (z_0 < Z)$$

及母线平行于 z 轴的柱面 (S_3) 所围成的 (图 96). 在 xy 平面上, 范围一个平面区域 (D) 的分段光滑的闭路 (K) 是这柱面的准线. 在特殊情形下, 等式 $z_0(x, y) = Z(x, y)$

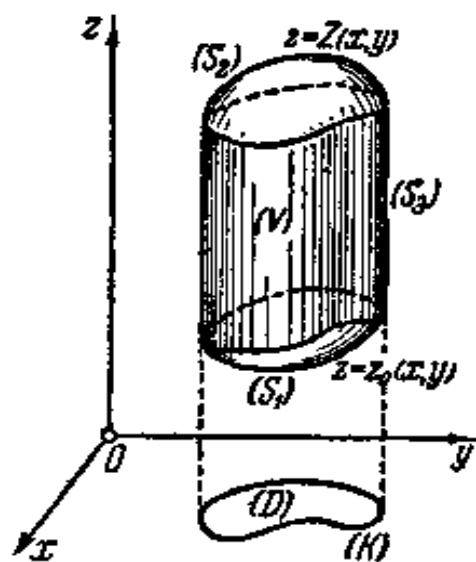


图 96

* 如果点 (u_0, v_0) 在区域 (Δ) 的边界上, 则对于上面所述这点的一个邻域和区域 (Δ) 的公共部分这话仍是正确的. 参考第一卷中的附录[250].

可以在曲綫(K)上成立;那时曲面(S_j)縮成一綫。

这立体的体积 V 显然等于两积分的差

$$V = \iint_{(n)} Z(x, y) dx dy - \iint_{(n)} z_0(x, y) dx dy.$$

引入曲面积分, 这等式可写为[参看(3)与(3*)]:

$$V = \iint_{(S_2)} z dx dy + \iint_{(S_1)} z dx dy,$$

并且这两积分是沿曲面(S_2)的上側及沿曲面(S_1)的下側来取的。把展布在柱面(S_3)的外側上的积分

$$\iint_{(S_3)} z dx dy$$

加到右端。由(5)式知这积分等于零, 所以这积分的加入并不破坏原来的等式。这样, 最終有

$$V = \iint_{(S)} z dx dy, \quad (14)$$

它是展布在范围着这立体的曲面 $(S) = (S_1) + (S_2) + (S_3)$ 的外側上的。

公式(14)只是由我們就那种有确定定向的柱形长条建立起来的。但是, 显然, 对于寬广得多的一类立体, 能够利用母綫平行于 z 軸的一些柱面把它分成所研究过的形状的部分, 这个公式仍是正确的。实际上, 实行这个分法, 我們可以应用公式(14)到各个部分, 然后把各个結果加在一起。因为展布在各个輔助柱面上的积分等于零, 所以我們重新得到公式(14)。

我們現在要指出, 对于最常見的極广的一类立体, 就是說, 对于由任意一个分片光滑的曲面所范围的立体, 这公式成立。

設(V)是这样的一个立体。首先用有限多个长方体* 将这立体的

* 在这里和下面我們指的是各面分別平行于三个坐标平面的平行六面体。

表面(S)上所有的“棱”包进去,并且不仅要它们的总体积任意小,还要它们包在曲面(S)的部分的面积也任意小,而同时展布在这部分上的积分 $\iint z \, dx \, dy$ 也如此。

现在我们在曲面上任取一个不在“棱”上的点 $M_0(u_0, v_0)$ 。因为这点不是奇点,所以在这点处 A, B, C 三行列式中至少有一个不为零。若 $C \neq 0$, 则我们知道,在点 M_0 的一个邻域内曲面(S)的对应部分可用形如

$$z = f(x, y)$$

的显方程来表示。当 $A \neq 0$ 或 $B \neq 0$ 时,我们就得到另外两种形状的显方程:

$$x = g(y, z), \quad y = h(z, x).$$

因此,点 M_0 可以被这样的一个长方体所包含,它从立体(V)上割下的部分是由五个平面和这样三片曲面(图 97)之一所围的“棱条。”

把波雷尔预备定理 [165] 应用到我们的曲面上,* 我们从这种长方体的无穷集合中可选出有限多个长方体来。结果除掉那些包着了“棱”的各个长方区域以外,立体(V)的其余部分(V_1)被分成有限多个“棱条”及简单的长方体。假若对于所有这些元素立体能够证明公式(14)的正确性,则用加法立即证实这公式对于它们的和的正确性,然后取极限(与缩小各个“棱”的邻域相联系)也就知道这公式对于原来的立体(V)是正确的。

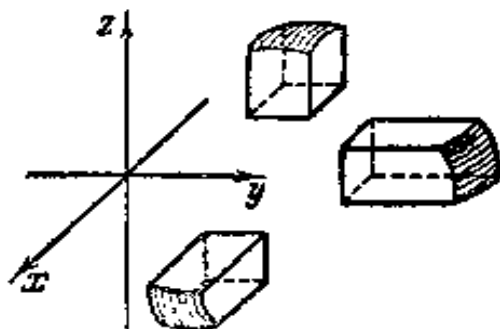


图 97

但是对于第一种形状的柱形长条,因而对于长方体,这公式是在前面已证明了的。现在我们要讲到例如(V)的第二种形状的“棱条”,它是由平面 $x = x_0, y = y_0, y = y_1, z = z_0, z = z_1$ 以及曲面(s): $x = g(y, z)$ 所围的。

* 不难知道它是一个闭集合。

仿照在第 526 目中为了扩大平面图形面积公式的应用范围我們曾經用过的方法, 这时替代內接于曲綫的折綫我們来画內接于曲面(s)的多面形(σ)。我們知道[602], 利用适当的三角分裂法来分我們的立体在 yz 平面上的射影所构成的矩形

$$(d) = [y_0, y_1; z_0, z_1],$$

可以做得使曲面(σ)的各面上的法綫方向随意地接近于曲面(s)在其对应部分各点处的法綫。用多面形(σ)代替了曲面(s), 我們能够对于这改变了的立体($\tilde{V}$)写出公式

$$\tilde{V} = \iint_{(\tilde{s})} z \, dx \, dy, \quad (15)$$

其中($\tilde{s}$)是用来表示范围着多面体($\tilde{V}$)的整个表面。实际上, 这个多面体容易分成許多像我們的公式对它們已取得证明的那种形状的立体。要得到公式(14)現在只要在(15)中取极限 (当多面形的各棱无限地縮小而其各面上的法綫方向与所給曲面上的法綫方向无限地接近时)。

为了证明所說的两公式的右端的近似, 我們將它們的差表如下形

$$\iint_{(s)} z \, dx \, dy - \iint_{(\sigma)} z \, dx \, dy + \alpha,$$

其中 α 表示沿立体(V)与($\tilde{V}$)的那些侧面(即用以使这两曲面分开者)上的积分。显然, $\alpha \rightarrow 0$ 。把这两积分化为第一型的积分, 它們的差首先可写成

$$\iint_{(s)} z \cos \nu \, ds - \iint_{(\sigma)} z \cos \bar{\nu} \, d\sigma,$$

其次, 再轉到第二型的积分

$$\iint_{(s)} z \frac{\cos \nu}{\cos \lambda} dy \, dz - \iint_{(\sigma)} z \frac{\cos \bar{\nu}}{\cos \bar{\lambda}} dy \, dz.$$

在这里 $\cos \lambda$, $\cos \nu$, $\cos \bar{\lambda}$, $\cos \bar{\nu}$ 是这两曲面的外法綫的方向余弦。注

意在 (s) 上

$$\cos \lambda = -\frac{1}{\sqrt{1+g_y'^2+g_z'^2}}$$

是連續函数, 不趋向于零, 因此, 是以正数为其下界的; 当曲面 (s) 与 (σ) 的法綫足够接近时, 对于多面形 (σ) 的 $\cos \tilde{\lambda}$ 來說, 这也是一样正确的。

最后, 引用多面形 (σ) 的方程 $x=\tilde{g}(y, z)$, 可以把最后两积分的差用展布在矩形 (d) 上的寻常二重积分写成下形:

$$\iint_{(d)} \left\{ \left[z \frac{\cos \nu}{\cos \lambda} \right]_{x=\tilde{g}(y, z)} - \left[z \frac{\cos \tilde{\nu}}{\cos \tilde{\lambda}} \right]_{x=\tilde{g}(y, z)} \right\} dy dz.$$

考虑到了不仅曲面 (s) 与 (σ) 的对应点相接近, 而且这两曲面在对应点处的法綫也和接近, 于是就显然可見, 所写出的积分在上述极限过程中趋向于零。这就完成了我們的证明。

与公式(14)同时, 立体的体积也可用公式

$$V = \iint_{(s)} x dy dz \text{ 或 } V = \iint_{(s)} y dz dx \quad (14^*)$$

来表示, 这可由简单改換軸的地位而得到。把三个結果合在一起, 可以得到更对称的公式

$$V = \frac{1}{3} \iint_{(s)} x dy dz + y dz dx + z dx dy. \quad (16)$$

在所有情况下, 积分都是沿着包围这个立体的曲面 (S) 的外側而取的。

再引入外法綫的方向余弦 $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$, 最后的表示式可写成第一型曲面积分:

$$V = \frac{1}{3} \iint_{(s)} (x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu) dS. \quad (17)$$

614. 斯托克斯公式 再設 (S) 是由分段光滑的閉路 (L) 所范围的一个无重点的光滑的双侧曲面[594, 2°]。曲面上的点借公式

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$$

与平面区域 (Δ) 的点成一一对应, (Δ) 是由 uv 平面上分段光滑的閉路 (Δ) 所范围的。此外, 总有 $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ 。

选取曲面的确定一側, 并与此相应选取它的定向[595]。为明确起见, 我們把閉路 (L) 算作按正环行方向对应于閉路 (Δ) 的正环行方向。于是像我們在 596 中规定的一样, 公式

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{A}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos \mu = \frac{B}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos \nu &= \frac{C}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{aligned} \quad (18)$$

正好显示出曲面 (S) 被选取的一側。

注意这些事項以后, 我們將推演一重要公式, 它联系着曲面积分与曲綫积分, 且为我們所熟知的格林公式[575]的推广。

設在某一个包含曲面 (S) 本身在内的空間区域内, 給出一个函数

$$P = P(x, y, z),$$

它和它的偏导数在这区域内都是連續的。于是有公式

$$\int_{(L)} P dx = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \right). \quad (19)$$

并且閉路 (L) 的环行方向对应于右端积分所展布曲面 (S) 的那一側。

首先改变沿曲綫 (L) 的曲綫积分, 用沿曲綫 (Δ) 的积分来代替:

$$\int_{(L)} P dx = \int_{(\Delta)} P \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right). \quad (20)$$

关于这等式, 只要引进曲綫 (Δ) 的参数表示式, 并通过它引进曲綫 (L) 的参数表示式, 便可以将这两个积分化为同一个对参数的寻常积分。于是证明了等式(20)成立。

現在我們应用格林公式于(20)中的右端积分, 得

$$\int_{(\Delta)} P \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) = \iint_{(\Delta)} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right\} du dv.$$

因为最后一个积分号下的式子可以展开成下形

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + P \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} - \\ & - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} - P \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \\ & = \frac{\partial P}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right), \end{aligned}$$

所以我們得到二重积分

$$\iint_{(\Delta)} \left\{ \frac{\partial P}{\partial z} B - \frac{\partial P}{\partial y} C \right\} du dv.$$

按照公式(10)我們容易把它改为曲面积分

$$\iint_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy;$$

最后这一积分是沿所选的曲面一側而取的, 因为公式(18)正好表示的是这一側。这样就完成了等式(19)的证明。*

这个公式是就光滑的曲面建立起来的; 但它也容易推广到分片光滑曲面的情形: 只要就每片光滑的面单独地把它写出来, 然后把所得的各等式加在一起。

用循环輪換字母 x, y, z 的方法, 再得到两个类似的等式:

$$\left. \begin{aligned} \int_{(L)} Q dy &= \iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz \right), \\ \int_{(L)} R dz &= \iint_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz dx \right), \end{aligned} \right\} \quad (19^*)$$

* 应当指出, 在推演中, 导数 $\frac{\partial P}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}$ 的存在性与連續性我們都利用到了, 但在最后的結果中它們并未出現。实际上沒有这些假設这个公式也能成立。

其中 Q 与 R 为 x, y, z 的两个新函数, 满足 P 所适合的同样的各条件。

合并(19)与(19*)三个等式, 我們得到所要求的結果, 即最普遍的公式:

$$\begin{aligned} \int_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz = \iiint_{(S)} & \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \\ & + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx. \end{aligned} \quad (21)$$

这个等式叫做斯托克斯(G. G. Stokes)公式。我們再一次着重指出, 曲面的这一側和它的边界的方向彼此是由 595 目中所建立的規則来决定的。

若取 xy 平面上的平面区域(D)作为曲面(S)这一块面, 則因 $z=0$ 而得到公式

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

这是讀者所知道的格林公式; 因此, 后者为斯托克斯公式的特例。*

最后我們指出, 在斯托克斯公式中第二型曲面积分可以用第一型曲面积分来代替。于是这公式取下面的形式

$$\begin{aligned} \int_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{(S)} & \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \nu + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \lambda + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \mu \right\} dS, \end{aligned} \quad (21^*)$$

并且 $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$ 表示恰与所选的曲面一側相对应的法綫方向余弦。***

615. 例 1) 計算积分

$$I = \iint_{(S)} (x^2 + y^2) dx dy,$$

* 为了便利記憶斯托克斯公式, 我們指出, 右端积分中第一項与格林公式中的是一样的, 而其余二項可由 x, y, z 与 P, Q, R 的循环輪換得到。

*** 此式原书有錯誤, 現已改正——譯者。

它展布在圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 的下侧。

提示 因为积分所展布的曲面与它在 xy 平面上的射影重合, 所以注意到侧时, 我们就有

$$I = - \iint_{(D)} (x^2 + y^2) dx dy.$$

答 $I = -\frac{\pi}{2}R^4.$

2) 计算积分

$$J = \iint_{(S)} x^2 y^2 z dx dy,$$

它是沿着球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的下半部的上侧而取的。

提示 半球在 xy 平面上的射影是由圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 所范围的圆域 (D) 。下半部球面的方程是 $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, 所以

$$J = - \iint_{(D)} x^2 y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy.$$

答 $J = -\frac{2\pi}{105}R^7.$

3) 计算积分

$$K = \iint_{(S)} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy,$$

它展布在球面 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ 的外侧。

解 我们来讨论积分

$$K_3 = \iint_{(S)} z^2 dx dy$$

的计算。因为球面的显方程为

$$z - c = \pm \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}$$

(其中正号对应于上半球, 而负号对应于下半球), 所以该把被积函数 z^2 表为下形

$$z^2 = (z-c)^2 + c^2 + 2c(z-c),$$

前两项之和沿上半球面的上侧与下半球面的下侧来积分时给出不同符号的结果, 它们彼此相消。最后一项由上半球面转到下半球面时本身改变符号, 因而沿这两半球积分时得出相等的两结果, 所以

$$K_3 = 4c \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} dx dy = \frac{8}{3} \pi c R^3.$$

同样可得到另二积分:

$$K_1 = \iint_{(S)} r^2 dy dz, \quad K_2 = \iint_{(S)} y^2 dz dx.$$

答 $K = \frac{8}{3} \pi R^3 (a+b+c).$

4) 求积分

$$(a) I_1 = \iint_{(S)} dx dy, \quad (b) I_2 = \iint_{(S)} z dx dy, \quad (c) I_3 = \iint_{(S)} z^2 dx dy,$$

它們展布在橢球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的外側。

答 (a) $I_1 = 0$; (b) $I_2 = \frac{4}{3} \pi abc$; (c) $I_3 = 0$.

5) 計算积分

$$(a) I_1 = \iint_{(S)} x^3 dy dz, \quad (b) I_2 = \iint_{(S)} yz dz dx,$$

它們是沿着这同一个橢球面的上半部的上側而取的。

解 (a) $x = a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}},$

$$I_1 = 4a^3 \iint_{(D_1)} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} dy dz,$$

其中 (D_1) 是橢圓 $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在第一象限内的部分。換为广义极坐标, 不难求得

$$I_1 = \frac{2}{5} \pi a^3 bc.$$

从曲面的参数表示式

$$x = a \sin \varphi \cos \theta, \quad y = b \sin \varphi \sin \theta, \quad z = c \cos \varphi \quad (22)$$

$$\left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\right)$$

出发, 同样容易地可以得到这个結果。

因为 $A = bc \sin^2 \varphi \cos \theta$, 故按照公式(10),

博士家园 流星

$$L_1 = a^3 bc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \, d\varphi \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \, d\theta = \frac{2}{5} \pi a^3 bc.$$

(曲面的上侧对应于所指公式中的正号。)

(6) 在这里也利用参数表示式, 我們看出 $B = ac \sin^2 \varphi \sin \theta$, 所以

$$L_2 = abc^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{\pi}{4} abc^2.$$

6) 求积分

$$\iint_{(S)} \frac{dy \, dz}{x} + \frac{dz \, dx}{y} + \frac{dx \, dy}{z}.$$

它是沿着上面所指的椭球面的外侧而取的。

提示 这积分是广义的, 因为积分号下的式子变为无穷大(在椭球面与坐标平面的截口上)。利用参数表示式我們得到常义的二重积分。

答 $4\pi \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \right).$

7) 若把关于体积 V 的表示式(16)按照公式(10)改为常义的二重积分, 則得

$$V = \pm \frac{1}{3} \iint_{(\Delta)} (Ax + By + Cz) \, du \, dv. \quad (23)$$

視 A, B, C 的值为行列式, 很容易地把这結果表成下面的形式

$$V = + \frac{1}{3} \iint_{(\Delta)} \begin{vmatrix} x & y & z \\ r'_u & y'_u & z'_u \\ r'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du \, dv.$$

这时符号規定是正确的, 只要 A, B, C 具有外法綫的方向余弦的符号; 在相反的情形下符号規定是負的。

8) 从参数表示式(22) ($0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$) 出发, 用这个公式来计算椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的体积 V 。

提示 这时的行列式等于 $abc \sin \varphi$ 。 **答** $V = \frac{4}{3} \pi abc$ 。

9) 若范围着一个立体的曲面是由极坐标方程

$$r = r(\varphi, \theta)$$

给出, 则像在 604, 14) 中一样, 可以变到曲面的参数表示式, 并且 φ, θ 起着参数的作用。再从这表示式出发就可由公式(23)导出体积的一个简洁表示式

$$V = \frac{1}{3} \int \int_{(\Delta)} r^3 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta, \quad (24)$$

这时 (Δ) 是参数 φ, θ 的变域。

10) 计算由曲面

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2 xy$$

所范围立体的体积。

解 从曲面的极坐标方程

$$r = a \sin \varphi \sqrt{\sin 2\theta}$$

出发, 我们利用公式(24)会得到:

$$V = \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi \, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{8}{3}} \theta \cos^{\frac{3}{2}} \theta \, d\theta.$$

按照 300, 1) 中的公式计算第一个积分, 按照 495, 4) (b) 中的公式计算第二个积分, 最后我们求得

$$V = \frac{\sqrt{2\pi}}{48} a^3 \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

11) 设闭路 (L) 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$, 而曲面 (S) 为半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z > 0)$ 。同时在曲面上我们取其上侧, 并给闭路以反时针方向 (如果是从上面来看它)。试就函数 $P = x^2 y^3, Q = 1, R = z$ 来验证斯托克斯公式(21)。

积分

$$\int_{(L)} x^2 y^3 dx + dy + z dz$$

显然可简化为只具第一项的积分

$$\int_{(L)} x^2 y^3 dx = -a^6 \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta \cos^2 \theta \, d\theta = -\frac{\pi}{8} a^6.$$

其次, 我们有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2 y^2, \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0.$$

计算积分

$$-3 \int\int_{(S)} x^2 y^2 dx dy = -3 \int\int_{x^2+y^2 \leq a^2} x^2 y^2 dx dy = -\frac{\pi}{8} a^6,$$

我們得到同样的結果。

12) 試就函数

$$P=y, \quad Q=z, \quad R=x$$

來验证斯托克斯公式, 如果 \$(L)\$ 是圆周

$$x=a \cos^2 t, \quad y=a \sqrt{2} \sin t \cos t, \quad z=a \sin^2 t \quad (0 \leq t \leq \pi),$$

而 \$(S)\$ 是由它所范围的圓。

(这一个圓是平面 \$x+z=a\$ 被球面 \$x^2+y^2+z^2=a^2\$ 截下的部分, 它的半径等于 \$\frac{a}{\sqrt{2}}\$.)

曲线积分

$$\int_{(L)} y dx + z dy + x dz = a^2 \int_0^\pi (-\sqrt{2} \sin^2 t + 2 \cos^3 t \sin t) dt = -\frac{1}{2} \sqrt{2} \pi a^2,$$

曲面积分

$$- \int\int_{(S)} dx dy + dy dz + dz dx$$

等于上述的圓在各坐标平面上射影的面积的和, 但取相反的符号, 即

$$-2 \frac{\pi a^2}{2} \cos 45^\circ = -\frac{1}{2} \sqrt{2} \pi a^2.$$

13) 假定

$$P=y^2+z^2, \quad Q=z^2+x^2, \quad R=x^2+y^2,$$

并把球面 \$x^2+y^2+z^2=2Rx\$ (\$R>r\$, \$z>0\$) 被柱面 \$x^2+y^2=2rx\$ 割下的曲面当作 \$(S)\$, 試验证斯托克斯公式。

采用曲线的参数表示式

$$x=r(1+\cos t), \quad y=r \sin t, \quad z=\sqrt{2r(R-r)}\sqrt{1+\cos t} \quad (0 \leq t \leq 2\pi),^*$$

則对于曲线积分, 我們得到一个很复杂的用常义积分写出的表示式:

$$\int_0^{2\pi} \left\{ [r^2 \sin^2 t + 2r(R-r)(1+\cos t)](-r \sin t) + \right.$$

* 如果令 \$x-r=r \cos t\$, \$y=r \sin t\$, 則参数 \$t\$ 的几何意义很清楚; 把这二表示式代入球面的方程中, 我們可求得 \$z\$ 与 \$t\$ 的关系。

$$+ [2r(R-r)(1+\cos t) + r^2(1+\cos t)^2]r \cos t + \\ + [r^2(1+\cos t)^2 + r^2 \sin^2 t] \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2r(R-r)}{1+\cos t}} (-\sin t) \Big\} dt.$$

可是大括号内的第一项及第三项各与 dt 相乘都具有 $f(\cos t)d\cos t$ 的形式, 它们的积分由余弦的周期性应等于零, 实行剩下的计算, 我们得到 $2\pi Rr^2$ 。

至于曲面积分

$$2 \iint_{(S)} (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy,$$

它是展布在上述的曲面的上侧的, 我们首先把它改为另一形式:

$$2 \iint_{(S)} [(y-z)\cos\lambda + (z-x)\cos\mu + (x-y)\cos\nu]dS.$$

因为

$$\cos\lambda = \frac{x-R}{R}, \quad \cos\mu = \frac{y}{R}, \quad \cos\nu = \frac{z}{R},$$

所以, 把这三式代入后, 经过简化即把所要求的积分化为下面的积分:

$$2 \iint_{(S)} (z-y)dS.$$

依据这曲面对于 xz 平面的对称性, 积分 $\iint_{(S)} y dS$ 为零。再把剩下的积分化为第二型的积分, 得到

$$2 \iint_{(S)} z dS = 2 \iint_{(S)} \frac{z}{\cos\nu} dx dy = 2R \iint_{(S)} dx dy = 2\pi Rr^2.$$

14) 验证斯托克斯公式

$$\int_{(L)} (z^2 - r^2) dx + (r^2 - y^2) dy + (y^2 - z^2) dz = 2 \iint_{(S)} x dx dy + y dy dz + z dz dx,$$

其中取螺旋曲面

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = cv \\ (a \leq u \leq b; \quad 0 \leq v \leq 2\pi)$$

作为 (S) , 它是由两个螺旋线及两个直线段作成的闭路 (L) 所范围的。

解 如果把曲面积分展布在所述曲面的上侧, 而依对应的方向取曲线积分, 则两积分都等于 $\pi c(b^2 - a^2)$ 。

616. 斯托克斯公式在研究空间曲线积分上的应用 設在开区域

(T)内所给出的函数 P, Q, R 和它们的导数

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}$$

都是連續的。

利用斯托克斯公式, 对于沿着任一个在(T)内而不穿过其自身的閉路(L)而取的积分

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz, \quad (25)$$

我們不难建立使得它为零的必要而且充分的条件。

可是, 为了要能够利用斯托克斯公式, 必須預先对于我們所討論的三維区域(T)給以自然的限制。就是說, 必須要求, 不管(L)是区域(T)内什么样的簡單閉路, 总可以“画出”一个以(L)本身为边界而且也全部包含在(T)内的曲面(S)。这个性质类似于平面区域单連性的性质; 在具备这性质的情形下, 空間区域(T)也叫做(“曲面”*)单連区域。譬如說, 由两同心球面所范围的立体是在这意义下的单連区域, 而环面体則不是。

設(T)就是一(曲面)单連区域。在边界(L)上, 如前所說, 画一曲面(S), 我們按斯托克斯公式用曲面积分

$$\iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx$$

来代替曲綫积分(25)。要使这积分为零, 其充分条件是

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \quad (B)$$

这些条件同时也是必要的, 这我們不难予以证实(像第 576 目中一样), 只要考虑輪流落在各坐标平面的平行面上的平面图形(S)。

由第 539 目末的說明, 这些条件(B)是使得积分

* 与后面[527]将要說的空間区域的另一种单連性不同。

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz$$

与联接区域(T)内任意两点 A 与 B 的曲线 (AB) 的形状无关的必要充分条件; 由假设, 当然, 这区域是(曲面)单连区域。

读者可看出, 我们在这里利用了斯托克斯公式, 完全像在第 576 目中一样, 为了类似的目的利用了格林公式。

从这讨论当中可以联系到这样一个问题, 即微分式

$$Pdx + Qdy + Rdz \quad (26)$$

是否为某一个三变量的单值函数的全微分。为了要它是一个全微分, 条件(B)的必要性可以直接验证, 参看第 539 目。可是在那里条件(B)的充分性只是就基本区域(T)是长方体的情形来建立的, 现在不难推到(曲面)单连区域的一般情况。于是原函数立可写成曲线积分的形式

$$F(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz,$$

它——当条件(B)成立时——与路径无关。因此, 对于所述类型的区域(T), 条件(B)是使表示式(26)为一全微分的必要且充分的条件。

第十八章 三重积分及多重积分

§1 三重积分及其计算

617. 立体质量计算的问题 设有充满质量的某一立体(V), 并已知在它的每点 $M(x, y, z)$ 处, 这种质量的密度分布为

$$\rho = \rho(M) = \rho(x, y, z).$$

要求确定立体的全部质量 m 。

为了解答这一问题, 将立体(V)分成许多小块:

$$(V_1), (V_2), \dots, (V_n),$$

并在每一小块的范围內取一点

$$M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i).$$

近似地认为在小块(V_i)的范围內密度是常数且恰等于所选取的点处的密度 $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, 则这一小块的质量 m_i 可近似地表作:

$$m_i \doteq \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i,$$

而整个立体的质量将为

$$m \doteq \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i.$$

如所有小块的直径趋近于零, 则变成极限时这一近似等式就成为准确的了, 故

$$m = \lim \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i, \quad (1)$$

而问题得以解决。

我們由此看到, 解决这问题也引导到要考察一特殊和的极限, 这种和是我們在全书中屡屡遇见的各种积分和的类型。

这种类似类型的极限在力学及物理学中必须常常考虑到, 它們称

为三重积分。用一种为它们而取的記法, 以上結果可写作:

$$m = \iiint_{(V)} \rho(x, y, z) dV. \quad (2)$$

本章主要討論三重积分的理論及其重要应用。因为对二重积分所建立的一系列命題与它們的证明都可同时移到三重积分的情形上来, 故我們通常将这些命題表述出来就算了, 而請讀者再复述一下以前的证明。

618. 三重积分及其存在的条件 在建立新的积分构造——三重积分——的一般定义时, 如同平面图形面积概念是二重积分定义的基础一样, 立体体积概念起着主要的作用。

在第一卷中我們已熟識了体积概念且不止一次遇見過它。对于一已給立体, 其体积存在的条件在于范围它的曲面有体积 0 [332]。我們將只考察这种曲面, 所以在一切所論的情形下体积的存在就由此得以保证。特例, 如我們所知, 分片光滑的曲面就属于所述曲面类中。

現設在某一空間区域 (V) 中已給一函数 $f(x, y, z)$ 。用一曲面网将这一区域分成有限个部分 $(V_1), (V_2), \dots, (V_n)$, 分别有体积 $V_1, V_2, \dots, V_n$ 。在第 i 个元素 (V_i) 的范围内任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 将这一点处的函数值 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 乘上体积 V_i 并作积分和

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i.$$

当所有区域 (V_i) 的最大直徑趋于零时, 这一和的极限 I 就称为函数 $f(x, y, z)$ 在区域 (V) 中的三重积分, 用記号表为

$$I = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz.$$

这样的有限极限仅对有界函数存在; 对于这种函数, 除积分和 σ 外, 还可引进达布和;

$$s = \sum_{i=1}^n m_i V_i, \quad S = \sum_{i=1}^n M_i V_i,$$

其中

$$m_i = \inf_{(V_i)} \{f\}, \quad M_i = \sup_{(V_i)} \{f\}.$$

用普通的方法可证明积分存在的必要充分条件为

$$\lim (S - s) = 0$$

或

$$\lim \sum_{i=1}^n \omega_i V_i = 0,$$

其中 $\omega_i = M_i - m_i$ 是函数 f 在区域 (V_i) 上的振动。[注意, 当积分存在时, 两个和 s, S 均以它为极限。]

由此立刻得出, 任一連續函数 f 为可积的。

可以将这些条件略为放宽些, 即: 任一有界函数, 它的所有不連續点在有限个体积为 0 的曲面上时, 是可积的。

这一断語的证明[参照 565] 建立于下一預备定理上:

如一区域 (V) , 含有体积为 0 的曲面 (S) , 被分为許多元素区域, 則那些与曲面 (S) 相遇的部分其体积和与所有部分区域的直徑同时趋近于零。

619. 可积函数与三重积分的性质 只須将这些性质逐条写出来就够了[它們可与在 567 中所述的相像地证明]。

1° 三重积分的存在及大小与函数在有限个体积为 0 的曲面上所取的值无关。

2° 如 $(V) = (V') + (V'')$, 則

$$\iiint_{(V)} f dV = \iiint_{(V')} f dV + \iiint_{(V'')} f dV,$$

且由左端积分的存在就能推出右端两积分的存在, 反过来也是如此。

3° 如 $k = \text{const.}$, 則

$$\iiint_{(V)} k f dV = k \iiint_{(V)} f dV,$$

且由右端积分的存在就得出左端积分的存在。

4° 如在区域 (V) 中函数 f 及 g 皆可积, 则函数 $f \pm g$ 也可积分, 且

$$\iiint_{(V)} (f \pm g) dV = \iiint_{(V)} f dV \pm \iiint_{(V)} g dV.$$

5° 如在区域 (V) 中可积函数 f 及 g 适合不等式 $f \leq g$, 则

$$\iiint_{(V)} f dV \leq \iiint_{(V)} g dV.$$

6° 在函数 f 可积时, 函数 $|f|$ 也可积, 且有不等式

$$\left| \iiint_{(V)} f dV \right| \leq \iiint_{(V)} |f| dV.$$

7° 如在 (V) 中可积函数 f 满足不等式

$$m \leq f \leq M,$$

则

$$mV \leq \iiint_{(V)} f dV \leq MV.$$

换句话说, 中值定理成立:

$$\iiint_{(V)} f dV = \mu V \quad (m \leq \mu \leq M).$$

在函数 f 连续时这一公式可写成

$$\iiint_{(V)} f dV = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) V \quad (3)$$

的形状, 其中 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 是区域 (V) 的某一点。

又, 很容易将第 568 目的内容推广到三维的情形: 和那里一样, 可建立(三维的)区域函数的概念, 特别, 可加函数的概念。对变动区域 (v) 的积分就是这种函数的一重要例子(参看 2°):

$$\Phi((v)) = \iiint_{(v)} f dv. \quad (4)$$

与以前相似可引进函数 $\Phi((v))$ 在一已知点 M 处对区域的导数概念, 那就是当包含点 M 的区域 (v) 缩到这点时我们这样称呼极限

$$\lim_{(v) \rightarrow M} \frac{\Phi((v))}{v}.$$

8° 如积分号下函数连续, 则积分(4)在点 $M(x, y, z)$ 处对区域的导数恰等于积分号下函数在这一点处的值, 即 $f(M) = f(x, y, z)$ 。

因此, 在所述假定下积分(4)在某种意义下是函数 f 的“原函数”, 且与平面情形相似, 可证明, 是唯一的可加原函数。

620. 展布在平行六面体上的三重积分的计算 我们以下一情形开始来叙述三重积分计算的问题, 即当在其中函数 $f(x, y, z)$ 有定义的立体是一长方体 $(T) = [a, b; c, d; e, f]$ (图 98), 它在 yz 平面上射影于矩形 $(R) = [c, d; e, f]$ 。

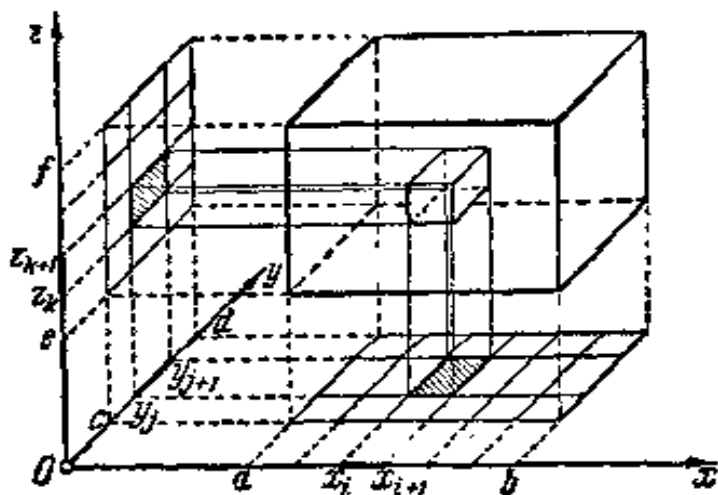


图 98

定理 如对函数 $f(x, y, z)$ 三重积分

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z) dT \quad (5)$$

存在, 且若对 $[a, b]$ 中每一固定的 x , 二重积分

$$I(x) = \iint_{(R)} f(x, y, z) dR \quad (6)$$

存在, 则逐次积分

$$\int_a^b dx \iint_{(R)} f(x, y, z) dR \quad (7)$$

亦存在且适合等式

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z) dT = \int_a^b dx \iint_{(R)} f(x, y, z) dR. \quad (8)$$

证明与在第 569 目中所作者相似。用点

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = b,$$

$$y_0 = c < y_1 < \cdots < y_j < \cdots < y_m = d,$$

$$z_0 = e < z_1 < \cdots < z_k < \cdots < z_l = f$$

将区间 $[a, b]$, $[c, d]$ 及 $[e, f]$ 各分成许多部分, 这样就将长方体 (T) 分成许多元素长方体

$$(T_{i,j,k}) = [x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}; z_k, z_{k+1}]$$

$$(i=0, 1, \cdots, n-1; j=0, 1, \cdots, m-1; k=0, 1, \cdots, l-1),$$

且同时矩形 (R) 亦分成许多元素矩形

$$(R_{j,k}) = [y_j, y_{j+1}; z_k, z_{k+1}]$$

(其中 j 及 k 取与刚才所取相同的值)。

$$\text{令} \quad m_{i,j,k} = \inf_{(T_{i,j,k})} \{f\}, \quad M_{i,j,k} = \sup_{(T_{i,j,k})} \{f\},$$

由 619, 7°, 对 $[x_i, x_{i+1}]$ 中一切的值 x 我们有

$$m_{i,j,k} \Delta y_j \Delta z_k \leq \iint_{(R_{j,k})} f(x, y, z) dy dz \leq M_{i,j,k} \Delta y_j \Delta z_k.$$

在这一区间中固定一任意值 $x = \xi_i$, 将对所有的值 j 及 k 的类似不等式相加, 我们得不等式

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_k m_{i,j,k} \Delta y_j \Delta z_k &\leq I(\xi_i) = \iint_{(R)} f(\xi_i, y, z) dy dz \leq \\ &\leq \sum_j \sum_k M_{i,j,k} \Delta y_j \Delta z_k. \end{aligned}$$

最后, 将这些不等式逐端乘上 Δx_i , 这次并对记号 i 相加:

$$\sum_i \sum_j \sum_k m_{i,j,k} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \leq \sum_i I(\xi_i) \Delta x_i \leq$$

$$\leq \sum_i \sum_j \sum_k M_{i,j,k} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

两端是积分(5)的达布和, 当所有的差 $\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k$ 趋近于零时, 趋近于这积分为极限。这就意味着, 在中间的积分和也趋近于同一极限。这就同时既证明了积分(7)的存在, 又证明了等式(8)。

如再假定对 $[a, b]$ 的任何值 x 及 $[c, d]$ 的任何值 y , 单积分

$$\int_c^f f(x, y, z) dz \quad (9)$$

存在, 则等式(8)中的二重积分可用逐次积分来替代[569], 而最后得:

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z) dT = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_c^f f(x, y, z) dz, \quad (10)$$

因此, 三重积分的计算就化为逐一计算三个单积分。当然, 公式(10)中变数 x, y, z 的地位可以任意颠倒。

读者不妨自己论证: 由三重积分(5)及单积分(9)的存在可推得公式:

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z) dT = \iint_{(Q)} dx dy \int_c^f f(x, y, z) dz, \quad (11)$$

其中 $(Q) = [a, b; c, d]$ 。这里变数的次序亦可以颠倒。

特别, 对連續函数 $f(x, y, z)$ 的情形, 显然所有的公式(8), (11), (10)及将变数颠倒得出的与它们相似的公式皆成立。

621. 在任何区域上的三重积分的计算 与第 571 目中一样, 展布在任何形状立体 (V) 上的积分其一般情形可很容易变到刚才考察的情形。即若函数 $f(x, y, z)$ 定义于区域 (V) 中, 则只要引进一函数 $f^*(x, y, z)$ 以代替它, 这一函数定义于一容纳 (V) 的长方体 (T) 中, 令

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{在 } (V) \text{ 中,} \\ 0 & \text{在 } (V) \text{ 外.} \end{cases}$$

用这种方法就可得到全部以后所引导的公式。

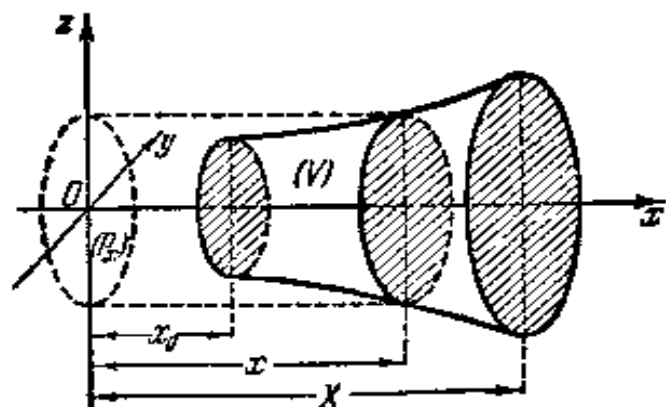


图 99

我們来討論一些最有趣味的情形。

設立体(V)限制在平面 $x=x_0$ 及 $x=X$ 間, 且用每一个对应于一固定值 $x(x_0 \leq x \leq X)$ 的与它平行的平面截于某一有面积的图形; 以(P_x)表它在 yz 平面上的射影(图 99)。則

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \int_{x_0}^X dx \iint_{(P_x)} f(x, y, z) dy dz, \quad (8^*)$$

当然是在三重积分及二重积分皆存在的假定之下得出的。这与公式(8)相似。

再設立体(V)是一“柱形长条”, 其上下分别为曲面

$$z=z_0(x, y) \text{ 及 } z=Z(x, y)$$

所圍住, 这两曲面在 xy 平面上射影于某一被面积为 0 的曲綫(K)所范围的一图形(D); 立体(V)的侧面被一柱面所圍住, 这柱面的母綫平行于 z 軸并以曲綫(K)为准綫(图 96)。則与公式(11)相似, 有

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iint_{(D)} dx dy \int_{z_0(x, y)}^{Z(x, y)} f(x, y, z) dz; \quad (11^*)$$

此时假定了三重积分及右端——里面的——单积分存在。

如区域(D)是由两曲綫(图 100)

$$y=y_0(x) \text{ 及 } y=Y(x) (x_0 \leq x \leq X)$$

以及两直綫 $x=x_0$, $x=X$ 所圍成的曲边梯形, 則立体(V)适合于上所考察的两种样子。在公式(8*)內或在公式(11*)內将二重积分換作逐

次积分,得

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV &= \\ &= \int_{x_0}^X dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} dy \int_{z_0(x, y)}^{Z(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (16^*) \end{aligned}$$

这一公式推广了公式(10)。

与在前节中讨论过的最简单情形一样, 函数 $f(x, y, z)$ 的连续就保证了所有公式(8*), (11*), (10*)及由它们将变数 x, y, z 颠倒所得的与它们相类似公式皆可应用。

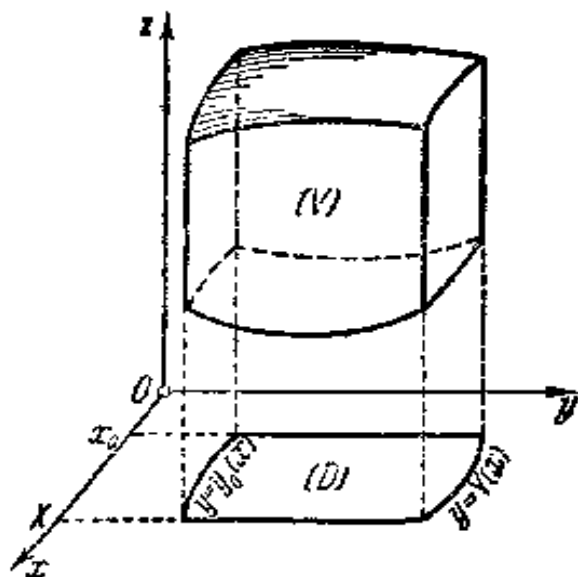


图 100

622. 广义三重积分 常积分区域延伸到无穷远或积分号下的函数在一些奇点、线或面附近不为有界时, 从常义积分出发, 借一个附加的极限过程之助可得到广义三重积分。多维情况与线情况相比较的特征已经在研究广义二重积分时讲过了, 而现在不要再添加什么。

广义三重积分同样必须是绝对收敛的。这一情况就将这种积分的存在及计算的全部问题化为正的(非负的)积分号下函数的情形。

在这一假定下, 与二重积分情形时一样, 亦可确立各种样子的三重积分与逐次积分间的联系。我们不预备讨论这一点了。

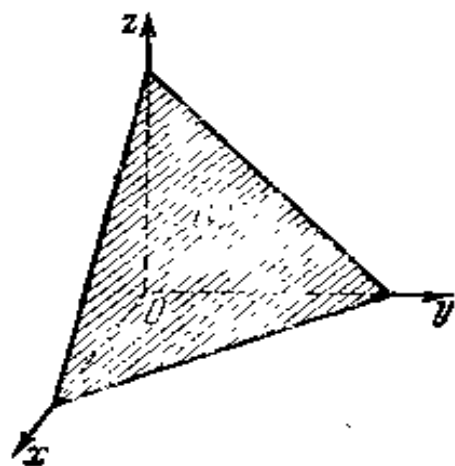


图 101

623. 例 1) 计算积分

$$I = \iiint \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3},$$

它展布在由平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 及 $x+y+z=1$ 所围成的四面体(V)上(图 101)。

解 立体在 xy 平面上的射影为由直线 $x=0$, $y=0$ 及 $x+y=1$ 所组成的三角形, 显然, x 变化的界限是数 0

与 1, 而当 x 固定于这两个界之间时, 变数 y 自 0 变到 $1-x$. 如 x, y 都固定, 则点可沿垂线自平面 $z=0$ 移到平面 $x+y+z=1$; 因此, z 的变动范围为 0 及 $1-x-y$.

由公式(10*), 我们有

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

从里面开始, 逐一计算出各积分:

$$\begin{aligned} \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right], \\ \frac{1}{2} \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] dy &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3-x}{4} \right), \end{aligned}$$

最后,

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3-x}{4} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\log 2 - \frac{5}{8} \right).$$

2) 计算积分

$$K = \iiint_{(V)} z \, dx \, dy \, dz,$$

其中 (V) 是椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 的上面一半.

解 立体在 xy 平面上的射影是椭圆盘 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$. 故 x 的变动范围是数 $-a$ 及 $+a$, 而当 x 固定时, 变数 y 自 $-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 变到 $+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. 立体在下面为 xy 平面所限住, 而上面为椭球面所限住, 故当 x 及 y 都固定时 z 的变动范围是

$$0 \text{ 及 } c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

由同一公式(10*),

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} z \, dz = \frac{c^2}{2} \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dy = \\ &= c^2 \int_{-a}^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dy = \frac{2bc^2}{3a^3} \int_{-a}^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \end{aligned}$$

* 由于积分号下函数为偶函数。

$$= \frac{4bc^2}{3a^3} \int_0^a (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} dr = \frac{\pi}{4} abc^2.$$

亦可用另一法来进行计算。即，由公式(8*)，但在它里面将变数 x 及 z 的地位交换，我们将有

$$I = \int_0^c dz \iint_{(R_z)} z \, dx \, dy = \int_0^c z \, dz \iint_{(R_z)} dx \, dy,$$

其中 (R_z) 是椭球体被平面 $Z = z$ 所交的截面在 xy 平面上的射影(射影时不发生变形)。但二重积分

$$\iint_{(R_z)} dx \, dy$$

不是别的，恰为这一射影的面积 R_z 。因为射影的边界在 xy 平面上有方程

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} = 1,$$

亦即是一有半轴

$$a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}, \quad b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$$

的椭圆，所以，如我们已知道的，

$$R_z = \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

因此，

$$I = \pi ab \int_0^c z \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \frac{\pi abc^2}{4}.$$

计算是简化得多了，不过只是因为利用了为我们所熟知的椭圆面积的大小。

3) 计算积分

$$L = \iiint_{(T)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx \, dy \, dz,$$

其中 (T) 是整个椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 。

解 应用在前题解答中所述的第二方法，得

$$L = \int_{-a}^a \frac{x^2}{a^2} dx \iint_{(T'_x)} dy \, dz + \int_{-b}^b \frac{y^2}{b^2} dy \iint_{(T'_y)} dz \, dx + \int_{-c}^c \frac{z^2}{c^2} dz \iint_{(R_z)} dx \, dy.$$

于是，

$$L = \frac{\pi bc}{a^2} \int_{-a}^a x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx + \frac{\pi ca}{b^2} \int_{-b}^b y^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy + \frac{\pi ab}{c^2} \int_{-c}^c z^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \frac{4}{5} \cdot \pi abc.$$

4) 计算积分

$$I = \iiint_{(A)} z \, dx \, dy \, dz,$$

其中立体(A)是由锥面 $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ 及平面 $z = h$ 所围成的(图 102)。

解 (a) 锥体在 xy 平面上的射影(Q)为圆盘 $x^2 + y^2 \leq R^2$, 由公式(11*),

$$I = \iint_{(Q)} dx \, dy \int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^h z \, dz = \frac{1}{2} \iint_{(Q)} \left[h^2 - \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2) \right] dx \, dy,$$

或变到极坐标时,

$$I = \frac{h^2}{2R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (R^2 - r^2) r \, dr = \frac{\pi R^2 h^2}{4}.$$

(b) 用另一解法, 可写

$$I = \int_0^h z \, dz \iint_{(D)} dx \, dy,$$

其中(D)是锥体被一平面所交的截面在 xy 平面上的射影, 这一平面平行于 xy 平面且在它

上面高 z 处。这一射影是一半径为 $\frac{Rz}{h}$ 的圆, 所以表明它面

积的二重积分等于 $\frac{\pi R^2}{h^2} z^2$, 于是,

$$I = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2} z^3 \, dz = \frac{\pi R^2 h^2}{4}.$$

5) 计算积分

$$K = \iiint_{(V)} x \, dx \, dy \, dz,$$

其中(V)是由平面 $x=0, y=0, z=0, y=h$ 及 $x+z=a$ 所围成的三角柱。

提示 利用公式(8*), (P_x) 是边为 h 及 $a-x$ 的矩形。

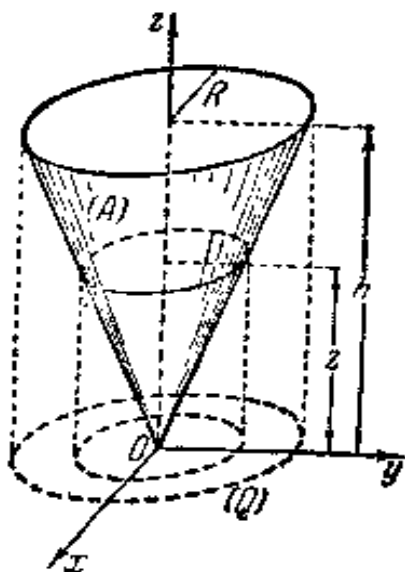


图 102

答 $K = \frac{a^3 h}{6}.$

6) 求积分

$$J = \iiint_{(T)} z^2 dx dy dz$$

的值, 其中 (T) 是两个球

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ 及 } x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$$

的公共部分(图 103)。

解 它們表面的交綫位于平面 $z = \frac{R}{2}$ 上。立体 (T) 被平行于 xy 平面的面所交的截面为圆。在这里变成逐次积分——自二重积分变到单积分, 得

$$\begin{aligned} J &= \pi \int_0^{\frac{1}{2}R} z^2 (2Rz - z^2) dz + \\ &+ \pi \int_{\frac{1}{2}R}^R z^2 (R^2 - z^2) dz = \frac{59}{480} \pi R^5. \end{aligned}$$

7) 计算积分

$$S = \iiint_{(V)} (x+y+z)^2 dx dy dz,$$

其中 (V) 是抛物体 $x^2 + y^2 \leq 2az$ 及球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$ 的公共部分。

解 首先, 将积分号下的式子展开, 可以看到, $2xy$, $2xz$, $2yz$ 諸項的积分由对称性都消失了。^{*} 因此,

$$S = \iiint_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

由公式(8^{*})(将 x 及 z 的位置交换)

$$S = \int_0^a dz \iint_{x^2+y^2 \leq 2az} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy + \int_a^{a\sqrt{3}} dz \iint_{x^2+y^2 \leq 3a^2 - z^2} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy.$$

变成极坐标时这些二重积分便容易计算出来:

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^{\sqrt{2a^2}} (r^2 + z^2) r dr &= 2\pi (a^2 z^2 + a z^3), \\ 2\pi \int_0^{\sqrt{3a^2 - z^2}} (r^2 + z^2) r dr &= \frac{1}{2} \pi (9a^4 - z^4). \end{aligned}$$

^{*} 这(在引用逐次积分后)可只用单积分及二重积分的性质来验证。

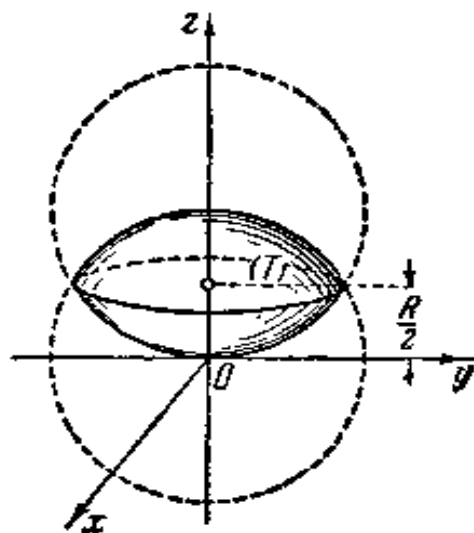


图 103

于是,

$$S = 2\pi \int_0^a (\alpha^2 z^2 + \alpha z^3) dz + \frac{1}{2}\pi \int_a^{a\sqrt{3}} (9\alpha^4 - z^4) dz = \frac{\pi\alpha^5}{5} (18\sqrt{3} - \frac{97}{6}).$$

8) 计算积分

$$I = \iiint_{(T)} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

其中 \$(T)\$ 是锥体 \$y^2 + z^2 \leq x^2\$ 及球 \$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\$ 的公共部分 (\$x \geq 0\$).

答 $I = \frac{\pi R^5}{5} (2 - \sqrt{2}).$

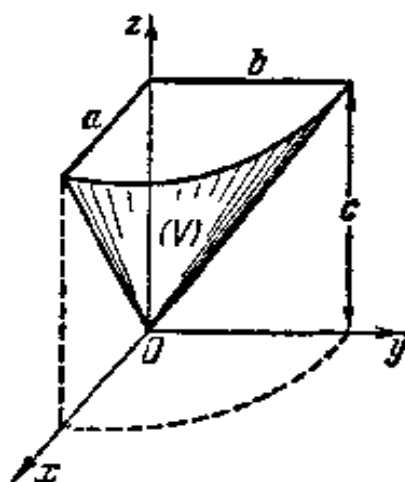


图 104

9) 设已知一锥面 $\left(\frac{z}{c}\right)^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$; 它与平面 $z=c$ 相交于一椭圆, 这椭圆在 xy 平面上的射影其方程为 $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. 考察在第一卦限内的一立体 \$(V)\$, 它是由上述锥面、平面 $z=c$ 以及二坐标面 $x=0$ 与 $y=0$ 所围成的(图 104)。

试计算展布在这一立体上的积分

$$A = \iiint_{(V)} \frac{xy}{\sqrt{z}} dx dy dz.$$

(a) 先对 z 积分, 再对 y , 最后对 x , 我们得变化的界限如下;

对 x : 0 及 a ; 对 y : 0 及 $b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$;

对 z : $c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}$ 及 c .

则

$$A = \int_0^a x dx \int_0^{b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} y dy \int_{c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}}^c \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

因此

$$\int_{c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}}^c \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{c} \left[1 - \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} \right],$$

$$\begin{aligned}
 & 2\sqrt{c} \int_0^{b\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} \left[1 - \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} \right] y dy = \\
 & = \frac{b^2\sqrt{c}}{a^2} (a^2 - x^2) - \frac{4}{5} b^2 \sqrt{c} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{5}{2}} \right], \\
 & A = \frac{1}{36} a^2 b^2 \sqrt{c}.
 \end{aligned}$$

(6) 如以相反的次序积分, 计算略为简单一些。我们的立体在 yz 平面上射影为由直线 $y=0$, $z=c$ 及 $y=\frac{b}{c}z$ 所围成的三角形。所以变化的界限将为:

对 z : 0 及 c , 对 y : 0 及 $\frac{b}{c}z$,

对 x : 0 及 $a\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$,

而所求积分可重写为:

$$A = \int_0^c dz \int_0^{\frac{b}{c}z} y dy \int_0^{a\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}} x dx.$$

这时,

$$a\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \int_0^{\frac{b}{c}z} x dx = \frac{a^2}{2} \left[\left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right],$$

$$\frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{b}{c}z} \left[\left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right] y dy = \frac{1}{8} \frac{a^2 b^2}{c^4} z^4$$

$$A = \frac{1}{8} \frac{a^2 b^2}{c^2} \int_0^c z^3 dz = \frac{1}{36} a^2 b^2 \sqrt{c}.$$

10) 試求积分

$$(a) \quad I_1 = \iiint_{(V)} z^m dx dy dz, \quad (b) \quad I_2 = \iiint_{(V)} x^m dx dy dz,$$

其中立体 (V) 与前题同 (m 是自然数)。

提示 将积分安置成与 9) (6) 中相同的次序。在第二个情形下, 积分

$$\int_0^{\frac{b}{c}z} \left[\left(\frac{bz}{c} \right)^2 - y^2 \right]^{\frac{m+1}{2}} dy$$

可化成熟知的积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} \theta d\theta [300, 1)]$.

答 (a) $I_1 = \frac{\pi}{4} \frac{abc^{m+1}}{m+3}.$

$$(6) I_2 = \begin{cases} \frac{a^{m+1}bc}{m+3} \frac{(m-1)!!}{(m+2)!!} \frac{\pi}{2} & (\text{当 } m \text{ 为偶数时}), \\ \frac{a^{m+1}bc}{m+3} \frac{(m-1)!!}{(m+2)!!} & (\text{当 } m \text{ 为奇数时}). \end{cases}$$

11) 计算积分

$$H = \iiint_{\substack{x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2}} \frac{xyz \, dx \, dy \, dz}{\sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2}} \quad (\alpha > \beta > \gamma > 0).$$

解 我們有

$$\begin{aligned} H &= \int_0^R r \, dr \int_0^{\sqrt{R^2 - r^2}} y \, dy \int_0^{\sqrt{R^2 - r^2 - y^2}} \frac{z \, dz}{\sqrt{\alpha^2 r^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2}}; \\ \int_0^{\sqrt{R^2 - r^2 - y^2}} \dots dz &= \frac{1}{\gamma^2} [\sqrt{\gamma^2 R^2 + (\alpha^2 - \gamma^2)x^2 + (\beta^2 - \gamma^2)y^2} - \sqrt{\alpha^2 r^2 + \beta^2 y^2}], \\ \frac{1}{\gamma^2} \int_0^{\sqrt{R^2 - r^2}} [\dots] y \, dy &= \frac{1}{3\beta^2(\beta^2 - \gamma^2)} [\beta^2 R^2 + (\alpha^2 - \beta^2)x^2]^{\frac{3}{2}} - \\ &\quad - \frac{1}{3\gamma^2(\beta^2 - \gamma^2)} [\gamma^2 R^2 + (\alpha^2 - \gamma^2)x^2]^{\frac{3}{2}} + \frac{\alpha^3}{3\beta^2\gamma^2} r^3, \end{aligned}$$

最后, 经一些初等(虽然是冗长的)变换后,

$$H = \frac{R^5}{15} \frac{\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta)}.$$

12) 求证: 计算(a)由曲面 $z = z(r, y)$ 所限制的柱形长条下体积的常用公式

$$V = \iint_{(P)} z \, dx \, dy$$

及(6)已知断面立体体积的常用公式

$$V = \int_a^b Q(x) dx$$

都是基本公式

$$V = \iiint_{(V)} dV = \iiint_{(V)} dx dy dz$$

的推論。

提示 应用公式(11*)及(8*)到后一积分。*

624. 力学应用 自然,在空域某一立体(V)的范围内,凡一切与质量分布有关的几何量及物理量在原则上这里都可表作取在立体(V)上的三重积分。此处同样最简单是利用“无穷小元素相加”的原理[参照 339—347 及 573]。

以 ρ 表质量分布在立体(V)的任意一点的密度,它是点的坐标的函数,我們將永远假定这一函数連續。将质量的元素 $dm = \rho dV = \rho dx dy dz$ 相加,对全部质量的大小我們將有

$$m = \iiint_{(V)} \rho dV = \iiint_{(V)} \rho dx dy dz \quad (12)$$

[参照 617]。

从元素靜矩

$$dM_{yz} = r dm = r \rho dV, \quad dM_{zx} = y dm = y \rho dV, \\ dM_{xy} = z dm = z \rho dV$$

出发,求得靜矩本身:

$$M_{yz} = \iiint_{(V)} r \rho dV, \quad M_{zx} = \iiint_{(V)} y \rho dV, \quad M_{xy} = \iiint_{(V)} z \rho dV, \quad (13)$$

而由此就得出重心的坐标:

$$\xi = \frac{\iiint_{(V)} x \rho dV}{m}, \quad \eta = \frac{\iiint_{(V)} y \rho dV}{m}, \quad \zeta = \frac{\iiint_{(V)} z \rho dV}{m}. \quad (14)$$

在均匀物体时, $\rho = \text{const.}$, 更簡地得:

$$\xi = \frac{\iiint_{(V)} x dV}{V}, \quad \eta = \frac{\iiint_{(V)} y dV}{V}, \quad \zeta = \frac{\iiint_{(V)} z dV}{V}.$$

* 关于其它計算三重积分的例题可从第 650 目中拿过来,那里考察的是 n 重积分,只要取 $n=3$ 。

对于坐标轴的惯矩公式

$$I_x = \iiint_{(V)} (y^2 + z^2) \rho dV, \quad I_y = \iiint_{(V)} (z^2 + x^2) \rho dV, \quad I_z = \iiint_{(V)} (x^2 + y^2) \rho dV \quad (15)$$

或对坐标面的惯矩公式

$$I_{xy} = \iiint_{(V)} xy \rho dV, \quad I_{yz} = \iiint_{(V)} yz \rho dV, \quad I_{zx} = \iiint_{(V)} zx \rho dV \quad (16)$$

也都自明。

最后, 设充满于立体 (V) 的质量按牛顿定律吸引一(质量为 1 的)点 $A(\xi, \eta, \zeta)$. 来自质量元素 $dm = \rho dV$ 的吸引力在坐标轴上的射影为*

$$dF_x = \frac{x - \xi}{r^3} \rho dV, \quad dF_y = \frac{y - \eta}{r^3} \rho dV, \quad dF_z = \frac{z - \zeta}{r^3} \rho dV,$$

其中

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

是点 A 到元素(或到我们认为它的质量所集中的点处)的距离。为要得总吸引力 $\vec{F}$ 在坐标轴上的射影, 相加得,

$$F_x = \iiint_{(V)} \frac{x - \xi}{r^3} \rho dV, \quad F_y = \iiint_{(V)} \frac{y - \eta}{r^3} \rho dV, \quad F_z = \iiint_{(V)} \frac{z - \zeta}{r^3} \rho dV. \quad (17)$$

同样亦可确定我们的立体在这一点上的位势:

$$W = \iiint_{(V)} \frac{\rho dV}{r}. \quad (18)$$

如点 A 在立体以外, 则所有这些积分是常义的。根据与在单积分时我们所利用过的相似的理由[469], 此时可以将积分 W 对任一变数 ξ, η, ζ 在积分记号下微分。结果我们得到

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = F_x, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} = F_y, \quad \frac{\partial W}{\partial \zeta} = F_z. \quad (19)$$

而当点 A 本身属于立体 (V) 时, 在这点处 $r = 0$, 而在(17)及(18)中积分号下面函数在它附近不再有界。以后[638]将证明: 这些积分, 作为广义积分, 都收敛, 且对于它们基本关系式(19)仍适合。

625. 例 1) 在 573 中对均匀柱形长条(当 $\rho = 1$ 时)的静矩我们有过公式:

$$M_{yz} = \iint_{(P)} zx dx dy, \quad M_{xz} = \iint_{(P)} zy dx dy, \quad M_{xy} = \frac{1}{2} \iint_{(P)} z^2 dx dy.$$

试由前日的一般公式(13)推出它们来。

* 见第 289 页底注。

例如, 我們有,

$$M_{xy} = \iiint_{(V)} z dV = \iint_{(P)} dx dy \int_0^{z(x,y)} z dz,$$

但

$$\int_0^{z(x,y)} z dz = \frac{1}{2} z^2 \Big|_{z=0}^{z=z(x,y)}.$$

这就导致所需結果。

在 573 中不是計算最后一积分, 而是引用了力学領域內(关于元素細长条靜矩)的想法。

2) 同样, 假定立体 (V) 的平行于某一平面的断面面积已知为自这一平面到断面的距离 x 的函数: $P(x)$, 在 347, 1) 中已求得靜矩的公式

$$M = \int_a^b xP(x)dx.$$

它也可作为一般公式的推論而得出。

即, 由公式(8*),

$$M = \iiint_{(V)} x dV = \int_a^b x dx \iint_{(P_x)} dy dz,$$

但里面的积分恰恰表示事先已知的断面面积。

附注 这些例子引起我們注意到这样一件事實: 与质量的空間分布有关的某些物理量, 在一些簡單假定下, 确乎可表作二重积分甚至单积分。这种积分多重性降低的錯觉, 如讀者所見, 是这样发生的: 当表示一三重积分为单积分的二重积分之形或二重积分的单积分之形时, 里面的积分, 在簡單情况下已經由几何或力学观察可知道而不必計算。

3) 利用第 623 日問題 2), 4), 10) 以決定那里所考察的立体重心的位置。

4) 求由抛物面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 及球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ 所圍成的立体的重心。

解 最簡便是按 2) 中所提到的公式計算对 xy 平面的靜矩, 只須將 x 換作 z 。断面面积 $R(z)$ 在 z 自 0 到 a 間等于 $\pi \cdot 2az$, 在 z 自 a 到 $a\sqrt{3}$ 間等于 $\pi(3a^2 - z^2)$ 。因此

$$M_{xy} = 2\pi a \int_0^a z^2 dz + \pi \int_a^{a\sqrt{3}} (3a^2 - z^2) dz = \frac{5}{3} \pi a^3.$$

因为立体的体积已知: $V = \frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3} - 5)$ [324, 6], 故 $\xi = \frac{5}{83}(6\sqrt{3} + 5)a$ 。由对称性的观察: $\xi = \eta = 0$,

5) 求球

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$$

的质量并确定重心的位置, 如球中各点的密度与坐标原点到这些点的距离成反比:

$$\rho = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

解 由第 624 目公式(12), 质量

$$m = k \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

与(8')相仿将三重积分变换, 可将它表作二重积分的单积分之形:

$$m = k \int_0^{2a} dz \iint_{(R_z)} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

其中 (R_z) 是半径为 $\sqrt{2az - z^2}$ 的圆. 如变到极坐标, 不难将里面的积分计算出来; 它等于

$$= \int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2az - z^2}} \frac{r dr d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}} = 2r(\sqrt{2az - z^2}).$$

于是

$$m = \frac{4}{3} \pi k a^2$$

同样亦可算出静矩

$$M_{xy} = k \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az} \frac{z dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{16}{15} \pi k a^3,$$

因此, $\zeta = \frac{4}{5}a$, 重心的其余二坐标显然为 0.

6) 同一问题, 但在质量另一分布的规则下:

$$\rho = \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2},$$

可得结果:

$$m = 2\pi k a,$$

$$M_{xy} = \pi k a^2, \quad \zeta = \frac{a}{2}.$$

在以下各题中质量分布的密度 ρ 假定为常数.

7) 求圆柱全部质量对圆柱底面中心的吸引力

(图 105).

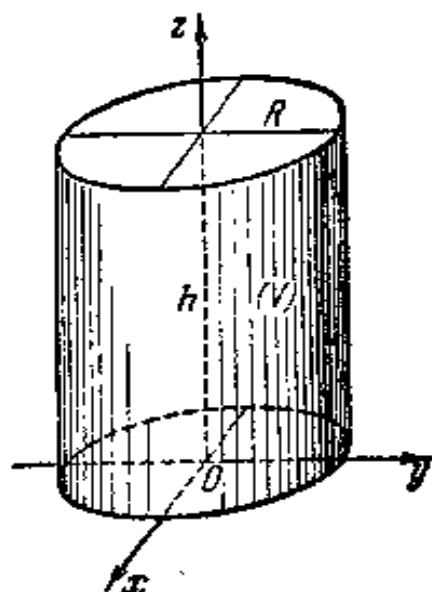


图 105

记号如图, 我们有[参看 624, (17)]

$$\begin{aligned}
 F_z &= \iiint_{(V)} \frac{\rho z dV}{r^3} = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} dx dy \int_0^h \frac{\rho z dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \rho \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} \right) dx dy = 2\pi\rho(R+h-\sqrt{R^2+h^2});
 \end{aligned}$$

吸引力的其余二分量等于 0, 所以吸引力朝着向上的铅垂线。

8) 求锥体对它的顶点的吸引力(图 106),

解 $F = F_z = \frac{2\pi h\rho}{l}(l-h).$

9) 求任意一点 A (质量为 1) 所受一球的吸引力(图 107),

解 以 R 表球的半径, 而以 α 表距离 OA. 坐标轴这样放着, 使 z 轴的正向通过点 A. 则

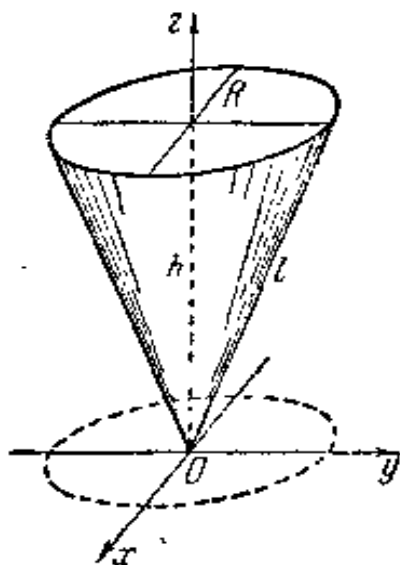


图 106

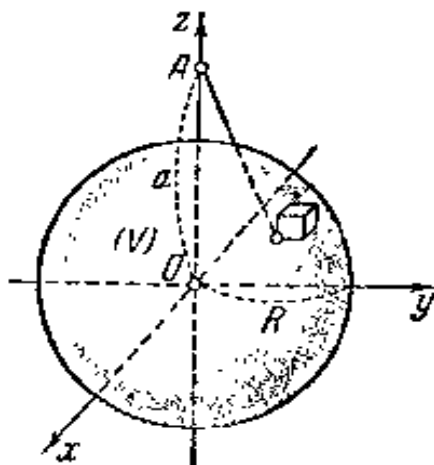


图 107

$$F_z = \iiint_{(V)} \frac{\rho(z-\alpha)}{[x^2+y^2+(z-\alpha)^2]^{\frac{3}{2}}} dx dy dz = \rho \int_{-R}^R (z-\alpha) dz \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{dx dy}{[x^2+y^2+(z-\alpha)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

用变换到极坐标的方法很容易算出里面的积分, 它等于

$$2\pi \left(\frac{1}{|z-\alpha|} - \frac{1}{\sqrt{R^2-2\alpha z+\alpha^2}} \right).$$

因此

$$F_z = 2\pi\rho \int_{-R}^R \left[\frac{z-\alpha}{|z-\alpha|} - \frac{z-\alpha}{\sqrt{R^2-2\alpha z+\alpha^2}} \right] dz.$$

但

$$\int_{-R}^R \frac{z-a}{|z-a|} dz = \int_{-R}^R \text{sign}(z-a) dz = \begin{cases} -2R, & \text{如 } a > R, \\ -2a, & \text{如 } a \leq R. \end{cases}$$

借替换 $t = \sqrt{R^2 - 2az + a^2}$ 之助(或用分部积分法——译者注)第二个积分亦容易算出来:

$$\int_{-R}^R \frac{z-a}{\sqrt{R^2 - 2az + a^2}} dz = \begin{cases} \frac{2}{3} \frac{R^3}{a^2} - 2R, & \text{如 } a > R, \\ -\frac{4}{3}a, & \text{如 } a \leq R. \end{cases}$$

最终得

$$F'_z = \begin{cases} -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho \cdot \frac{1}{a^2}, & \text{如 } a > R, \\ -\frac{4}{3}\pi a \rho, & \text{如 } a \leq R. \end{cases}$$

同时, 显然, $F'_x = F'_y = 0$, 这样, 在所有情形下吸引力朝向球心。

此处, 位于球外的一点 ($a > R$) 因球体而得到的吸引力就好像是将球体的全部质量 $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ 集中在它的中心处时该点所感受的一样。另一方面, 对于在球里面的一点 ($a < R$) 说来, 吸引力与 R 无关(而其大小恰如 $R = a$ 时的情形一样), 故很清楚, 外面的球层在里面的点上不发生任何作用。

10) 求圆柱在它底面中心上的位势。

提示 这里较简便是从对 x 及 y 积分开始, 并引用极坐标来计算二重积分:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^h \rho dz \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 2\pi\rho \int_0^h (\sqrt{R^2+z^2} - z) dz = \\ &= \rho\pi R^2 \cdot \log \frac{h + \sqrt{R^2+h^2}}{R} + \rho\pi h(\sqrt{R^2+h^2} - h). \end{aligned}$$

11) 求圆锥在(a)它的顶点及(b)它底面的中心上的位势。

提示 一一同。

答 (a) $W = \pi h(l-h)\rho$;

$$(b) W = \frac{\pi R^2 h^3}{l^3} \rho \log \frac{R(l+R)}{h(l-h)} + \frac{\pi R^2 h}{l^2} \rho (R-h).$$

12) 求球在任意一点 A 上的位势。

解 如问题 9) 的记法, 我们有

$$W = \rho \int_{-R}^R dz \iint_{x^2+y^2 \leq R^2-z^2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} = 2\pi\rho \int_{-R}^R \sqrt{R^2-2az+a^2} - |z-a| dz,$$

分开 $a \geq R$ 的情形, 于是我们有

$$\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - 2az + a^2} dz = \frac{1}{3a} [(R+a)^3 - |R-a|^3] = \begin{cases} \frac{2}{3}R^3 \cdot \frac{1}{a} + 2Ra & (a \geq R), \\ \frac{2}{3}a^3 + 2R^2 & (a \leq R), \end{cases}$$

及

$$\int_{-R}^R |z-a| dz = \begin{cases} 2Ra & (a \geq R), \\ a^2 + R^2 & (a \leq R). \end{cases}$$

因此,

$$W = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \cdot \frac{1}{a} & (a \geq R), \\ \left(2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi a^2\right) \rho & (a \leq R). \end{cases}$$

首先我们看到, 在球外一点上的位势, 与将球的全部质量集中在它的中心处时一样。

而由所得的第二个公式导致这样一推论: 如考察一内半径为 R_1 外半径为 R_2 的一空心球, 则它在位于空隙处的一点 ($a < R_1$) 上的位势可表作差

$$W = W_2 - W_1 = \left(2\pi R_2^2 - \frac{2}{3}\pi a^2\right) \rho - \left(2\pi R_1^2 - \frac{2}{3}\pi a^2\right) \rho = 2\pi(R_2^2 - R_1^2) \rho$$

而不与 a 相关。空心球体在其空隙的范围内的位势保持一常数值。

13) 如图 108 的记号, 求环面体的惯矩: I_z 及 I_x [参看 624, 15)]。

提示 我们有

$$I_z = 2\rho \int_0^a dz \iint_{R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2} (x^2 + y^2) dx dy,$$

$$I_x = 2\rho \int_0^a dz \iint_{R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2} (y^2 + z^2) dx dy,$$

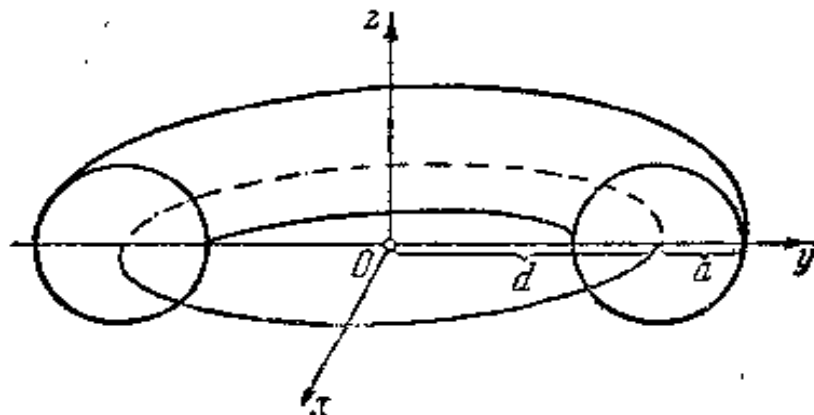


图 108

其中 $R_1 = d - \sqrt{a^2 - z^2}$, $R_2 = d + \sqrt{a^2 - z^2}$, 变到极坐标可算出这两个二重积分:

$$\text{答 } I_z = \frac{\pi^2}{2} a^2 d (4d^2 + 3a^2) \rho, \quad I_x = \frac{\pi^2}{4} a^2 d (4d^2 + 5a^2) \rho.$$

14) 設立体 (V) 繞 z 軸以角速度 ω 旋轉, 則对离旋轉軸距离为 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的元素 $dm = \rho dV$, 其綫速度 $v = r\omega$, 因此, 其动能

$$dT = \frac{1}{2} dm \cdot v^2 = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \rho dV.$$

由此容易得到整个旋轉体动能 T 的表示式:

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \int \int \int_{(V)} r^2 \rho dV = \frac{1}{2} \omega^2 \int \int \int_{(V)} (x^2 + y^2) \rho dV.$$

我們知道后一积分是立体对旋轉軸的慣矩 I_z 的表示式 [624, (15)]。这样, 最后我們有

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2.$$

15) 現在我們提出这样一問題: 計算所討論的立体 (V) 对任意一軸 u 的慣矩 (图 109), 而这一軸与坐标軸的夹角分別为 α, β, γ .

对自軸到立体上任意一点 $M(x, y, z)$ 的距离 $MD = \delta$, 我們有 $\delta^2 = r^2 - d^2$, 其中, 如由解析几何所知,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad d = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma. *$$

因为 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, 于是得

$$\begin{aligned} \delta^2 = r^2 (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + y^2 (\cos^2 \gamma + \cos^2 \alpha) + z^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) - \\ - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha - 2xy \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

現在很明显了,

$$\begin{aligned} I_u = \int \int \int_{(V)} \delta^2 \rho dV = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - \\ - 2K_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2K_{zx} \cos \gamma \cos \alpha - 2K_{xy} \cos \alpha \cos \beta, \end{aligned}$$

$$\text{其中 } K_{yz} = \int \int \int_{(V)} yz \rho dV, \quad K_{zx} = \int \int \int_{(V)} zx \rho dV, \quad K_{xy} = \int \int \int_{(V)} xy \rho dV.$$

后面各积分名叫慣性积或离心矩 [比照 574, 5)].

如要很清楚地描述立体对通过原点各不同軸的慣矩的分配情况, 則如我們对平面图形所作者相似, 應該在每一軸 α 上截取綫段

* 后一关系式是記載这事实: 点 M 在离原点距离为 d 且垂直于軸的平面上。

$$ON = \frac{1}{\sqrt{I_u}}.$$

設 $X = ON \cos \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{I_u}},$

$$Y = \frac{\cos \beta}{\sqrt{I_u}}, Z = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{I_u}}$$

是这一线段端点 N 的坐标。则自求得的 I_u 的式子
易得点 N 几何轨迹的方程

$$I_x X^2 + I_y Y^2 + I_z Z^2 - 2K_{yz} YZ - \\ - 2K_{zx} ZX - 2K_{xy} XY = 1.$$

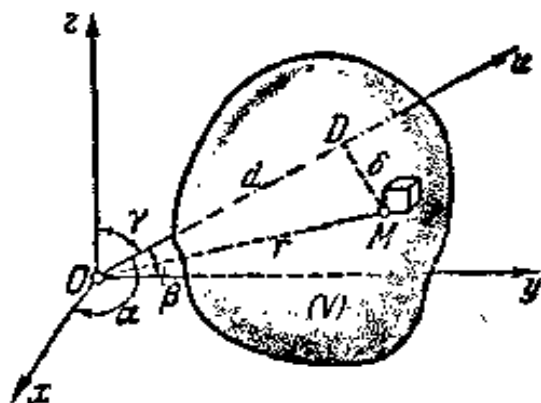


图 109

因为 ON 不变成无穷, 故这一二次曲面必定是一椭球面; 它称为惯性椭球面。在研究刚体运动时, 惯性椭球面的各轴起着重要的作用, 称作主惯性轴; 如点 O 是立体重心, 则对应的惯性轴称为中心主惯性轴。

那一个坐标轴是否为主惯性轴, 与这些离心矩有关。例如, 要 x 轴是主惯性轴, 必要且充分须适合条件

$$K_{xy} = 0, K_{zx} = 0.$$

特别, 如质量对 yz 平面对称地分布时, 它们就能适合。

16) 最后, 我们来考察在刚体绕一轴旋转时所发生的离心力的问题。

设立体 (V) 绕 z 轴以角速度 ω 旋转, 则在立体的元素 $dm = \rho dv$ 上将有一大小等于

$$dF' = \omega^2 r dm = \omega^2 r \rho dV$$

的元素离心力作用着, 其中 r 是旋转轴到元素的距离。它在坐标轴上的射影将为

$$dF'_x = \omega^2 x \rho dV, dF'_y = \omega^2 y \rho dV, dF'_z = 0,$$

所以合成离心力 $\vec{F}'$ 的射影可表作积分

$$F'_x = \omega^2 \iiint_{(V)} x \rho dV = \omega^2 M_{yz}, F'_y = \omega^2 M_{zx}, F'_z = 0,$$

其中 M_{yz}, M_{zx} 是立体的静矩。如以 ξ, η, ζ 表立体的重心坐标, 则这些公式可重写为:

$$F'_x = \omega^2 \xi m, F'_y = \omega^2 \eta m, F'_z = 0.$$

由此可见, 所述合成离心力完全准确地好像是立体的全部质量集中在它的重心时一样。

上面所谈的元素离心力对各坐标轴有下列的矩:

$$d\mathbf{M}_x = z dF'_y = \omega^2 yz \rho dV, d\mathbf{M}_y = z dF'_x = \omega^2 zx \rho dV, d\mathbf{M}_z = 0.$$

因此, 对这些轴的合成矩将为:

$$\mathbf{M}_x = \omega^2 \iiint_{(V)} yz \rho dV = \omega^2 K_{yz}, \mathbf{M}_y = \omega^2 K_{zx}, \mathbf{M}_z = 0.$$

要使离心力和互平衡力对轉动物不生任何作用(而由于它, 对它所借以固定的轴承也沒有作用), 必要且充分的条件为

$$M_{yz}=0, \quad M_{zx}=0, \quad K_{yz}=0, \quad K_{zx}=0.$$

前面两条件是說, 立体的重心必須在 z 軸上; 就設这里是原点 O , 而后两条件指出, z 軸必須是主慣性軸之一。因此, 离心力仅在下面条件下对軸承才沒有压力, 即旋轉軸須与旋轉体的中心主慣性軸之一相重合。

§ 2 高斯-奧斯特洛格拉斯基公式

626. 高斯-奧斯特洛格拉斯基公式 在二重积分理論中我們已熟識了联系平面区域上二重积分及沿区域边界的曲綫积分的格林公式。在三重积分理論中与它相类似的是联系空間区域上三重积分与区域边界上曲面积分的高斯-奧斯特洛格拉斯基公式。

考察一个由分片光滑的曲面

$$\begin{aligned} (S_1) z &= z_0(x, y) \\ (S_2) z &= Z(x, y) \end{aligned} \quad (z_0 \leq Z)$$

及母綫平行于 z 軸的柱面 (S_3) 所圍成的立体 (V) (图 96)。这柱面的准綫是在 xy 平面上范围区域 (D) —— 立体 (V) 在这平面上的射影 —— 的分段光滑的閉曲綫 (K) 。

設在区域 (V) 中定义有某一函数 $R(x, y, z)$, 在整个区域 (V) 包括边界在內它与其导函数 $\frac{\partial R}{\partial z}$ 都連續。則公式

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{(S)} R dx dy \quad (1)$$

成立, 而 (S) 是范围立体的曲面, 且右端积分是取在它的外側上的。

事实上, 由第 621 目公式(11*),

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{(D)} dx dy \int_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ &= \iint_{(D)} R(x, y, Z(x, y)) dx dy - \iint_{(\bar{D})} R(x, y, z_0(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

如考察曲面积分, 则由第 610 目公式(3)及(3*),

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{(S_2)} R(x, y, z) dx dy + \iint_{(S_1)} R(x, y, z) dx dy,$$

且右端第一个积分是取在曲面(S_2)的上侧, 而第二个取在曲面(S_1)的下侧。如在这一等式的右端添加一个取在曲面(S_3)外侧的积分

$$\iint_{(S_3)} R(x, y, z) dx dy,$$

则等式仍旧成立, 因为这个积分等于零[610, (5)]。将所有这三个积分合并在一起, 我们就得到公式(1), 它是高斯-奥斯特洛格拉斯基公式的一特殊情形。

在所引用的推理中, 读者可能已观察到与在第 613 目中导出立体(V)体积的公式时所用的推理的相似处: 当 $R(x, y, z) = z$ 时后者可从(1)得来。

与在那里一样, 容易明白, 公式(1)对更广泛的一类立体, 凡其能分成许多所讨论过的样子的部分者也正确。同样也可证明, 公式(1)对由一些任意的分片光滑曲面所围成的立体一般也成立。

证明可像在第 613 目中当扩张体积公式的应用范围时一样地进行。我们在它上面只加以一点说明。如所考察的立体(V)是一“棱柱形长条”, 例如, 在右面由曲面 $x = g(y, z)$ 所限住时, 则在第 613 目中所述推理只有在下一假定下才能搬到现在的情形上来: 函数 R 及 $\frac{\partial R}{\partial z}$ 也在所述曲面右面的某一区域内有意义且连续(因为内接多面形也可能略为越出所考察立体的范围)。^{*}

与公式(1)相似, 下面公式也成立:

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_{(S)} P dy dz, \quad (2)$$

^{*} 事实上对公式的正确性来讲这一假定并非必要的。

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{(S)} Q dz dx, \quad (3)$$

如函数 P 及 Q 在区域 (V) 中与它们的导函数 $\frac{\partial P}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial Q}{\partial y}$ 都連續的話。

将所有三公式(1), (2), (3)相加, 我們就得到一般的高斯-奧斯特洛格拉斯基公式:

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ = \iint_{(S)} P dy dz + Q dz dx + R dx dy. \end{aligned} \quad (4)$$

它将閉曲面外側的一般形式的第二型曲面积分用这一曲面所圍的立体上的三重积分表示出来了。

如來討論第一型曲面积分, 則得出高斯-奧斯特洛格拉斯基公式的另一个常用且易于記憶的形式:

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ = \iint_{(S)} (P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos \nu) dS, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 λ, μ, ν 是曲面 (S) 向外法綫与坐标軸間的夾角。

附注 格林、斯托克斯以及高斯-奧斯特洛格拉斯基公式可用一个思想統一起来: 它們將展布在某一几何图象上的积分用取在这一图象邊緣上的积分来表示。并且, 格林公式是属于二維空間情形的, 斯托克斯公式也是属于二維的不过是“弯曲”空間的, 而高斯-奧斯特洛格拉斯基公式是属于三維空間的。

我們可以将积分計算的基本公式

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

看作这些公式对一維空間的某种类似物。

627. 高斯-奥斯特洛格拉斯基公式应用于曲面积分的研究 設在三維空間的某一开区域(T)中已給連續函数 P, Q, R . 取在这一区域内且圍着某一立体的任一閉曲面(S), 我們来考察曲面积分

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \\ = \iint_{(S)} (P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos \nu) dS, \end{aligned} \quad (6)$$

要积分(6)恒等于零, 函数 P, Q, R 应滿足怎样的条件呢?

这一問題与沿一閉路的曲綫积分等于零的問題相似[576; 616], 后者借格林或斯托克斯公式已容易地被解决了。这里我們就使用高斯-奥斯特洛格拉斯基公式, 当然假定在这一公式中写出的函数 P, Q, R 的导函数存在且連續。

然而, 为了可以有理由按高斯-奥斯特洛格拉斯基公式变换积分(6), 在現在的情形下还必須直接在基本区域(T)上加以某种限制。亦即, 必須要求: 只要从外面圍着一立体(V)的一簡單閉曲面(S)属于区域(T), 則这一立体也必整个含在所述区域内。具有这种性质的区域称为(“空間”)单連的[比照 616]。这一型单連性的实质就在于沒有“洞”, 即使是点洞也要沒有; 对于不伸展到无穷的立体來說, 可以簡單地这样要求: 要一个唯一的閉曲面作它的边界[比照 534]。所以, 例如, 与在 616 中关于“曲面的”单連性所談的不同, 此处环面体是一单連体, 而空心球却不是的。

由高斯-奥斯特洛格拉斯基公式立刻将导得所求条件:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0. \quad (B)$$

它的充分性是显然的, 而必要性用三重积分对区域的微分法[619, 8°]亦容易证明。

与曲线积分情形相像,沿闭曲面积分等于零的问题,相当于沿“張”在一已知闭路上的非闭曲面的积分与曲面形状无关的问题。我們不討論这一点了。

最后注意,如函数 P, Q, R 及它們的导函数的連續性在区域 (T) 的一个或几个点被破坏了,則在等式 (B) 适合时积分 (6) 仍可异于零。但此时不难证明,对于所有圍住一确定奇点的闭曲面 (S) , 积分 (6) 有相同的值[参照 537]。

所有这些情况将用高斯积分的例子來說明,下一目我們就要来談它。

628. 高斯积分 积分

$$G = \iint_{(S)} \frac{\cos(r, n)}{r^2} dS$$

就是这样称呼的,其中 r 是联結定点 $A(\xi, \eta, \zeta)$ 与曲面上动点 $M(x, y, z)$ 的位徑向量的长:

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2},$$

而这一位徑向量与曲面在点 M 处的法綫間夹角表作 (r, n) 。同时,曲面 (S) 假定是双侧的,且法綫 n 对应于它所确定的一側。

如法綫的方向余弦是 $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$, 則

$$\begin{aligned} \cos(r, n) &= \cos(x, r) \cos \lambda + \cos(y, r) \cos \mu + \cos(z, r) \cos \nu = \\ &= \frac{x - \xi}{r} \cos \lambda + \frac{y - \eta}{r} \cos \mu + \frac{z - \zeta}{r} \cos \nu. \end{aligned}$$

因此,高斯积分可重寫为:

$$\begin{aligned} G &= \iint_{(S)} \left(\frac{x - \xi}{r^3} \cos \lambda + \frac{y - \eta}{r^3} \cos \mu + \frac{z - \zeta}{r^3} \cos \nu \right) dS = \\ &= \iint_{(S)} \left(\frac{x - \xi}{r^3} dy \, dz + \frac{y - \eta}{r^3} dz \, dx + \frac{z - \zeta}{r^3} dx \, dy \right). \end{aligned}$$

这里 $P = \frac{x - \xi}{r^3}, \quad Q = \frac{y - \eta}{r^3}, \quad R = \frac{z - \zeta}{r^3},$

所以 $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(x - \xi)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(y - \eta)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(z - \zeta)^2}{r^5}.$

容易验证条件 (B) 在整个空间除点 $A(\xi, \eta, \zeta)$ 外皆适合,在这点处函数 P, Q, R 有一不連續。

因此,沿一闭曲面而取的高斯积分,如由面不围住 A 点,必等于零。对所有包含这一点在其内的曲面,积分保持同一值。如取例如绕点 A 以半径 R 作出的球作为曲面 (S) ,就很容易求得它。此时,球上点的位径向量保持一定长度,而它的方向与球的向外法线相一致,所以 $\cos(r, n) = 1$, 我们有

$$G = \iint_{(S)} \frac{dS}{R^2} = \frac{S}{R^2} = 4\pi;$$

对所有围着 A 点的曲面,高斯积分的值就是如此。

如从高斯积分的几何意义出发,即当作自点 A 来看曲面 (S) 时的立体角* 的度量,所有这些结果也容易直接建立起来。

为了证明这,开始时我们假定:曲面 (S) 与自点 A 出发的每一射线相交于至多一点。设法线 n 向着与 A 点相反的一侧。取曲面 (S) 的一元素 (dS) ,在它上面选取一点 M 并通过这一点以点 A 为中心作一球。如将元素 (dS) 自 A 射影到这球上去,则射影的面积将为

$$\cos(r, n)dS,**$$

所以被由 A 出发的视线在单位球上割下的图形的面积将为

$$\frac{\cos(r, n)}{r^2}dS.$$

这也就是元素 (dS) 的可见(立体)角。所有这些元素角的和亦即积分 G 就是整个曲面 (S) 可见角的度量。

如曲面 (S) 与自 A 出发的射线交于不止一点,但曲面可分为许多部分,使其每一部分与这些射线只交于一点时,则只须将对于这些部分的高斯积分相加就可以了。

通常总是选取曲面的一个定侧面使法线 n 的方向与这一选法一致。则对曲面的某些部分来说,这一法线是向着与 A 相反的一侧,而可见角得出来是正的;对另外一些部分,其法线向着 A 的一侧,这一角得出来是负的。高斯积分将为这些可见角的代数和。

由高斯积分的几何解说,立刻就可明白,如曲面 (S) 是闭的,且点 A 在它所围的区域的里面,则 $G = 4\pi$ 。反过来,如点在这一区域的外面,则不同符号的可见角互相相消而 $G = 0$ 。

如点 A 在曲面 (S) 上,则高斯积分变成了广义的。容易明白,如曲面 (S) 在点 (A) 处有一确定的切面,则 $G = 2\pi$ 。

* 被某一锥形曲面所围的空间称作立体角,锥形的顶点是角顶。如图绕顶点画一单位半径的球面,则所述锥形在它上面割下一图形,它的面积就是立体角的度量。

** 此处我们将元素 (dS) 以及它的射影近似地当作平面的,并利用了正(不是中心)射影的公式。但对无穷小元素 (dS) 这里可能的相对误差也是无穷小。

629. 例 1) 按高斯-奥斯特洛格拉斯基公式变换曲面积分

$$(a) I_1 = \iint_{(S)} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy,$$

$$(b) I_2 = \iint_{(S)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (\cos \lambda + \cos \mu + \cos \nu) dS,$$

$$(B) I_3 = \iint_{(S)} x dy dz + y dz dx + z dx dy,$$

设曲面 \$(S)\$ 范围一立体 \$(V)\$.

$$\text{答 } (a) I_1 = 2 \iiint_{(V)} (x + y + z) dV, \quad (b) I_2 = \iiint_{(V)} \frac{x + y + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dV,$$

$$(B) I_3 = 3V \text{ [参照 613(16)]}.$$

2) 用高斯-奥斯特洛格拉斯基公式求证公式:

$$(a) \iiint_{(V)} \Delta u dx dy dz = \iint_{(S)} \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

$$(b) \iiint_{(V)} v \Delta u dx dy dz = - \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz + \iint_{(S)} v \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

$$(B) \iiint_{(V)} (v \Delta u - u \Delta v) dx dy dz = \iint_{(S)} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS,$$

其中我们令

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos(\tau, n) + \frac{\partial f}{\partial y} \cos(\nu, n) + \frac{\partial f}{\partial z} \cos(\zeta, n),$$

且把 \$n\$ 了解为曲面向外的法线。

提示 这一题与以下各题的解法完全与第 577 目中问题 3), 4), 5), 6), 7) 的解法相似。

3) 函数 \$u\$, 与其各导函数同时如皆连续, 且在区域 \$(V)\$ 中满足方程 \$\Delta u = 0\$, 就称作在这一区域中的 调和函数 求证: 调和函数的特征是对含在区域 \$(V)\$ 中的任一简单闭曲面 \$(S)\$ 它适合条件

$$\iint_{(S)} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0.$$

4) 求证下一断语:

如函数 \$u\$ 在一闭区域 \$(V)\$ 中是调和函数, 则它在区域内部的值可一意地被它在范围这一区域的曲面 \$(S)\$ 上的值所确定。

5) 设 \$u\$ 是在区域 \$(V)\$ 中的调和函数, \$(x_0, y_0, z_0)\$ 是这一区域的任一内点, 而 \$(S_R)\$ 是中心

在点 (x_0, y_0, z_0) 处半径为 R 的球, 则公式

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{(S_R)} u(x, y, z) dS$$

成立。試证。

提示 参考在 577, 6) 中的证明: 只須取 $v = \frac{1}{r}$ 作为輔助調和函数, 其中

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

6) 求证: 在一閉区域 (V) 上連續且在区域內面为調和的函数 $u(x, y, z)$ 在区域內面不会达到最大(最小)值(只要不是常数)。

利用这, 可与在 577, 7) 中所做者相类似地强化 4) 中的結果。

7) 求证: 一堅硬的閉曲面, 在各方面均等压力之下保持平衡。

为达此目的, 我們將证明: 作用于曲面的整个力系的主向量及(对于任意一点的)主力矩等于零。

取出曲面的一元素 (dS) , 如以 $p = \text{const.}$ 表压强, 亦即作用于单位面积上的力, 則沿这一元素的法綫方向作用于 (dS) 上的元素力在坐标軸上的射影为

$$-p \cos \lambda dS, -p \cos \mu dS, -p \cos \nu dS \quad (7)$$

(所以取負号是因为: 压力是向着曲面內面的, 而 λ, μ, ν 是向外的法綫与坐标軸間的夹角)。

主向量的射影 R_x, R_y, R_z 可自元素力的射影(7)相加得来:

$$R_x = -p \iint_{(S)} \cos \lambda dS, \quad R_y = -p \iint_{(S)} \cos \mu dS, \quad R_z = -p \iint_{(S)} \cos \nu dS.$$

但所有这些积分都等于零, 这在高斯-奥斯特洛格拉斯基公式中令

$$P=1, \quad Q=R=0; \quad Q=1, \quad P=R=0; \quad R=1, \quad P=Q=0$$

就可看出, 因此, 压力的主向量等于零。

为了确定元素力系例如对坐标原点的主力矩, 我們就要将这些元素力的矩沿坐标軸的分量

$$p(z \cos \mu - y \cos \nu) dS, \quad p(x \cos \nu - z \cos \lambda) dS, \quad p(y \cos \lambda - x \cos \mu) dS^*$$

相加。因此, 压力对原点的主力矩其射影为

* 回忆一下, 如一力沿坐标軸的分力为 X, Y, Z 且这力作用于一点 (x, y, z) , 則对点 (ξ, η, ζ) 的力矩在坐标軸上有下列各射影:

$$L_x = (y - \eta)Z - (z - \zeta)Y, \quad L_y = (z - \zeta)X - (x - \xi)Z, \quad L_z = (x - \xi)Y - (y - \eta)X.$$

$$L_x = p \iint_{(S)} (z \cos \mu - y \cos \nu) dS, \quad L_y = p \iint_{(S)} (x \cos \nu - z \cos \lambda) dS,$$

$$L_z = p \iint_{(S)} (y \cos \lambda - x \cos \mu) dS.$$

如在高斯-奥斯特洛格拉斯基公式中取 $P=0, Q=pz, R=-py$, 则得 $L_x=0$, 同样亦易证明 $L_y=L_z=0$, 压力(对原点)的主力矩等于零。证完。

8) 作为应用高斯-奥斯特洛格拉斯基公式的最后一例, 我们来导出流体静力学的基本定律之一——阿基米德定律。

大家都知道, 流体在浸入其内的一小平面块上的压力是向着这一小平面的法线的, 且等于以这小块为底, 小块浸没深度为高的液柱的重量。现在在液体中浸入一刚体(V), 在它的表面(S)的每一元素(dS)上液体按上述定律施以压力。要求确定这些元素压力的合力及它的作用点。

为了解决这一问题, 我们选一坐标系, 将 xy 平面与液体自由面放在一起, 而 z 轴垂直向下。

设液体比重等于 ρ , 而元素(dS)浸没深度为 z ; 则这一元素所受的压力将为

$$\rho z dS,$$

而它沿坐标轴的分力将为

$$-\rho z \cos \lambda dS, \quad -\rho z \cos \mu dS, \quad -\rho z \cos \nu dS.$$

此时对主向量在坐标轴上的射影我们有:

$$R_x = -\rho \iint_{(S)} z \cos \lambda dS, \quad R_y = -\rho \iint_{(S)} z \cos \mu dS, \quad R_z = -\rho \iint_{(S)} z \cos \nu dS.$$

与上题一样, 由高斯-奥斯特洛格拉斯基公式, 易得

$$R_x = R_y = 0, \quad R_z = -\rho \iiint_{(V)} dV = -\rho V.$$

因此, 压力的主向量朝着垂直向上的方向且等于被物体排出的液体重量。

现在来考察这些元素力对物体重心 $C(\xi, \eta, \zeta)$ 的矩(今后我们指的是在质量均匀分布时几何立体的重心, 它可能与物理物体的重心不相重合)。元素力矩沿坐标轴的分量为

$$\rho z[(z-\zeta) \cos \mu - (y-\eta) \cos \nu], \quad \rho z[(x-\xi) \cos \nu - (z-\zeta) \cos \lambda], \\ \rho z[(y-\eta) \cos \lambda - (x-\xi) \cos \mu],$$

而(对点 C 的)主力矩的分量得出来是:

$$I_x = \rho \iint_{(S)} z[(z-\xi)\cos\mu - (y-\eta)\cos\nu]dS,$$

$$L_y = \rho \iint_{(S)} z[(x-\xi)\cos\nu - (z-\xi)\cos\lambda]dS,$$

$$L_z = \rho \iint_{(S)} z[(y-\eta)\cos\lambda - (x-\xi)\cos\mu]dS.$$

应用高斯-奥斯特洛格拉斯基公式于第一个积分, 得出

$$I_x = \rho \iiint_{(V)} \left[\frac{\partial z(z-\xi)}{\partial y} - \frac{\partial z(y-\eta)}{\partial z} \right] dV = \rho \iiint_{(V)} (\eta - y) dV = \rho \left[\eta V - \iiint_{(V)} y dV \right] = 0,$$

因为 $\iiint_{(V)} y dV$ 是立体对 xz 平面的静矩, 等于 ηV 。同样可证明, $L_y = 0$; 最后, 直接可得出

$$L_z = 0.$$

因此, 压力对立体重心的主力矩等于零。将这一断语与前所证明的关于主向量的命题相对照, 可得出如下的结论: 在浸没于液体中的一立体上, 由液体方面对它作用有一力, 等于立体所排出的液体的重量; 这一力作用于立体的(几何)重心且垂直地朝向上。

§3 三重积分中的变数更换

630. 空间的变换及曲线坐标 在第 578 目中发展的关于平面区域变换的思想也可自然地搬到空间区域的情况上来。

设有一空间采用直角坐标系 xyz , 另一空间用坐标系 $\xi\eta\zeta$ 。在这两空间中, 考察分别由曲面 (S) 及 (Σ) 所围成的两闭区域 (D) 及 (Δ) , 这两曲面恒假定为分片光滑的。设这两区域以公式

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta), \\ y &= y(\xi, \eta, \zeta), \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

相关联, 彼此间形成一个可逆一意的对应。

设函数(1)及它们的各偏导函数皆连续。如对于用 x, y, z 表示 ξ, η, ζ 的函数作同样的假定, 则[193]

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \cdot \frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(x, y, z)} = 1,$$

且这两雅可比式因不为零保有一确定的符号。

与在 578 中一样, 由此就可断定: 在所讨论的对应下, 曲面(Σ)的点就与曲面(S)的点相对应, 反过来也是如此。

一般, 公式 (1) 将包含在区域 (Δ) 中的分片光滑的曲面变换成在 (D) 中的分片光滑的曲面, 反过来也是如此。

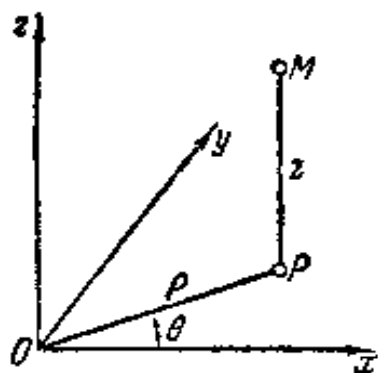


图 110

可一意地说明 xyz 空间中点的位置的数 ξ, η, ζ 称为这一点的曲面坐标。 xyz 空间的点使这些坐标之一保持常数值者形成一坐标曲面。一起共有三个这样的坐标曲面族, 过区域 (D) 的每一点有每一族的一个曲面通过。

但是, 所有这些仅在区域 (D) 及 (Δ) 间关系的严格一意性的假定下才是这样。在实际中, 这一一意性常常不成立。

631. 例 1) 圆柱坐标代表 xy 平面中的极坐标与通常的笛卡儿度量法 z 相联合 (图 110)。它们与笛卡儿坐标相关联的公式为

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z.$$

这些公式将区域

$$0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty$$

映射到整个 xyz 空间。然而, 我们指出, 直线 $\rho = 0, z = z$ 被映射于一个点 $(0, 0, z)$; 这就破坏了对应的可逆一意性。

在所考察情况下坐标曲面为:

- (a) $\rho = \text{const.}$ 是母线平行于 z 轴的圆柱面, 它的准线是 xy 平面上以原点为中心的圆周;
- (b) $\theta = \text{const.}$ 是通过 z 轴的半平面;
- (c) $z = \text{const.}$ 是平行于 xy 平面的平面。

变换的雅可比式:

$$J = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \rho.$$

除 $\rho=0$ 的情形外, 雅可比式保持正号。

2) 球坐标, 或称为空间的极坐标, 与笛卡儿坐标用公式

$$x=r \sin \varphi \cos \theta, \quad y=r \sin \varphi \sin \theta, \quad z=r \cos \varphi$$

相关联, 其中

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

量 r, φ, θ 的几何意义由图 111 很清楚: r 是联结原点 (极) 与已知点 M 的位径向量 OM , φ 是这一位径向量与 z 轴 (极轴) 间的夹角, θ 是位径向量 OM 在 xy 平面上的射影 $OP=r \sin \varphi$ (垂直于极轴) 与 x 轴间的夹角。

此时又达到了对应的可逆一意性不成立: r, φ, θ 空间的平面 $r=0$ 被映射于坐标原点 $x=y=z=0$, 直线 $\varphi=0(\pi), r=r$ 被映射于一个点

$$x=y=0, \quad z=r.$$

坐标曲面形成三族:

(a) $r=\text{const.}$ 是中心在坐标原点的同心球;

(b) $\varphi=\text{const.}$ 是以 z 轴为轴的圆锥;

(c) $\theta=\text{const.}$ 是通过 z 轴的半平面。

这一变换的雅可比式:

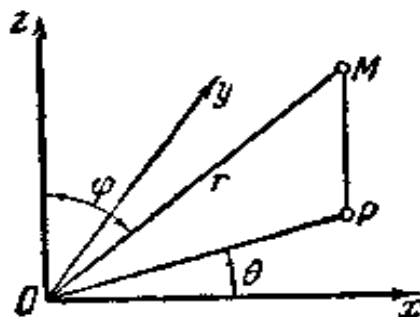


图 111

$$J = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \\ r \cos \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \\ -r \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \varphi.$$

除掉上述当 $r=0$ 或 $\varphi=0(\pi)$ 时雅可比式为零外, 它恒保持正号。

3) 空间在自身上按公式

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad z = \frac{\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

($\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 > 0$) 的变换是一意可逆的:

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \zeta = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

与平面情况一样 [579, 2)], 它称为反演法, 且有显著的几何解说; 读者试确立这解说, 并求出对应于这变换的三坐标曲面族。

4) 椭球坐标 考察共焦点且共轴的二次曲面族:

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - h^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - k^2} = 1 \quad (0 < h < k), \quad (2)$$

这是由椭球面 (当 $\lambda > k$ 时)、单叶双曲面 (当 $k > \lambda > h$ 时) 以及还有双叶双曲面 (当 $0 < \lambda < h$ 时) 构成的。

过空间中不在坐标平面上的每一点 (x, y, z) 通过有每一类型的一个曲面。事实上, 由 (2) 得的方程

$$\lambda^2(\lambda^2 - h^2)(\lambda^2 - k^2) - (\lambda^2 - h^2)(\lambda^2 - k^2)x^2 - \lambda^2(\lambda^2 - k^2)y^2 - \lambda^2(\lambda^2 - h^2)z^2 = 0$$

其左端当 $\lambda=0$ 时有负号, 当 $\lambda=h$ 时有正号, 当 $\lambda=k$ 时又有负号, 而最后当更大的 λ 时有正号。由此应得: 方程有三个正根: 一个 $\lambda > k$ (对应于椭球面), 第二个 $\mu < k$ 但 $> h$ (它给出单叶双曲面), 第三个 $\nu < h$ (双叶双曲面)。

上面所写的方程可看作对 λ^2 的三次方程, 利用它根的性质, 即:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = x^2 + y^2 + z^2 + h^2 + k^2,$$

$$\lambda^2\mu^2 + \mu^2\nu^2 + \nu^2\lambda^2 = (h^2 + k^2)x^2 + k^2y^2 + h^2z^2 + h^2k^2,$$

$$\lambda^2\mu^2\nu^2 = h^2k^2x^2,$$

求得

$$x = \pm \frac{\lambda\mu\nu}{h k}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{(\lambda^2 - h^2)(\mu^2 - h^2)(h^2 - \nu^2)}}{h\sqrt{k^2 - h^2}},$$

$$z = \pm \frac{\sqrt{(\lambda^2 - k^2)(k^2 - \mu^2)(k^2 - \nu^2)}}{k\sqrt{k^2 - h^2}}.$$

如限制于第一坐标卦限, 则在这些公式中应该只要正号。数 λ, μ, ν 可视为这一基角内点的曲面坐标。它们就称为椭球坐标。三坐标曲面族, 也就是上面所说的椭球面族, 单叶双曲面族及双叶双曲面族。

变换的雅可比式有下形:

$$J = \frac{(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{\sqrt{(\lambda^2 - h^2)(\lambda^2 - k^2)(\mu^2 - h^2)(k^2 - \mu^2)(h^2 - \nu^2)(k^2 - \nu^2)}}.$$

632. 曲面坐标下的体积表示法 回到第 630 目的假定及记号, 我们提出这样一问题: 要将 xyz 空间中一(有界)立体 (D) 的体积用展布在 $\xi\eta\zeta$ 空间中的对应立体 (Δ) 上的三重积分来表示。*

所求体积首先可表为第二型曲面积分[参看 613(14)]:

$$D = \iint_{(S)} z \, dx \, dy,$$

它是展布在曲面 (S) 的外侧上的。由此设法变成普通的二重积分。

* 与第 580 目中一样, 这里我们补充假定偏导数

$$x''_{\xi\eta}, x''_{\eta\xi}, \dots, y''_{\xi\eta}, y''_{\eta\xi}, \dots$$

存在且连续; 虽然这对于结果本身的正确性并非必要, 但可使证明容易些。

我們將自曲面(Σ)的参数方程

$$\xi = \xi(u, v), \eta = \eta(u, v), \zeta = \zeta(u, v) \quad (3)$$

出发,但設参数在 uv 平面上的某一区域(E)中变化。在变换公式(1)中用公式(3)替换 ξ, η, ζ ,則显然得到曲面(S)的参数方程:

$$x = x(\xi(u, v), \eta(u, v), \zeta(u, v)) = x(u, v),$$

$$y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

令

$$C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)},$$

由第 611 目公式(8),有

$$D = \iint_{(E)} zC \, du \, dv.$$

并且积分取正号,如果曲面(S)与所考察的它的外侧相联带的定向对应于 uv 平面的定向;且恒可假定如此[595, 596]。

因为 x, y 经过变数 ξ, η, ζ 的媒介依赖于 u, v ,則由熟知的函数行列式的性质[194],

$$C = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)} = \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} \frac{D(\eta, \zeta)}{D(u, v)} + \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} \frac{D(\zeta, \xi)}{D(u, v)}.$$

将 C 的表示式代入上面所得积分中,得

$$D = \iint_{(E)} z \left[\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)} + \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} \frac{D(\eta, \zeta)}{D(u, v)} + \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} \frac{D(\zeta, \xi)}{D(u, v)} \right] du \, dv. \quad (4)$$

将这一积分与展布在曲面(Σ)外侧上的第二型曲面积分

$$\iint_{(\Sigma)} z \left[\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} d\xi \, d\eta + \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} d\eta \, d\zeta + \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} d\zeta \, d\xi \right] \quad (5)$$

相比較。如将它从参数方程(3)按与第 611 目中公式(10)相似的公式变换到普通二重积分,則恰好得到积分(4)。这两积分間唯一差别只可能在符号上:如 uv 平面的定向对应于曲面(Σ)考察它的外侧时那一面

的定向, 则二积分相等; 而在相反情形时相差一符号。

最后, 自积分(5)按高斯-奥斯特洛格拉斯基公式可变到在区域(Δ)上的三重积分:

$$D = \pm \iiint_{(\Delta)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[z \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[z \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[z \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right] \right\} d\xi d\eta d\zeta.$$

积分号下的式子等于

$$\begin{aligned} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} + \\ & + z \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right]. \end{aligned}$$

在第一排中的和等于雅可比式

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix},$$

这很容易证明, 只要将这一行列式按最后一行的元素展开; 在方括号中的和, 用直接计算可以证明等于零。*

因此, 得到公式

$$D = \pm \iiint_{(\Delta)} \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} d\xi d\eta d\zeta.$$

* 显然,
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} &= \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi}, \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} &= \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} &= \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \zeta}. \end{aligned}$$

将这些等式一一相加, 得右端恒等于零。

如考虑到,由假定,雅可比式保有一定符号,而这一符号是雅可比式加到积分上去的,因而就可明白(因为这里认为 $D > 0$),积分号前面的符号必须与雅可比式的符号一致。我们就可将所得结果重写为最终形式:

$$D = \iiint_{(\Delta)} \left| \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \right| d\xi d\eta d\zeta, \quad (6)$$

或者,为简单起见以 $J(\xi, \eta, \zeta)$ 表雅可比式时:

$$D = \iiint_{(\Delta)} |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta. \quad (6^*)$$

积分号下的式子

$$\left| \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \right| d\xi d\eta d\zeta = |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta$$

通常称为在曲面坐标下的体积元素。

633. 补充说明 1° 在曲面 (Σ) 及 (S) 上我们固定了一定的侧面,例如对于被它们所围的立体来说的外侧。与此相关对所述曲面也确立了确定的定向[595]。如在曲面 (Σ) 上的一点描画一分开曲面的简单闭路,且我们讨论被它所范围的二区域中的任意一个时,则由公式(1)在曲面 (S) 上与该点相对应的点就描画出一类似闭路,且这时我们下必来进行二区域间的选择,因为这一选择由同一对应规则(1)自然地做好了。如果第一个闭路从曲面 (Σ) 的定向的观点来看其环行方向譬如说是正的,则第二个闭路的环行方向,如从曲面 (S) 的定向出发,就可以是正的,也可以是负的。在第一种情况下,我们就说这两曲面的定向由变换公式彼此相对应,而在第二种情况下,就说它们不相对应。

因为我们一开始就认为曲面 (S) 的定向对应于 uv 平面的定向,故这一情况或那一情况的发生要看曲面 (Σ) 的定向对应于 uv 平面的定向或否。与此相关也就有体积公式中积分前符号的选取。但最后就发现了这一符号与雅可比式的符号相同。

综上所述,我们得到结论:

两曲面 (Σ) 及 (S) 的定向由变换公式(1)彼此对应或否依雅可比式保有正号或负号而定。

2° 应用中值定理于公式(6*), 得关系式

$$D = |J(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})| \Delta, \quad (7)$$

其中 $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ 是区域 (Δ) 中某一点, 而 Δ 是这一区域的体积。由此容易导出: 当将区域 (Δ) 缩到一点 (ξ, η, ζ) 时将有[比照 619, 8°]:

$$|J(\xi, \eta, \zeta)| = \lim \frac{D}{\Delta},$$

所以雅可比式的绝对值是 $\xi\eta\zeta$ 空间当变换为 xyz 空间时(在它的所给点处)它的延展系数。

3° 公式(6)[(6*)]是在一些已知假定(区域 (D) 及 (Δ) 间的可逆一意且连续的对应等等)下推出的。但与 581, 4° 中一样, 可以证明: 这些条件在一些个别点处或沿一些个别线及面处不成立并不妨害公式正确, 只要雅可比式依然是有界的, 或至少是可积的(即使是在广义意义下也行)。

634. 几何推演 公式(6)的推演可建立在纯几何的观察上[比照 582]。对于 $\xi\eta\zeta$ 空间中的一长方体以 $d\xi, d\eta, d\zeta$ 为边者使它与 xyz 空间中在坐标曲面“ ξ ”及“ $\xi+d\xi$ ”, “ η ”及“ $\eta+d\eta$ ”, “ ζ ”及“ $\zeta+d\zeta$ ”间的一元素立体相比较, 这一立体可近似地看作一斜的平行六面体。它的体积等于以点

$$\begin{aligned} P_1(x, y, z), \quad P_2\left(x + \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi, y + \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi, z + \frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi\right), \\ P_3\left(x + \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta, y + \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta, z + \frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta\right), \\ P_4\left(x + \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta + \frac{\partial x}{\partial \zeta}d\zeta, y + \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta + \frac{\partial y}{\partial \zeta}d\zeta, \right. \\ \left. z + \frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta + \frac{\partial z}{\partial \zeta}d\zeta\right) \end{aligned}$$

为顶点的四面体体积的六倍,由解析几何中所熟知的公式,知(其绝对值)可表作行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta \end{vmatrix} = \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} d\xi d\eta d\zeta.$$

将这些各别的“体积元素”相加,便得公式(6)。

因此,这里事情的实质是:在确定立体的体积时,它不是用互相垂直的平面而是用坐标曲面网来分成许多元素块。

在简单情形时“体积元素”在曲面坐标下的表示式可直接地得到。

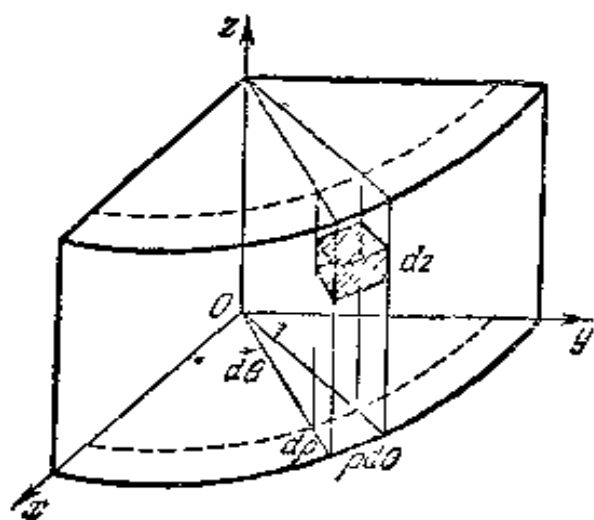


图 112a

作为一例,在圆柱坐标下来考察(xyz 空间中的)一元素区域,它是由两个半径为 ρ 及 $\rho+d\rho$ 的圆柱面、两个高 z 及 $z+dz$ 的水平面,以及两个通过 z 轴与 xz 平面交角为 θ 及 $\theta+d\theta$ 的半平面所围成的(图112a)。将这一区域近似地当作一长方体,不难求得它的边长为 $d\rho$, $\rho d\theta$ 及 dz ,所以它的体积等于 $\rho d\rho d\theta dz$,而代表这一体积与 $\rho\theta z$ 空间中的元素长方体体积 $d\rho d\theta dz$ 之比的雅可比式等于 ρ 。

同样地,在球坐标下来考察(xyz 空间中的)一元素区域,它是由半径为 r 及 $r+dr$ 的球面,锥面 φ 及 $\varphi+d\varphi$,以及半平面 θ 及 $\theta+d\theta$ 所围成的(图112b)。这一区域也可当作一长方体,其边长为 $AD=dr$, $AB=r d\varphi$ 以及 AC 。因为弧 AC 等于它自己的射影 MN ,而后者是由半径 $OM=r \sin \varphi$ 画出来的且对应于中心角 $d\theta$ 故 $AC=r \sin \varphi d\theta$,因此所论区域的体积等于 $r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$,而雅可比式是 $r^2 \sin \varphi$ 。

由初等几何观察出来的这两个结果与在631 1)及2)中所述的相符合。

635. 例 1) 计算由下列曲面所围各立体的体积:

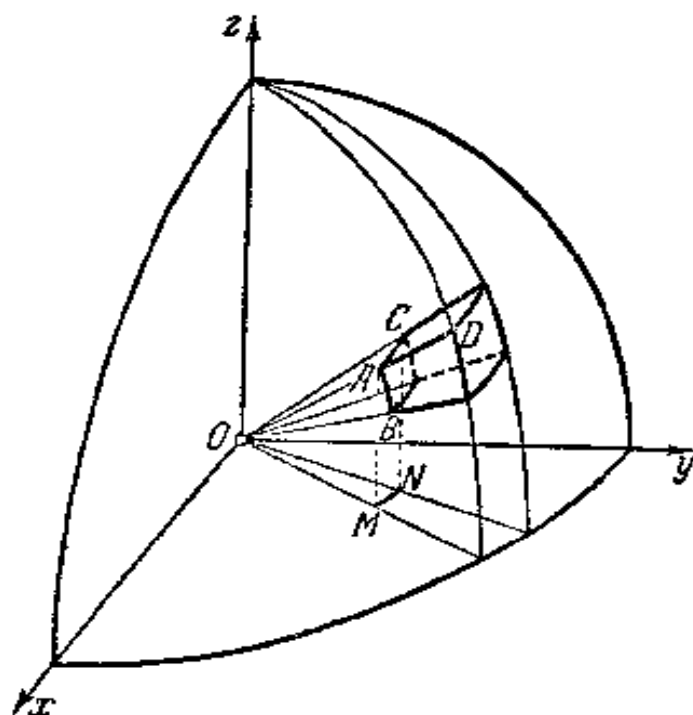


图 1126

$$(a) \quad (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z,$$

$$(b) \quad (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3 xyz,$$

$$(c) \quad (x^2 + y^2 + z^2)^n = r^{2n-1}.$$

解 (a) 因为 x 及 y 在方程中只有平方项, 故立体对 yz 平面及 zx 平面对称. 又, 既然方程左端恒为正, 故必定 $z \geq 0$, 即整个立体在 xy 平面的上面. 这些说明就可使只计算立体在第一卦限中其四分之一的体积.

在方程中式子 $x^2 + y^2 + z^2$ 的出现暗示我们变到球坐标去. 将式子

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta,$$

$$z = r \cos \varphi$$

代入曲面方程(a)中, 得球坐标下的曲面

方程: $r = a \sqrt[3]{\cos \varphi}$. 因为第一卦限可用不等式 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 来说明, 故考虑到雅可

比式 $J = r^2 \sin \varphi$ [631, 2)] 时, 将有

$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \sqrt[3]{\cos \varphi}} r^2 \sin \varphi dr = \frac{2}{3} \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{3} \pi a^3.$$

(6) 立体在第一、第三、第六及第八卦限内, 对于这些卦限分别有:

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0; \quad x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0;$$

$$x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0; \quad x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0;$$

它由四部分构成, 它们一对一对地对称于坐标轴之一 (方程的左端及右端当量 x, y, z 中的任何两个同时变号时都不改变).

变到球坐标时, 得

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \sqrt[3]{\sin^3 \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta}} r^2 \sin \varphi dr = \\ &= \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{a^3}{6}. \end{aligned}$$

(B) 这里较简单是如下形取变到球坐标的公式:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \cos \theta, \quad z = r \sin \varphi \sin \theta.$$

则曲面方程就具有形式 $r = \cos^{2n-1} \varphi$.

答 $V = \frac{\pi}{3(3n-1)}.$

2) 求由下面曲面所围各立体的体积:

(a) $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = y,$

(b) $(x^2 + y^2)^3 + z^6 = 3z^3.$

解 (a) 虽然问题的类型多少与以前各题不同, 但在这里应用球坐标仍很方便。曲面方程具有形式

$$r^3(\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) = \sin \varphi \sin \theta.$$

考虑到对称性, 将有

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt[3]{\frac{\sin \varphi \sin \theta}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi}}} r^2 \sin \varphi dr = \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi} = \frac{4}{3} \int_0^{\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

(b) 提示

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 \varphi \sin \varphi d\varphi}{\sin^6 \varphi + \cos^6 \varphi} = \pi \int_0^1 \frac{u du}{3u^2 - 3u + 1}$$

(如令 $u = \cos^2 \varphi$). **答** $V = \frac{2\pi^2}{3\sqrt{3}}.$

3) 求由下列曲面所围各立体的体积:

(a) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2 y}{h^3},$

(b) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$

(c) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) \frac{z}{c}.$

解 (a) 在曲面方程中式子 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ 的出现, 常常是按公式:

$$x = ar \sin \varphi \cos \theta, \quad y = br \sin \varphi \sin \theta, \quad z = cr \cos \varphi$$

变到广义的球坐标* 较为有用; 这时雅可比式 $J = abc r^2 \sin \varphi$ 。我们有(計及对称性):

$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{a^2 b \sin^3 \varphi \cos^3 \theta \sin \theta}{h^3}} abc r^2 \sin \varphi dr =$$

$$= \frac{4}{3} \frac{a^7 b^4 c}{h^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta \sin^3 \theta d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} \varphi d\varphi,$$

所以最后,

$$V = \frac{\pi}{192} \frac{a^7 b^4 c}{h^3}.$$

(6) 答 $V = \frac{\pi^2}{4} abc.$

(B) 答 $V = \frac{\pi}{60} abc.$

4) 求由下列各曲面所围立体的体积:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad z^2 = x^2 + y^2, \quad z = 0, \quad y = 0, \quad y = x.$$

提示 这些曲面确定了球坐标的变化区间:

$$1 \leq r \leq 4, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad (\text{或 } \pi \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}).$$

立体是由(在第一及第三坐标卦限内的)二孤立的块組成。

答 $V = \frac{21\sqrt{2}\pi}{4}.$

5) 計算曲面 $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$

所围立体的体积。

解 按下面公式引入新的坐标:

$$x = ar \sin^3 \varphi \cos^3 \theta, \quad y = br \sin^3 \varphi \sin^3 \theta, \quad z = cr \cos^3 \varphi$$

$$(0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

这时雅可比式

$$J = 9 abc r^2 \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

所以

$$V = 9abc \int_0^1 r^2 dr \int_0^\pi \sin^5 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{4}{35} \pi abc.$$

* 这与平面上广义的极坐标相仿。

6) 求曲面

$$(x+y+z)^2 = ay, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

所围立体的体积,

提示 令

$$x = r \sin^2 \varphi \cos^2 \theta, \quad y = r \sin^2 \varphi \sin^2 \theta, \quad z = r \cos^2 \varphi$$

$$\left(r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

雅可比式

$$J = 4r^2 \sin^3 \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta.$$

答 $V = \frac{a^3}{60}.$

7) 求由六平面:

$$a_1x + b_1y + c_1z = \pm h_1,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = \pm h_2,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = \pm h_3$$

所围成的斜平行六面体的体积, 当然, 假定行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

不等于零。

解 引入新的变数

$$\xi = a_1x + b_1y + c_1z,$$

$$\eta = a_2x + b_2y + c_2z,$$

$$\zeta = a_3x + b_3y + c_3z$$

$$(-h_1 \leq \xi \leq h_1, \quad -h_2 \leq \eta \leq h_2, \quad -h_3 \leq \zeta \leq h_3).$$

求出行列式 $\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$ 最为简便, 注意它等于行列式 $\frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(x, y, z)}$ 的倒数, 我们有

$$V = \frac{1}{|\Delta|} \int_{-h_1}^{h_1} d\xi \int_{-h_2}^{h_2} d\eta \int_{-h_3}^{h_3} d\zeta = \frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}.$$

8) 求由下列曲面所围各立体的体积:

(a) 柱面

$$(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 = R^2$$

及平面

$$a_3x + b_3y + c_3z = 0 \quad \text{与} \quad a_3x + b_3y + c_3z = h_3$$

(6) 橢球面

$$(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = R^2$$

(在前面 $\Delta \neq 0$ 的假定下)。

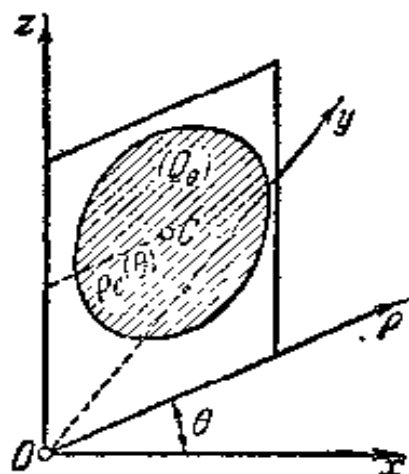


图 113

答 (a) $V = \frac{\pi R^2 h}{|\Delta|}$; (6) $V = \frac{4}{3} \frac{\pi R^3}{|\Delta|}$.

9) 应用圆柱坐标来计算立体体积时将得出一有趣的公式。

考察由一个分片光滑的曲面所围成的一立体 (V), 并假定自 z 轴出发的一个半平面对应于 $\theta = \text{const.}$ 者交立体于某一平面图形 (Q_θ), 而 θ 自 α 变到 β (图 113)。则

$$V = \int_{(\Gamma)} \int \int \rho \, d\rho \, d\theta \, dz = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int \int_{(Q_\theta)} \rho \, d\rho \, dz,$$

且将图形 (Q_θ) 引到直角坐标系 ρz 时就很方便, 但这坐标系与所述半平面同时绕 z 轴转动。*

现在易见, 二重积分 $\int \int_{(Q_\theta)} \rho \, d\rho \, dz$ 是图形 (Q_θ) 对 z 轴的静矩, 它等于这一图形的面积

$Q(\theta)$ 与 z 轴到它的重心 C 间距离 $\rho_C(\theta)$ 的乘积;

$$\int \int_{(Q_\theta)} \rho \, d\rho \, dz = Q(\theta) \rho_C(\theta).$$

将这一体积的式子代入, 得最终公式:

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} Q(\theta) \rho_C(\theta) d\theta.$$

这一公式是微·滋·忒斯科夫指出的。它在确定由(不变的或变动的)平面图形作螺旋运动时所得立体例如螺絲釘、彈簧等的体积时特别方便。

如立体 (V) 单纯地是一与 z 轴不相交的不变图形 (Q) 绕这一轴的旋轉体, 则 $Q = \text{const.}$, $\rho_C = \text{const.}$, $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, 而公式就具有形状

$$V = Q \cdot 2\pi \rho_C.$$

它表明了已知的古里金定理[342], 这定理說: 平面图形繞与它不相交的軸旋轉的立体体积等于这一图形的面积与图形重心描画出的圓周长的乘积。因此, 忒斯科夫公式是这一古典定

* 而不是将与它全等的图形引到 $\rho\theta z$ 空間中的一固定平面 ρz 上去。

理的自然推广(且反过来,这一公式也容易从它得来)。

10) 三轴椭圆体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad (a > b > c)$$

的体积已算过好几次了,它等于 $\frac{4}{3}\pi abc$ 。但是,我们现在想引用椭圆坐标 λ, μ, ν [631, 4)]来计算这一体积。如令

$$h^2 = a^2 - b^2, \quad k^2 = a^2 - c^2,$$

则当 $\lambda = a$ 时就能得到已知椭圆体本身。

椭圆体的第一卦限与 λ 自 h 变到 a , μ 自 b 变到 k , ν 自 0 变到 h 相对应。故

$$\frac{1}{8}V = \int_0^h d\nu \int_b^k d\mu \int_h^a \frac{(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{\sqrt{(\lambda^2 - h^2)(\lambda^2 - k^2)(\mu^2 - h^2)(\mu^2 - k^2)(h^2 - \nu^2)(k^2 - \nu^2)}} d\lambda.$$

但,如已所示,这一体积等于

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi abc = \frac{\pi}{6} a \sqrt{(a^2 - h^2)(a^2 - k^2)}.$$

因此,上面所写出的复杂积分的值就是这个,用别的方法来求这一直就会产生巨大的困难。

最后将给出基本公式(6)的两个有趣应用,它们可确立曲面面积及曲线长度的概念与在原则上更简单的立体体积概念间的联系。

11) 设已给一光滑曲面 (S) :

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

且在参数 u, v 变化的区域 (Δ) 中这些函数有二阶连续导函数。

在曲面的每一点 M 处的法线上,对称地在曲面的两侧截取长 $2r > 0$ 的一段。这些线段填满成某一立体 (V_r) ,^{*}已知曲面就含在其内(图 114)。

以 x, y, z 表曲面上点 M 的坐标,而以 X, Y, Z 表该点处法线上所述线段的任一点的坐标,显然,我们将有

$$X = x + \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\rho, \quad Y = y + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\rho, \quad Z = z + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\rho,$$

其中 A, B, C 有通常的意义,而 ρ 表距离 MP (带有相应的符号,所以 $-r \leq \rho \leq r$)。因此,参数 (u, v, ρ) 表所述区域 (V_r) 的点的曲面坐标。由公式(6)这一立体的体积等于

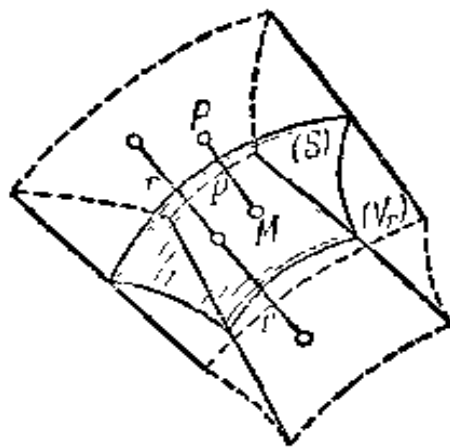


图 114

^{*} 可以证明: 对充分小的 r 所述线段彼此不相交, 所以立体的每一点恰在一条法线上。

$$V_r = \iiint \left| \frac{D(X, Y, Z)}{D(u, v, \rho)} \right| du dv d\rho.$$

但

$$\begin{aligned} \frac{D(X, Y, Z)}{D(u, v, \rho)} &= \begin{vmatrix} x'_u + \alpha_1(u, v)\rho & y'_u + \alpha_2(u, v)\rho & z'_u + \alpha_3(u, v)\rho \\ x'_v + \beta_1(u, v)\rho & y'_v + \beta_2(u, v)\rho & z'_v + \beta_3(u, v)\rho \\ \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} & \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} & \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{vmatrix} = \\ &= \sqrt{A^2+B^2+C^2} + \gamma_1(u, v)\rho + \gamma_2(u, v)\rho^2, \end{aligned}$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2$ 表 u, v 的某些連續函数。显然, 对充分小的 r (因为 $|\rho| \leq r$) 这一式子的符号将与第一項同, 即为正的。故

$$\begin{aligned} V_r &= \int_{-r}^r d\rho \iint_{(\Delta)} \{ \sqrt{A^2+B^2+C^2} + \gamma_1\rho + \gamma_2\rho^2 \} du dv = \\ &= 2r \iint_{(\Delta)} \sqrt{A^2+B^2+C^2} du dv + I r^3 \quad (I = \text{const.}). \end{aligned}$$

由此容易推出最終結果

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{V_r}{2r} = \iint_{(\Delta)} \sqrt{A^2+B^2+C^2} du dv,$$

我們認識后面的积分是曲面的面积 S 。因此, 这一面积可自体积出发而得來。

12) 設已知一光滑曲綫

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (t_0 \leq t \leq T),$$

且函数 x, y, z 有連續二阶导数。在曲綫的任一点 M 处的法面内, 想像一以 M 为中心半徑为 $r > 0$ 的圓。所有这样的圓构成某一立体(V_r), *它包含这曲綫。

不失一般性, 可以假定在所考察的曲綫段上恒有 $x'^2_t + y'^2_t > 0$ 。則为了想在所述的曲綫法面中建立一直角坐标系, 我們可以取有方向余弦

$$\begin{aligned} \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \quad -\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \quad 0 \quad \text{及} \quad \frac{x'z'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}, \\ \frac{y'z'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}, \quad -\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \end{aligned}$$

的两个相互垂直的法綫为坐标軸。

以 u, v 表对应的坐标, 我們可以表立体(V_r)的任一点 P 的坐标 X, Y, Z 为:

* 这里也可证明: 对充分小的 r , 这些圓两两无公共点, 故立体的每一点只属于其中的一个圓。

$$\begin{aligned}
 X &= x + \frac{y'u}{\sqrt{x'^2+y'^2}} + \frac{r'z'v}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}, \\
 Y &= y - \frac{r'u}{\sqrt{x'^2+y'^2}} + \frac{y'z'v}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}, \\
 Z &= z - \frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}v.
 \end{aligned}$$

这里 t, u, v 起着点 P 的曲面坐标的作用, 所以

$$V_r = \iiint \left| \frac{D(X, Y, Z)}{D(t, u, v)} \right| dt du dv.$$

但是, 易见

$$\begin{aligned}
 \frac{D(X, Y, Z)}{D(t, u, v)} &= \begin{vmatrix} x' + \alpha_1(t)u + \beta_1(t)v & y' + \alpha_2(t)u + \beta_2(t)v & z' + \alpha_3(t)u + \beta_3(t)v \\ \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} & -\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} & 0 \\ \frac{r'z'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} & \frac{y'z'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} & -\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \end{vmatrix} = \\
 &= \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} + \alpha(t)u + \beta(t)v,
 \end{aligned}$$

其中 $\alpha_1, \dots, \beta$ 是 t 的连续函数。这一式子对充分小的 r 保持正号 (因为 $|u|, |v| \leq r$)。因此

$$\begin{aligned}
 V_r &= \int_0^T dt \iint_{u^2+v^2 \leq r^2} \{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} + \alpha(t)u + \beta(t)v\} du dv = \\
 &= \pi r^2 \int_0^T \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} dt + \iint_{u^2+v^2 \leq r^2} (Ku + Lv) du dv,
 \end{aligned}$$

其中 K 及 L 是常数。我們知道第一个积分是弧长 s , 而第二个积分等于零。故

$$V_r = \pi r^2 s, \quad s = \frac{V_r}{\pi r^2}.$$

弧长还可更直接地从体积得来, 甚至不必用极限过程。

636. 三重积分中的变数更换 借体积在曲面坐标下的表示法, 不难建立三重积分中变数更换的一般公式。

設在 xyz 及 $\xi\eta\zeta$ 空間的区域 (D) 及 (Δ) 間存在一一对应, 如在第 630 目中說明了的。假設所有借以推出公式(6)的条件都保留, 我們現在求证下一等式成立:

$$\begin{aligned} \iiint_{(D)} f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta \quad (8) \end{aligned}$$

$$\left(\text{其中 } J(\xi, \eta, \zeta) = \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \right),$$

它完全类似于二重积分中的变数更换公式。同时我們假定函数 $f(x, y, z)$ 連續, 或者至多沿有限个分片光滑的曲面可以有不連續(但在任一情況下都保持有界性)。因此, 在等式(8)中的两个积分的存在将无疑問, 仅須证明等式本身。

为了证明起见, 我們如同在第 584 目中一样来进行, 用分片光滑的曲面分区域 (D) 及 (Δ) 为 (彼此相对应的) 元素块 (D_i) 及 (Δ_i) ($i=1, 2, \dots, n$), 应用公式(7)到每一对区域 $(D_i), (\Delta_i)$ 上; 我們得到

$$D_i = |J(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)| \Delta_i, \quad (9)$$

其中 $(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)$ 是区域 (Δ_i) 中不能随我們选取的某一点。取区域 (D_i) 的对应点 $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$, 即令

$$\bar{x}_i = x(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), \bar{y}_i = y(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), \bar{z}_i = z(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), \quad (10)$$

并作出(8)中第一个积分的积分和:

$$\sigma = \sum_i f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) D_i.$$

用(10)式代換此处的 $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$, 而用(9)式代換 D_i , 得到和

$$\sigma = \sum_i f(x(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), y(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), z(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)) |J(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)| \Delta_i,$$

显然这已就是(8)中第二积分的积分和。

我們让区域 (Δ_i) 的直径趋近于零, 由对应的連續性, 区域 (D_i) 的直径亦趋近于零。和 σ 必須同时趋近于两个积分, 由此即得所需要的等式。

与在二重积分情形时一样,在证明公式(6)时,当上面所作假定在一些个别点或沿有限个分段光滑曲线及分片光滑曲面处被破坏而只要雅可比式保持有界,则公式(8)也成立。

允许广义积分时,可更远地来推广公式(8)可应用的条件。读者试对所考察的情形作与在第 591 目所述者的平行叙述。这里我们着重指出,在那里所述的条件下假定(8)中积分之一存在时公式就成立,另一积分的存在已由此能够推得。

最后我们提一下,公式(6)及(8)也可以不用雅可比式的绝对值记号写出来。为了可以这样做,就应该引进立体定向(与它的边界定向有关)的概念,再视它的定向而给它的体积以及展布在立体上的积分以某一符号。详细情形留给读者,并介绍他去参考第 585 目及第 633 目中的说明 1°。

637. 例 1) 计算积分

$$I = \iiint_{(V)} \frac{xyz}{x^2 + y^2} dx dy dz,$$

其中(V)是一立体,上面由曲面

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \alpha^2 xy$$

所限制,下面由平面 $z=0$ 所限制。

解 改成球坐标。曲面方程作下形:

$$r^2 = \alpha^2 \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta,$$

注意立体对 z 轴对称,积分变成:

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\alpha \sin \varphi \sqrt{\sin \theta \cos \theta}} r^3 \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta dr = \\ &= \frac{\alpha^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos^3 \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{\alpha^4}{144}. \end{aligned}$$

2) 计算积分

$$H = \iiint_{\substack{x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2}} \frac{xyz \, dx \, dy \, dz}{\sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2}} \quad (\alpha > \beta > \gamma > 0)$$

[参照 623, 11)].

解 在球坐标下

$$H = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R \frac{r^4 \sin^3 \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta}{\sqrt{\alpha^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \beta^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \gamma^2 \cos^2 \varphi}}.$$

进行替换 $\sin^2 \varphi = u$, $\sin^2 \theta = v$ 较为方便。则

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^4 \frac{u \, dr \, du \, dv}{\sqrt{\alpha^2 u(1-v) + \beta^2 uv + \gamma^2 (1-u)}} = \\ &= \frac{R^5}{20} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \, du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\sqrt{[\gamma^2 + (\alpha^2 - \gamma^2)u] + (\beta^2 - \alpha^2)uv}} = \\ &= \frac{R^5}{15} \frac{\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

3) 计算积分

$$K = \iiint_{(V)} \frac{xyz \, dx \, dy \, dz}{x^2 + y^2 + z^2},$$

其中 (V) 是三轴椭球体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

解 如按公式

$$x = ar \sin \varphi \cos \theta, \quad y = br \sin \varphi \sin \theta, \quad z = cr \cos \varphi, \quad J = abc \, r^2 \sin \varphi$$

变到广义球坐标, 则积分可重写为下形:

$$K = a^2 b^2 c^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \frac{\sin^3 \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta}{a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \varphi}.$$

替换 $\sin^2 \varphi = u$, $\sin^2 \theta = v$. 最终结果:

$$K = \frac{a^2 b^2 c^2}{8(\alpha^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - \alpha^2)} \times \left\{ b^2 c^2 \log \frac{c}{b} + c^2 a^2 \log \frac{a}{c} + a^2 b^2 \log \frac{b}{a} \right\}.$$

4) 计算逐次积分

$$\int_1^{\infty} dz \int_1^{\infty} y \, dy \int_0^{\frac{1}{yz}} e^{xy^2 z} x^2 \, dx.$$

解 将它换作三重积分

$$\iiint_{\substack{x \geq 0, y, z \geq 1 \\ xyz \leq 1}} e^{xyz} x^2 y \, dx \, dy \, dz,$$

再采用替换

$$x = u, \quad y = \frac{u+v}{u}, \quad z = \frac{u+v+w}{u+v}, \quad J = \frac{1}{u(u+v)}.$$

积分化为:

$$\iiint_{\substack{u, v, w \geq 0 \\ u+v+w \leq 1}} e^{u+v+w} du \, dv \, dw,$$

这很容易计算.

$$\text{答} \quad \frac{e}{2} - 1.$$

5) 我们回到计算二重积分

$$B = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a\sqrt{x^2+y^2}} \cos x\xi \cos y\eta \, dx \, dy$$

[参照 592, 21)]. 因为对 $b > 0$

$$\int_0^\infty e^{-\theta^2 - \frac{b}{4\theta^2}} d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\sqrt{b}}$$

[460.6)], 故如令 $\sqrt{b} = a\sqrt{x^2+y^2}$, 得:

$$e^{-a\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\theta^2 - \frac{a^2(x^2+y^2)}{4\theta^2}} d\theta.$$

将它代入积分 B 中并改变积分的次序, 求得

$$B = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\theta^2} d\theta \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{a^2(x^2+y^2)}{4\theta^2}} \cos x\xi \cos y\eta \, dx \, dy,$$

或者, 如改为变数 $u = \frac{ax}{2\theta}$ 及 $v = \frac{ay}{2\theta}$:

$$\begin{aligned} B &= \frac{8}{\sqrt{\pi}a^2} \int_0^\infty e^{-\theta^2} \theta^2 d\theta \left\{ \int_0^\infty e^{-u^2} \cos \frac{2\theta u \xi}{a} du \int_0^\infty e^{-v^2} \cos \frac{2\theta v \eta}{a} dv \right\} = \\ &= \frac{8}{\sqrt{\pi}a^2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^2 \int_0^\infty e^{-\frac{\theta^2}{a^2} (a^2 + \xi^2 + \eta^2)} \theta^2 d\theta \end{aligned}$$

[481, 6)(a)]。分部积分, 就不难得到最终结果:

$$B = \frac{\pi}{2} \frac{a}{(a^2 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

积分次序的颠倒基于三重积分的存在。

6) 求球

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$$

在下面质量分布规则下的质量并决定其重心:

$$\rho = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

[参照 625, 5)]。

提示 变到球坐标。

7) 求空间任意一点所受一均匀球体的吸引力[参照 625, 9)]。

解 变到球坐标, 求得

$$F'_z = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{\rho r^2 (r \cos \varphi - a) \sin \varphi dr d\varphi d\theta}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

但在确定球层的吸引力[608, 11)]时, 我们已求得二重积分的值

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(r \cos \varphi - a) \sin \varphi d\varphi d\theta}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} = \begin{cases} 0 & \text{当 } a < r \text{ 时,} \\ -\frac{4\pi}{a^2} & \text{当 } a > r \text{ 时.} \end{cases}$$

现在, 当 $a > R$ 时

$$F'_z = -\frac{4\pi\rho}{a^2} \int_0^R r^2 dr = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho \cdot \frac{1}{a^2},$$

而当 $a < R$ 时

$$F'_z = -\frac{4\pi\rho}{a^2} \int_0^a r^2 dr = -\frac{4}{3}\pi \rho a.$$

8) 求均匀球体在任意一点上的位势[参照 625, 12)]。

提示 变到球坐标并利用 608, 问题 12) 的结果。

9) 重解关于球的吸引力及位势的问题, 但在更一般的质量分布规则下:

$$\rho = f(r),$$

其中 f 是中心到点的距离的任一函数。

注意我们在 625, 9) 及 12) 中所作论断在现在情况下仍然有效。

10) 求环面体的惯矩 I_z 及 I_x [参照 625, 13)]。

提示 注意环面体是由圆旋转得来(参看图 108), 这一立体内点的位置, 可以用经面与 xz 平面的夹角 φ 以及用在这一断面本身的范围内的通常极坐标 ρ, θ 来很自然地确定。

因此 $x = (d + \rho \cos \theta) \cos \varphi, y = (d + \rho \cos \theta) \sin \varphi, z = \rho \sin \theta,$

$$J = \rho(d + \rho \cos \theta),$$

且 ρ 自 0 变到 a , 而 φ 及 θ 自 0 变到 2π .

11) 计算均匀($\rho=1$)椭球体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad (a > b > c)$$

在它中心上的位势时会导出椭圆积分。

引进球坐标, 但这一次取 x 轴作为极轴:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi \cos \theta, z = r \sin \varphi \sin \theta,$$

我們将有

$$\begin{aligned} W &= \iiint_{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\cos \varphi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin \varphi \cos \theta}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sin \varphi \sin \theta}{c}\right)^2}}} r dr = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{B \cos^2 \theta + C \sin^2 \theta}, \end{aligned}$$

其中 $B = \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}, C = \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{c^2}.$

里面的积分等于 $\frac{\pi}{2\sqrt{BC}}$. 又令 $\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \cos \varphi = t$, 便得第二种椭圆积分

$$W = \frac{2\pi abc}{\sqrt{a^2 - c^2}} \int_0^{\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} t^2\right)}},$$

借替换 $t = \sin \lambda$, 它就被化至勒戎德形式:

$$W = \frac{2\pi abc}{\sqrt{a^2 - c^2}} \int_0^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - k_0^2 \sin^2 \lambda}} = \frac{2\pi abc}{\sqrt{a^2 - c^2}} F'(\lambda_0, k_0),$$

其中为简便计已令

$$\lambda_0 = \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}, \quad k_0 = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}.$$

638. 立体的吸引力及在内点上的位势 现在我们回到对于一点 $A(\xi, \eta, \zeta)$ 被一立体所吸引的力在坐标轴上的射影及在这一点上的位势共在第 624 目中的一般的表示式 (17) 与 (18), 但特别讨论当点 A 本身属于这立体时的情况。这又给出一机会来利用变数更换。

首先, 容易论证所述广义积分的存在。为了要使这些积分变成非广义的, 只要取点 A 为极变到球坐标就行了。如从立体 (V) 上割下一以 A 为中心以 r_0 为半径的球 (v_0) , 则得

$$\iiint_{(v_0)} \frac{\rho dv}{r} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r_0} \rho \frac{r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta}{r} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r_0} \rho r \sin \varphi dr d\varphi d\theta,$$

同样,

$$\iiint_{(v_0)} \frac{\rho(x-\xi)}{r^3} dv = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r_0} \rho \cos \theta \sin^2 \varphi dr d\varphi d\theta,$$

等等。这里积分号下的函数显得是连续的。*

在所考察的情况下要建立第 624 目的关系式 (19) 需要精细得多的观察。这里同样亦显得要用球坐标。

首先由上面等式可得不等式

$$\iiint_{(v_0)} \frac{\rho dv}{r} \leq 2\pi L r_0^2 \quad (11)$$

$$(L = \max \rho),$$

$$\left| \iiint_{(v_0)} \frac{\rho(x-\xi)}{r^3} dv \right| \leq 2\pi L r_0 \quad (12)$$

以下我们要用到这一结果。

现在给 ξ 一增量 h , 并与点 $A(\xi, \eta, \zeta)$ 同时考察点 $A_1(\xi+h, \eta, \zeta)$, 如前, 以 r 表自点 A 到立体任一点 $M(x, y, z)$ 的距离 AM , 以 r_1 表距离 A_1M . 必须求证: 当 $h \rightarrow 0$ 时差

$$\Delta = \frac{1}{h} \left\{ \iiint_{(V)} \frac{\rho dV}{r_1} - \iiint_{(V)} \frac{\rho dV}{r} \right\} - \iiint_{(V)} \frac{\rho(x-\xi)}{r^3} dV$$

亦趋近于零。

我们认为密度 ρ 是坐标的连续函数。

从立体 \$(V)\$ 中取出中心在 \$A\$ 半径为 \$2|h|\$ 的球 \$(v_0)\$ (图 115), 则 \$\Delta\$ 可表作四项和的形状:

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{1}{h} \iiint_{(v_0)} \frac{\rho dv}{r_1} - \frac{1}{h} \iiint_{(v_0)} \frac{\rho dv}{r} - \iiint_{(v_0)} \frac{\rho(x-\xi)}{r^3} dv + \\ & + \iiint_{(V)-(v_0)} \rho \left\{ \frac{1}{h} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) - \frac{x-\xi}{r^3} \right\} dV. \end{aligned}$$

第二及第三项立刻可用当 \$r_0=2|h|\$ 时的不等式(11)及(12)来估计:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|h|} \iiint_{(v_0)} \frac{\rho dv}{r} & \leq \frac{2\pi L(2h)^2}{|h|} = 8\pi L|h|, \\ \left| \iiint_{(v_0)} \frac{\rho(x-\xi)}{r^3} dv \right| & \leq 2\pi L \cdot 2|h| = 4\pi L|h|. \end{aligned}$$

为了更方便地估计第一项, 绕点 \$A_1\$ 作一半径为 \$3|h|\$ 的球 \$(v_1)\$; 球 \$(v_0)\$ 整个含在它里面。则再利用形如(11)的不等式时, 将有

$$\frac{1}{|h|} \iiint_{(v_0)} \frac{\rho dv}{r_1} \leq \frac{1}{|h|} \iiint_{(v_1)} \frac{\rho dv}{r_1} \leq \frac{2\pi L(3h)^2}{|h|} = 18\pi L \cdot |h|.$$

最后, 我们来讨论最后一项。如引进函数

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{r},$$

则在括号中的式子不是别的, 恰为

$$\frac{f(\xi+h, \eta, \zeta) - f(\xi, \eta, \zeta)}{h} = f'_\xi(\xi, \eta, \zeta),$$

由戴劳公式可换作

$$\frac{h}{2} f''_{\xi\xi}(\xi+\theta h, \eta, \zeta) \quad (0 < \theta < 1).$$

但现在

$$f''_{\xi\xi}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{3(x-\xi)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3},$$

所以

$$|f''_{\xi\xi}(\xi+\theta h, \eta, \zeta)| \leq \frac{4}{r_2^3},$$

其中 \$r_2\$ 是自点 \$M\$ 到点 \$A_2(\xi+\theta h, \eta, \zeta)\$ 的距离 \$A_2M\$。

由三角形 \$AMA_2\$ (见图) 有 \$A_2M \geq AM - AA_2\$。但点 \$M\$ 在半径为 \$2|h|\$ 的球 \$(v_0)\$ 的外面, 而 \$AA_2\$ 显然小于 \$|h|\$, 故 \$AA_2 \leq \frac{1}{2}AM\$ 且 \$A_2M \geq \frac{1}{2}AM\$, 即 \$r_2 \geq \frac{1}{2}r\$。注意到所有这些,

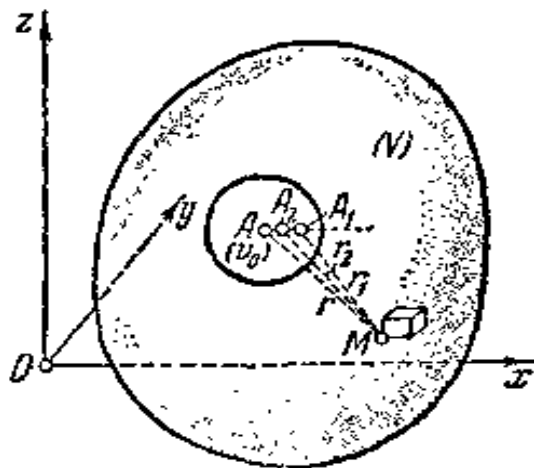


图 115

我們得如下的估計:

$$\left| \iiint_{(V)-(V_0)} \rho \left\{ \frac{1}{h} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) - \frac{x-\xi}{r^3} \right\} dV \right| \leq 16L|h| \cdot \iiint_{(V)-(V_0)} \frac{dV}{r^3}.$$

現取一中心在 A 的球 (V_1) , 其半徑 R 如此地大使立体 (V) 整个含在它里面。則所得式子也就小于

$$\begin{aligned} 16L|h| \iiint_{(V_1)-(V_0)} \frac{dV}{r^3} &= 16L|h| \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{2|h|}^R \frac{\sin\varphi}{r} dr d\varphi d\theta = \\ &= 64\pi L \cdot |h| (\log R - \log 2|h|). \end{aligned}$$

最后, $|\Delta| \leq C_1|h| + C_2|h| |\log 2|h||$,

其中 C_1 及 C_2 是不难計算的二常数。由此可見, Δ 与 h 同时趋近于零。即

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = U'_x.$$

同样可建立关系式(19)的另外二式。最后, 用类似的观察可证明, 即使点 A 属于立体 (V) 时

导函数 $\frac{\partial W}{\partial \xi}$, $\frac{\partial W}{\partial \eta}$, $\frac{\partial W}{\partial \zeta}$ 連續。

§ 4 場論初步

639. 純量及向量 將积分学在数学物理及力学問題上的应用化为向量形式常常較為方便。所以讀者能熟悉一些向量分析的基本概念是很有用处的, 这些概念能將积分构造及其涉及的积分公式变为向量的解說。

我們假定讀者已熟悉純量概念及向量概念, 前者完全可用其数值來說明(例如体积、质量、密度、溫度), 而后者要完全确定它就还要指出其方向(位移、速度、加速度、力等)。讲到向量, 与通常一样, 我們將設想一表明它的有向綫段。我們約定用带箭头的文字 $\vec{A}, \vec{r}, \vec{v}, \dots$ 表示向量; 不带箭头的同样文字 $A, r, v, \dots$ 表示向量的长:

$$A = |\vec{A}|, r = |\vec{r}|, v = |\vec{v}|,$$

而带附标的文字 $A_x, r_y, v_n, \dots$ 表示它們分別在 $x, y, n, \dots$ 軸上的射影。向量 $\vec{A}$ 在坐标軸上的射影 A_x, A_y, A_z 能完全确定該向量的长(数值)及方向。

我們同样认为讀者亦掌握了向量代数学的基本知識。我們只提一下純量(数)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\vec{A}, \vec{B})$$

叫做向量 $\vec{A}$ 及 $\vec{B}$ 的数量积, 用它們在坐标軸上的射影可表作:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \quad (1)$$

向量 $\vec{A}$ 及 $\vec{B}$ 的向量积是长为 $AB \sin(\angle \vec{A}, \vec{B})$ 的向量, 它垂直于两因子, 且就向哪一边, 从那里看来自 $\vec{A}$ 转 (一小于 180° 的角) 到 $\vec{B}$ 是以反时针向进行的; 它表作 $\vec{A} \times \vec{B}$ 。如果, 我们今后恒将这样假定, 一右手坐标系 [595] 取作基础时, 则向量积在坐标轴上的射影将为

$$A_y B_z - A_z B_y, \quad A_z B_x - A_x B_z, \quad A_x B_y - A_y B_x. \quad (2)$$

640. 純量場及向量場 如在确定的空間区域 (可包有整个空間) 中的每一点处关联有某一純量或向量, 則称已給这一量的純量場或向量場, 在以下各目中我們一直要討論这种場。

溫度場或电位場是純量場的例子。如用对某一任意选取的坐标系 $Oxyz$ 的坐标来确定点 M 的位置, 則給出一純量場 U 就是相当于給出一数值函数 $U(x, y, z)$ 。我們將永远假定, 这一函数对所有变数有連續偏导数。如这些导数不同时为零則方程

$$U(x, y, z) = C \quad (C = \text{const.})$$

确定某一 (无奇点的) 曲面, 在它上面量 U 保有常数值; 这样的曲面称作等量面。整个所考察的区域填滿了这种曲面, 所以通过它的每一点有一个且仅有一个等量面。显然, 等量面彼此并不相交。

力場或速度場可以作为向量場的例子, 我們已經遇见过这种类似的場了。如以某一坐标系 $Oxyz$ 作基础, 則給出一向量場 $\vec{A}$ 可以用給出它在坐标轴上的射影

$$A_x(x, y, z), \quad A_y(x, y, z), \quad A_z(x, y, z) \quad (3)$$

作为与向量 $\vec{A}$ 相关的点 M 的坐标函数的方法来实现。我們也将假定这些函数有連續导函数。在研究向量場时, 向量綫非常重要; 向量綫就是一曲綫, 在它上以每一点 M 处的方向与对应于这一点的向量 $\vec{A}$ 的方向相重合。如回想 [224] 曲綫切綫的方向余弦与微分 dx, dy, dz 成正比, 則得知向量綫可用等式

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}$$

來說明。在向量 $\vec{A}$ 不为零的假定下, 依靠綫性微分方程組理論的“存在定理”可以证明; 整个所考察的区域被向量綫所填滿, 且通过它的每一点有一条且仅有一条这样的綫。向量綫彼此并不相交。

有时候要考虑由向量綫組成的曲面, 它們称为向量面, 向量面的特征是: 对应于每一点 M 的向量 $\vec{A}(M)$ 在曲面的这一点处的切面內 (或者是: 在其所有点处向量 $\vec{A}$ 在曲面的法綫 n 上的射影等于零)。如在所考察的区域内取任一异于向量綫的綫, 并过它的每一点引向量綫, 則这些向量綫的几何軌迹就給出一向量面。当上述“准”綫是閉曲綫时, 就得到一管形的向量面, 称作向量管。

641. 梯度 設已給一純量場 $U(M) = U(x, y, z)$ 。在坐标軸上以

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \quad (4)$$

为射影的向量 $\vec{g}$ 称作純量 U 的梯度并这样来表示:

$$\vec{g} = \text{grad } U.$$

这一形式的定义有一缺点, 就是它利用了坐标轴而留下梯度概念与它们的选择无关的问题没有解决。

为了要证明这一无关性, 回想早在第一卷[174]中给出的函数沿一已知方向 l 的导数的定义: $\frac{\partial U}{\partial l}$, 它表明函数沿方向 l 增加的速度。在那里我們曾有公式

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma,$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是方向 l 的方向余弦; 如以 $\vec{\lambda}$ 表沿这一方向所引的单位向量, 则它亦可重写作:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \text{grad } U \cdot \vec{\lambda} = \text{grad}_l U.$$

这一导数显然在当方向 l 与梯度的方向相重时达到最大值, 且这一最大值等于

$$|\text{grad } U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

这就将我們引到这样一定义[比照 174]: 純量 U 的梯度是一向量, 其数值及方向恰好说明常
量 U 变化的最大速度。这里坐标系已經完全沒有提到了。

容易观察到, 梯度的方向与通过已知点的等量面 $U(x, y, z) = C$ 的法线方向相重合。

这样, 純量場 $U(M)$ 产生一梯度的向量場 $\text{grad } U$ 。

哈密尔顿 (W. R. Hamilton) 介紹考虑一符号向量, 它在坐标轴上的射影为

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}.$$

他称之为“余布拉”并表作 ∇ , 用这种記法, 就可写

$$\text{grad } U = \nabla U.$$

事实上, 如将所述“向量”形式地乘上量 U , 就是以(4)为射影的向量:

例 1) 以 $\vec{r}$ 表联結某一定点 O 与空間一动点 M 的位徑向量 $\overrightarrow{OM}$, 而以 r 表它的长, 令

$$U(M) = \varphi(r),$$

其中 φ 是正純量变元 r 的任一純量函数, 有不变号的导数者。显然, 以 O 为中心半径为 r 的球面是等量面, 所以梯度的方向或与半径相一致或者恰恰与它相反, 視 $\varphi'(r) > 0$ 或 < 0 而定。易見

$$\text{grad } \varphi(r) = \varphi'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

特別,

$$\text{grad } \frac{c}{r} = -\frac{c}{r^3} \vec{r} \quad (c = \text{const.}).$$

如在点 O 处放一质量 m 并考察牛顿引力場, 則它在点 M 处的吸引力将为

$$\vec{F}' = -\frac{m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{m}{r^3} \vec{r},$$

因而

$$\vec{F}' = \text{grad } \frac{m}{r}.$$

一已知向量場是否可看作某一純量的梯度場這一問題有非常的重要性。实质上这一問題對我們來說并不是新的, 以后 [645] 我們將再談它。

2) 考察一溫度場 U 。取一曲面元素 (dS), 且帶有一以確定方法定向的法綫 n , 我們來計算在无穷小時間 dt 內沿 n 的方向通过这一元素所流过的热量 dQ 。热是从物体或介质的較熱部分流向較冷部分的, 且溫度減低得愈快, 流得也愈快。通常认为上述元素热量 dQ 与 dS , dt 以及 $\left| \frac{\partial U}{\partial n} \right|$ 成正比。以 $k > 0$ 表比例系数 (已知物体的“内部热傳导系数”), 可以写

$$dQ = -k dS dt \frac{\partial U}{\partial n};$$

如上所述, 热量 dQ 在当 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 为負时, 即当沿 n 的方向 U 减少时为正。

如引进所謂热流向量

$$\vec{q} = -k \text{grad } U,$$

則 dQ 的表示式可另写为:

$$dQ = dS dt q_n.$$

642. 向量通过曲面的流量 現設已給某一向量場 $\vec{A}(M)$, 亦即給出三函数 (3)。取一曲面 (S); 并选取它的一确定側而后, 以 $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$ 表对应的有向法綫 n 的方向余弦。則称曲面积分

$$\iint_{(S)} (A_x \cos \lambda + A_y \cos \mu + A_z \cos \nu) dS$$

或另写作

$$\iint_{(S)} A_n dS$$

的积分为向量 $\vec{A}$ 通过曲面 (S) 在所述側面的流量。

我们来举一些例子。

1) “流量”这一名称本身与某流体力学问题相关。考察一流体在空间的运动；在一般情形下我们不假定它是定常的，所以运动速度 $\vec{v}$ 不仅与它所关联到的点 M 的位置有关，且也与时间 t 有关。我们提出这样一问题：计算在无穷小时间 dt 内流体通过曲面 (S) 流进某确定侧面的量。流体流过曲面元素 (dS) 的量可填满一以 dS 为底 $v_n dt$ 为高的柱形（图 116），其中假定法线 n 向着所选的侧面的。如以 ρ 表流体的密度，它同样既与点的位置有关，也与时间有关，则流体流过 (dS) 的质量将为

$$\rho dS v_n dt.$$

对整个曲面 (S) 来说，使得

$$dt \iint_{(S)} \rho v_n dS.$$

在单位时间内流体流过的量 Q 可表作积分

$$Q = \iint_{(S)} \rho v_n dS, \quad (5)$$

这积分读者将认得出是 $\vec{\rho v}$ 通过曲面 (S) 的“向量流量”。

2) 同样也可以来谈热流量。易见[以第 641 目 2) 的记法]在时间 dt 内等于

$$dt \iint_{(S)} q_n dS$$

的热量流过了曲面 (S) 。如将流过的热量变到单位时间内，则得

$$\iint_{(S)} q_n dS,$$

也就是 $\vec{q}$ 通过 (S) 的“向量流量”。因此，向量

$$\vec{q} = -k \operatorname{grad} U$$

称为“热流向量”。

3) 如考察一牛顿引力场[在 641, 1) 中已谈到过]

$$\vec{F} = -\frac{m}{r^3} \vec{r},$$

则这一向量通过曲面 (S) 的流量

$$\iint_{(S)} F_n dS = -m \iint_{(S)} \frac{\cos(r, n)}{r^2} dS$$

与在 O 点看到曲面 (S) 的立体角有关系 (628)

643. 高斯-奥斯特洛格拉斯基公式 · 发散量 回到向量场 $\vec{A}$ 的一般情况，考察一由闭
博士家园 流星

曲面 \$(S)\$ 所范围的立体 \$(V)\$; n 将表示曲面向外的法线。则由高斯-奥斯特洛格拉斯基公式 [626(5)], 如在它里面令 $P = A_x, Q = A_y, R = A_z$, 向量 $\vec{A}$ 通过曲面 \$(S)\$ 向外的流量可变为三重积分:

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} A_n dS &= \iiint_{(V)} (A_x \cos \lambda + A_y \cos \mu + A_z \cos \nu) dV = \\ &= \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV. \end{aligned}$$

在三重积分记号下的式子称作向量 $\vec{A}$ 的发散量并表作记号

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (6)$$

因此高斯-奥斯特洛格拉斯基公式可重写成

$$\iint_{(S)} A_n dS = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{A} dV, \quad (7)$$

这是最常用的形状。

刚才所介绍的发散量是一纯量, 但它的定义形式上与坐标轴的选择有关。为了要克服这一缺陷, 我们进行如下: 将点 M 用任一立体 \$(V)\$ 围起来, 设 \$(V)\$ 的表面为 \$(S)\$, 并写出公式 (7); 如两端用立体的体积 V 相除并将立体 \$(V)\$ 缩成点 M 而变到极限, 则 [619.8'] 右端就恰得点 M 处的 $\operatorname{div} \vec{A}$ 。这样,

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{(V) \rightarrow M} \frac{\iint_{(S)} A_n dS}{V}; \quad (8)$$

这一等式同样可作为发散量的定义, 且在这一形式下的定义已经不与坐标系的选择有关了。

这一次向量场 $\vec{A}$ 产生出一发散量 $\operatorname{div} \vec{A}$ 的纯量场。

注意, 发散量定义 (6) 可用哈密尔顿符号向量 ∇ 写作:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A};$$

如同想到二向量的数量积表示式 (1), 这就很清楚了。

例 我们来讨论一不可压缩流体 ($\rho = 1$) 当有泉源 (或漏洞) 存在时的运动。流体在单位时间内通过 \$(S)\$ 所流出的量, 亦即向量速度 $\vec{v}$ 的流量

$$\iint_{(S)} v_n dS$$

[参看 642, 1] 称作包含在闭曲面 \$(S)\$ 内面的泉源生产率。如泉源在所考察的区域内连续地

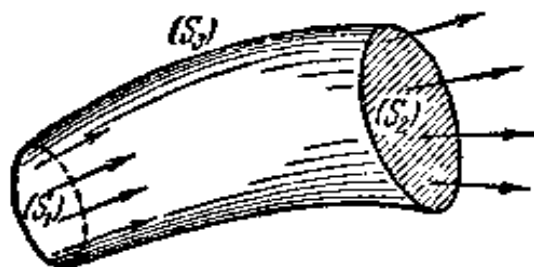
分布, 則泉源密度概念就可被引入。这說的就是包围点 M 的立体 (V) 内泉源生产率在单位体积上計出的极限值, 即

$$\lim_{(V) \rightarrow M} \frac{\iint_{(V)} v_n dS}{V}.$$

但是, 如我們剛才已經看到的[參看(8)], 这一极限等于 $\operatorname{div} \vec{v}$; 这样, $\operatorname{div} \vec{v}$ 亦是泉源密度。

对于有热源的热流量亦可作同样的考察, 只須取热流向量代替速度向量。

如 $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, 則場称为筒形的, 亦即管形的, 这是由希腊字 $\sigma\omicron\lambda\epsilon\nu$ = 管而来的。在空間



被場所占的部分是(空間)单連的假定下, 这一条件相当于下一要求: 向量 $\vec{A}$ 通过任意閉(且范围一立体的)曲面向外的流量等于零:

$$\iiint_{(S)} A_n dS = 0$$

图 117

[627(B)]. 现在来考察一向量管(图 117)界于它二

任意断面 (S_1) 及 (S_2) 之間的一段, 以 (S_3) 表管子本身的侧面。則由上所述,

$$\left\{ \iiint_{(S_1)} + \iiint_{(S_2)} + \iiint_{(S_3)} \right\} A_n dS = 0,$$

且所有情形下法綫都向外。沿曲面 (S_3) , 显然, $A_n = 0$ [640]; 如在断面 (S_1) 处改变法綫方向使它与 (S_2) 处的方向一致, 則得等式

$$\iiint_{(S_1)} A_n dS = \iiint_{(S_2)} A_n dS.$$

因此我們得到筒形場的一特出性质: 筒形向量通过一向量管的各横断面的流量是一常数值; 它称作向量管的强度。

如回到上面所引用的向量場的流体力学解說, 那末就是, 在不可压缩流体的情况下且在无泉源时 ($\operatorname{div} \vec{v} = 0$), 流体通过一向量管的横断面的流量对所有的断面都有相同的值。

644. 应用 1° 連續性方程 重新考察一流体在无泉源时的运动, 但一般說来, 我們不再假定它是不可压缩的了。設流体連續地充滿于空間或其一部分, 我們从流体中割下任一由曲面 (S) 所范围的立体 (V) , 我們已知, 在单位時間內自这一立体向外流出的流量 Q 可以公式(5)来表示。我們用另一法来計算这同一量。如考虑到在時間 dt 内密度 ρ 改变一

值 $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt$, 則立体元素 (dV) 的质量 ρdV 就改变 $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dV$, 而整个所考察的立体的质量改变

$$dt \iiint_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

这一流量必须在时间 dt 内流进立体；改变它的符号，便得在这一时间内向外流出的流量。最后，如将流出流量改作单位时间内，则得出

$$Q = - \iiint_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

为了使 Q 的两表示式相等较为方便，将曲面积分(5)按高斯-奥斯特洛格拉斯基公式(7)同样变作三重积分。用此法我们便得

$$\iiint_{(V)} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right\} dV = 0.$$

因为这一等式对在所考察区域的范围内的任何立体 (V) 都成立，故由 619.8°，由此应得恒等式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (9)$$

这一等式大家称作连续性方程。

2° 理想流体运动的基本方程 在一般情形下假定在流体上作用着有外力及内力。我们将外力当作与质量成正比，所以，如 $\vec{F}$ 是作用在单位质量上的力，则在流体元素 (dV) 上有力 $\rho dV \vec{F}$ 在作用着。

至于谈到内力，是指从流体分出来一块 (V) 而其余流体作用在这块上的力。于是理想流体就可这样来说明其特征：这些力是沿着立体表面 (S) 的法线而指向立体内部的法线压力。且这时落在单位面积上压力 p 本身的大小与压力所加于的无穷小面块的方向无关，仅与它的坐标有关。因此，如以 $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$ 表曲面向外法线的方向余弦，则在曲面元素 (dS) 上作用一力，它在坐标轴上的射影为

$$-pdS \cos \lambda, \quad -pdS \cos \mu, \quad -pdS \cos \nu.$$

在整个立体 (V) 上将作用有一力，可由射影

$$- \iiint_{(S)} p \cos \lambda dS, \quad - \iiint_{(S)} p \cos \mu dS, \quad - \iiint_{(S)} p \cos \nu dS$$

来决定。或者——如再采取按高斯-奥斯特洛格拉斯基公式的变换，——可由积分

$$- \iiint_{(V)} \frac{\partial p}{\partial x} dV, \quad - \iiint_{(V)} \frac{\partial p}{\partial y} dV, \quad - \iiint_{(V)} \frac{\partial p}{\partial z} dV$$

来决定。加在流体元素 (dV) 这一部分上的力将有射影

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dV, \quad -\frac{\partial p}{\partial y} dV, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} dV,$$

因此, 作为一向量, 可表作

$$-dV \operatorname{grad} p.$$

如现在以 $\vec{a}$ 表对应于元素(dV)的加速度, 则按牛顿运动定律,

$$\rho dV \vec{a} = \vec{F}' \rho dV - dV \operatorname{grad} p,$$

于是, 最终有

$$\vec{a} = \vec{F}' - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \quad (10)$$

这就是在向量形式下的理想流体运动的基本方程。如变到在坐标轴上的射影, 它可拆成三个纯量方程。

3° 热传导方程 作为最后一例我们来考察一物体在内部热传导的作用下且无热源时的热状态。

如取出由曲面(S)所围的一立体(V), 则在 642, 2) 中已经看到, 在单位时间内, 自立体通过曲面(S)向外流出的热量等于

$$Q = - \iint_{(S)} k \operatorname{grad}_n U dS$$

(我们保留以前的记法)。在这一式子中变号后并将它变作三重积分, 便得向立体内部流入的热量的表示式

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} U) dV. \quad (11)$$

这一热量引起立体(V)内部温度的改变, 且可换一方法来计算。在时间 dt 内温度 U 增加 $dU = \frac{\partial U}{\partial t} dt$ 需要对立体元素(dV)输入热量

$$cdU \rho dV = c \frac{\partial U}{\partial t} dt \rho dV,$$

其中 c 表物体在所考察点处的热容量。在时间 dt 内整个立体就要吸收热量

$$dt \iiint_{(V)} c \rho \frac{\partial U}{\partial t} dV;$$

如将它改在单位时间内, 则得

$$\iiint_{(V)} c \rho \frac{\partial U}{\partial t} dV. \quad (12)$$

将(11)式及(12)式等置, 便得等式

$$\iiint_{(V)} \left\{ c \rho \frac{\partial U}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} U) \right\} dV = 0,$$

它对取在所考察区域内的任何立体(V)都适合。于是, 与上面 1) 中一样, 可以断定, 在这一

区域内恒有

$$c\rho\frac{\partial U}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} U),$$

这就是热传导方程。

在均匀介质的情况下,它作下形

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \Delta U,$$

其中 $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, Δ 表拉普拉斯运算符:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

最后,当温度 U 稳定分布时,它就与时间无关而满足拉普拉斯方程

$$\Delta U = 0,$$

亦即是点坐标的调和函数。

645. 向量的循环量·斯托克斯公式·旋度 又设已知任一直量场 $\vec{A}(M)$, 沿所考察区域范围内的某一曲线 (l) 上所取的积分

$$\int_{(l)} A_x dx + A_y dy + A_z dz = \int_{(l)} A_l dl,$$

称作向量 $\vec{A}$ 沿曲线 (l) 的线积分。在闭曲线情形下这一积分称为向量 $\vec{A}$ 沿 (l) 的循环量。

如场 $\vec{A}$ 是一力场,则线积分表示当点沿曲线位移时场中力的功[参照 520]。

设想由闭曲线 (l) 所张的某一曲面 (S) , 则按读者所熟知的斯托克斯公式 [614 (21*)], 向量 $\vec{A}$ 沿这一闭路的循环量可表作曲面积分:

$$\int_{(l)} A_l dl = \iint_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos \lambda + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos \mu + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos \nu \right\} dS$$

在坐标轴上以

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (13)$$

为射影的向量称作向量 $\vec{A}$ 的旋度并表作记号

$$\operatorname{rot} \vec{A}^*.$$

因此,在向量形式下斯托克斯公式可写作:

$$\int_{(l)} A_l dl = \iint_{(S)} \operatorname{rot}_n \vec{A} dS. \quad (14)$$

* 由英文字 rotation = 旋转而来; 记号 $\operatorname{curl} \vec{A}$ 亦常用——这是由英文字 curl 而来, 表明“鬚曲”。

向量沿一闭路的循环量等于旋度通过这一闭路所张曲面的流量。同时闭路的环行方向与曲面的侧面必须如在第 595 目中所说明者彼此相对应。

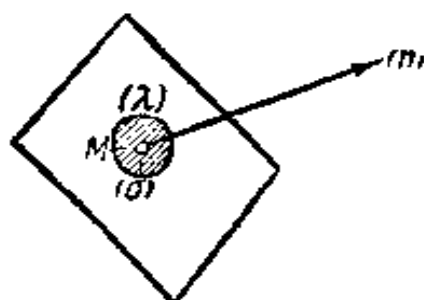


图 118

上面所给“旋度”概念定义具有照样的缺点：在它里面利用了确定的坐标系。取好自一已知点 M 出发的任一方向 n ，在与 n 相垂直的平面上将它用一以闭路 (λ) 为边界的平面块 (σ) 围起来（图 118）。则由斯托克斯公式

$$\int_{(\lambda)} A_{\lambda} d\lambda = \iint_{(\sigma)} \text{rot}_n \vec{A} d\sigma,$$

将这等式的两端除以所述小块的面积 σ 后并将后者“缩”成所给的点，变到极限时得

$$\text{rot}_n \vec{A} = \lim_{(\sigma) \rightarrow M} \frac{\int_{(\lambda)} A_{\lambda} d\lambda}{\sigma}.$$

因而得以确定向量 $\text{rot} \vec{A}$ 在任一轴上的射影，这就是说，不须事先选取坐标系就能确定向量本身。

特别指出，这里向量场 $\vec{A}$ 产生一旋度向量场 $\text{rot} \vec{A}$ 。

用哈密尔顿向量 ∇ 可简单地写出旋度的定义：

$$\text{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A}$$

[参看向量积射影的表示式(2)!]。

例 考察某一刚体的任意运动。如在它上面固定一点 O （图 119），则如在运动学中所证明的，在任何时刻刚体点的速度场 $\vec{v}$ 可由公式

$$\vec{v} = \vec{v}^O + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

来确定，其中 $\vec{v}^O$ 是“平动速度”，即点 O 的速度， $\vec{\omega}$ 是瞬时“角速度”，而 $\vec{r}$ 是联结点 O 与刚体任意点 M 的位径向量。这一向量在任意坐标系 $Oxyz$ 各轴上的射影将为[参看(2)]

$$v_x^O + \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y^O + \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z^O + \omega_x y - \omega_y x.$$

如利用(13)式，计算出这一场的旋度的射影，则得 $2\omega_x, 2\omega_y, 2\omega_z$ ，所以

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v}.$$

因此，除去一数字因子外，速度场 $\vec{v}$ 的旋度恰恰给出瞬时角速度，由此就有“旋度”

* 这里容易观察到某种区域微分法，让读者去论证它。

这一称呼。

现在回到这一问题：在怎样的条件下给出的一向量场 $\vec{A}$ 是某一纯量 U 的梯度的场：

$$\vec{A} = \text{grad } U. \quad (15)$$

这一等式相当于下列三个：

$$A_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad A_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad A_z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

亦即相当于下一断語：表示式

$$A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

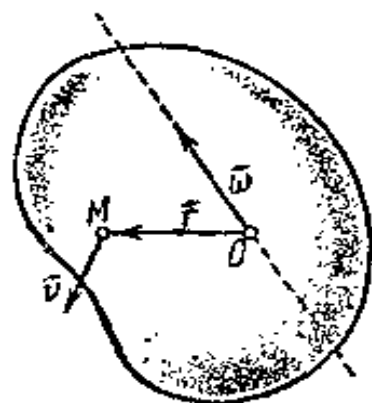


图 119

是函数 $U(x, y, z)$ 的全微分。当有等式(15)时，场 $\vec{A}$ 称作位势场，而原函数 U 称作场的位势函数。

如限制于假定所考察的区域是(曲面)单连，则平行叙述已为我们所知的事物时[参考 616, 条件(B)]，可以说：场 $\vec{A}$ 是位势场的必要充分条件是在整个区域中等式

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

都适合，亦即须 $\text{rot } \vec{A}$ 为零。位势场概念与“无旋”场概念相一致。在这种场中沿闭路的循环量将为零；如沿联结任意两点的曲线取曲线积分，则它的值不与曲线的形状有关。

所有这些事实在位势力场情况中用“功”的术语可得到很自然的解说。例如，如所周知，不论是在一些孤立的引力中心情况下或是吸引的质量连续分布时牛顿引力场就是这样的。

646. 应用 1° 首先注意，旋度场

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

本身永远是筒形的[643]，因为用直接计算就容易验证

$$\text{div rot } \vec{A} = 0.$$

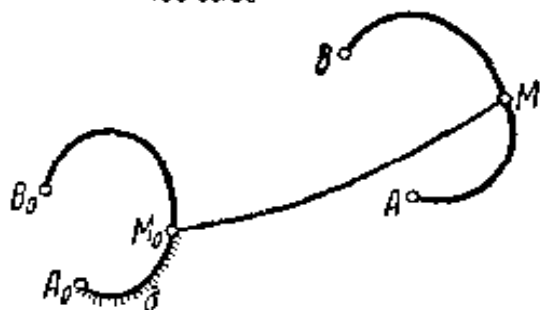


图 120

这时，如在此处应用第 643 目末尾所述的，立刻可得这样一断語：旋度通过“转动”管*的横断面时的流量对所有断面有相同的值。在液流速度旋度的情况下这是首先由赫尔姆霍茨(H. V. Helmholtz)所建立的。

* 一旋度场的向量线或向量面(特别，向量管)分别称为转动线或转动面(特别，转动管)。

2° 以后, 在考察某一时刻流体内部的线或面时, 我们将感兴趣于: 在另一时刻这些相同的流体小块形成什么样子。在这种研究中, 下一辅助断言将起重要的作用, **速度沿一闭流体路线的循环量对时间的导数等于加速度沿同一闭路的循环量。**

在时刻 t_0 时考察任一闭路 $(L_0) = (A_0 B_0)$, 取一确定在它上面的点 M_0 位置的参数, 例如, 弧长 $\sigma = \overline{A_0 M_0}$ (图 120), 如在时刻 t 时, 流体闭路 $(L_0) = (A_0 B_0)$ 变成了 $(L) = (AB)$, 则点 M_0 所变到的点 M 的位置可由形如

$$x = \varphi(\sigma, t), y = \psi(\sigma, t), z = \chi(\sigma, t) \quad (0 \leq \sigma \leq \bar{\sigma})$$

的方程来确定。

速度的循环量

$$J = \int_{(L)} v_x dx + v_y dy + v_z dz = \int_0^{\bar{\sigma}} \left(v_x \frac{\partial x}{\partial \sigma} + v_y \frac{\partial y}{\partial \sigma} + v_z \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right) d\sigma \quad (16)$$

可按莱布尼兹规则对 t 微分:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \int_0^{\bar{\sigma}} \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial \sigma} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial \sigma} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right) d\sigma + \int_0^{\bar{\sigma}} \left(v_x \frac{\partial^2 x}{\partial \sigma \partial t} + v_y \frac{\partial^2 y}{\partial \sigma \partial t} + v_z \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma \partial t} \right) d\sigma = \\ &= \int_0^{\bar{\sigma}} \left(a_x \frac{\partial x}{\partial \sigma} + a_y \frac{\partial y}{\partial \sigma} + a_z \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right) d\sigma + \int_0^{\bar{\sigma}} \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial \sigma} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial \sigma} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial \sigma} \right) d\sigma, \end{aligned}$$

所得二积分中的第一个是加速度的循环量

$$\int_{(L)} a_x dx + a_y dy + a_z dz,$$

而第二个可直接计算出来, 因为积分号下的式子是

$$\frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2} v^2$$

对 σ 的导数; 它等于

$$\frac{1}{2} v^2 \Big|_A^B,$$

在 (L) 为闭路的情形时为 0。

这样, 最终有:

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{(L)} a_x dx + a_y dy + a_z dz, \quad (17)$$

这就是所要求证的。

3° 设我们有一在 644, 2° 意义下的理想流体。此外, 还作两个假定: 1) 力 $\vec{F}$ 有一位势, 即

$$\vec{F} = \text{grad } U;$$

2) 密度 ρ 是压强的单值函数*:

$$\rho = \varphi(p).$$

我們引进一量

$$\Phi(p) = \int \frac{dp}{\varphi(p)},$$

則

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{d\Phi}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

同样,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

所以

$$\text{grad } \Phi = \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

我們已有过流体动力学的基本方程[644(10)], 现在它可写作

$$\ddot{u} = \text{grad}(U - \Phi),$$

如将它代入上面所得等式(17)中, 則有

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{(L)} d(U - \Phi) = 0, \quad \text{所以 } J = \text{const.}$$

因此, **速度沿任一閉流体路綫的循环量在時間过程中不变**, 这是托姆逊(W. Thomson)定理。

作为一简单推論, 由此得出一有趣的拉格朗日命题: 如所考察的流体质量在某一确定时刻没有旋度, 則它在任何其它时刻也無旋度。事实上, 沒有旋度相当于速度沿任一閉路的循环量为零。如这一情况有一次发生了, 則由托姆逊定理它就永远如此。

4° 現在我們可以来证明有关“轉动”綫及“轉动”管** 的哈密尔顿的两个重要定理了。这时我們一直保留在3° 开始处所述的假定。

轉动綫不变的定理 流体在某一时刻形成轉动綫的部分在运动的整个过程中依旧形成轉动綫。

我們开始对轉动曲面来证明它较为簡便。設 (S_0) 是在时刻 t_0 时的这样一曲面, 則在它的每一点处速度的旋度

$$\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v}$$

將在切于 (S_0) 的平面中, 即 $\Omega_n = 0$ 。如在曲面上取任一围成曲面的一部分 (σ_0) 的閉路 (λ_0) , 則由斯托克斯公式(14),

滿足后面这一要求的流体有时称作“正压性的”。

** 參看第 391 頁底注。

$$\int_{(\lambda_0)} v_x dx + v_y dy + v_z dz = \iint_{(\sigma_0)} \Omega_n dS_0 = 0.$$

在时刻 t 时流体表面 (S_0) 变成了曲面 (S) , 它的部分 (σ_0) 变成了 (σ) , 而流体闭路 (λ_0) 变成了闭路 (λ) , 但由托姆逊定理现在

$$\int_{(\lambda)} v_x dx + v_y dy + v_z dz = 0,$$

所以(再由斯托克斯公式)

$$\iint_{(\sigma)} \Omega_n dS = 0.$$

由于 (σ) 的任意性由此易得出结论: * 沿 (S) 恒有

$$\Omega_n = 0,$$

所以曲面 (S) 亦是转动面。

因为转动线永远可看作两转动面的交线 故定理得证。特别, 由此也得转动管的不变性。

现在已非常容易得到

转动管强度不变的定理 任一转动管的强度在整个运动过程中保持一常数。

由斯托克斯公式, 转动管的强度亦即旋度通过管子横断面的流量可化为速度沿这一断面边界的循环量。此时所需结论可直接由托姆逊定理[3°]推得。

我们只预备讨论这样一些应用所引概念及基本公式的例题了。

§ 5 多重积分

647. 两立体间的引力及位势问题 已经研究的几种定积分: 简单的、二重的以及三重的, 还不能概括分析学及其应用的需要。

我们用二立体引力问题来说明这一点。我们将以 x_1, y_1, z_1 表第一立体 (V_1) 的点的坐标, 而以 x_2, y_2, z_2 表第二立体 (V_2) 的点的坐标。设这两立体质量的分布以这些坐标的函数给出: $\rho_1 = \rho_1(x_1, y_1, z_1)$, $\rho_2 = \rho_2(x_2, y_2, z_2)$. 如在每一立体中分别取出质量元素 $\rho_1 dx_1 dy_1 dz_1$ 及 $\rho_2 dx_2 dy_2 dz_2$, 则由牛顿定律, 第二立体以力

* 参看第 390 页底注。

$$\frac{\rho_1 \rho_2 dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}^2}$$

作用于第一立体上, 其中 $r_{1,2}$ 是元素间的距离:

$$r_{1,2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

因为这一力自点 (x_1, y_1, z_1) 朝向点 (x_2, y_2, z_2) , 故它的方向余弦为 $\frac{x_2 - x_1}{r_{1,2}}, \frac{y_2 - y_1}{r_{1,2}}, \frac{z_2 - z_1}{r_{1,2}}$. 所以第一元素对第二元素的引力譬如说在 x 轴上的射影等于

$$\frac{\rho_1 \rho_2 (x_2 - x_1)}{r_{1,2}^3} dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2.$$

第一立体吸引第二立体的合力的射影 F_x 可由将所求得的式子对两立体的所有元素相加得来, 亦即可表作一六重积分

$$F_x = \iiint \iiint \frac{\rho_1 \rho_2 (x_2 - x_1)}{r_{1,2}^3} dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2,$$

它是展布在点 $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ 的六维区域 $(V) = (V_1) \times (V_2)$ 上的, 其中 (x_1, y_1, z_1) 取自 (V_1) , 而 (x_2, y_2, z_2) 取自 (V_2) . 其它二射影亦可同样地表示。

与此相像, 量

$$\frac{\rho_1 \rho_2 dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}}$$

是一元素在另一元素上的位势。将这些式子相加, 得一立体在另一立体上的位势又作六重积分的形状:

$$W = \iiint \iiint \frac{\rho_1 \rho_2}{r_{1,2}} dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2.$$

如两立体相重, 则类似的积分被 2 除 (因为否则每一对元素就被算了两次!) 就给出立体在自身上的位势。

举一例, 我们试来计算一均匀 ($\rho_1 = \rho_2 = 1$) 球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 在

* 与通常一样, 我们令牛顿万有引力定律公式中的比例系数等于 1.

自身上的位势,即计算积分

$$W_0 = \frac{1}{2} \int \int \int \int \int \int \frac{dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}},$$

$$\begin{aligned} & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq R^2 \\ & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \leq R^2 \end{aligned}$$

可以这样进行计算: 球体 $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq R^2$ 在一坐标为 x_1, y_1, z_1 与中心相距 $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ 的一元素 $dx_1 dy_1 dz_1$ 上的位势我们是已经知道的 [625, 12)], 它可表作一三重积分且等于

$$\left(2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi r_1^2 \right) dx_1 dy_1 dz_1^*.$$

剩下的就是要将对球体 $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq R^2$ 的一切元素的同样式子相加, 即还要取一个三重积分:

$$\int \int \int \left(2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi r_1^2 \right) dx_1 dy_1 dz_1.$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq R^2$$

变到球坐标时, 这很容易做出来。最后得

$$W_0 = \frac{16}{15}\pi^2 R^5.$$

在这一情况下, 六重积分的计算化为了两个三重积分的计算, 并且其中之一已经是知道了的。

虽然在大多数情形下只引用与上面所研究的积分的样子相像的东西, 但现在我们仍转而建立此处所处理的一般概念。

648 n 维立体的体积 · n 重积分 与在定义简单、二重、三重积分时我们利用过线段长、平面图形面积、空间立体体积诸概念相像, 在 n 重积分定义的基础中有 n 维区域体积**的概念。对于最简单的 n 维区域—— n 维长方体

* 应该考虑到, 这里所计算的位势所加在的点的质不是 1 而是 $dx_1 dy_1 dz_1$; 此外, 这里 r 是取在早先推出的公式中的 a 的地位。

** 我们决定保留这一术语, 虽然它的意义当然随 n 而变化: 问题是“ n 维体积”。亦可以用“广延”、“度量”等类似字眼来代替它。

$$[a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_n, b_n], \quad (1)$$

它的諸測度的乘积

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$$

称作体积。由有限个这样的长方体組成的立体其体积应如何来了解自明。可初等地证明: 这种立体的体积与怎样将它分为长方体无关。

考察內接于一已知 n 維立体 (V) 以及外接于它的这种“长方状”立体时, 用常用的方法可建立立体 (V) 的体积 V 的概念 [比照 331]。我們將只处理体积存在的立体; 对于由光滑的或分片光滑的曲面*所围的立体它根本是存在的, 特別, 对于最简单的为我們所熟悉的 n 維区域—— n 維单纯形

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0, x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq h$$

以及 n 維球体

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2$$

体积都存在; 以后我們要計算它們的体积的 [650, 1) 及 2)]。

設在区域 (V) 中給出一 n 个变数的函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$; 則將这一区域分成許多元素部分并重复我們所熟知的其他运算 [参照 618], 便得 n 重积分的概念:

$$I = \int_{(V)} \cdots \int^n f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n. \quad (2)$$

在积分号下函数連續时它必定存在。

計算这样的积分可化为計算重数較低的积分, 直到許多简单的积分。当积分区域 (V) 是一长方体 (1) 时, 类似于第 620 目公式 (10) 的公式成立:

* 这里所称光滑曲面就是在 n 維空間中用 $n-1$ 个参数的 n 个参数方程所确定的图象, 且在方程中写出的参数函数与其各偏导函数都必须連續, 又导函数矩陣的第 $n-1$ 阶行列式必須不同时为零。

$$I = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_n. \quad (3)$$

对于形状更一般的、由不等式

$$\begin{aligned} x_1^0 \leq x_1 \leq X_1, x_2^0(x_1) \leq x_2 \leq X_2(x_1), \cdots \\ \cdots, x_n^0(x_1, \cdots, x_{n-1}) \leq x_n \leq X_n(x_1, \cdots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

所围的区域, 与第 621 目的公式(10*)相似的公式可以应用:

$$I = \int_{x_1^0}^{X_1} dx_1 \int_{x_2^0(x_1)}^{X_2(x_1)} dx_2 \cdots \int_{x_n^0(x_1, \cdots, x_{n-1})}^{X_n(x_1, \cdots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_n. \quad (4)$$

用类似的方法, 与第 621 目中公式(8*)及(11*)相似的其它公式(对于相对应的各种样子的区域, 在每一情况下都不难确定)亦皆成立, 其中计算 n 重积分化为了逐次计算若干重数较低但和为 n 的积分。

整个这个可与 $n=2$ 或 $n=3$ 的情形完全同样地证明, 并不要引用任何新的思想, 所以没有必要在这一点上耽擱下来。显然不用再作什么说明如何来定义广义 n 重积分以及如何它们在它们上面来推广上面所提到的一些公式。

附注 可以对 n 个变数的函数来建立展布在一 $n-1$ 维曲面上的积分的概念 [参看第 650 目例 3) 及 16) 的附注]。由于这题目的复杂性我们这里不可能来讨论它了。我们只指出: 姆·弗·奥斯特洛格拉斯基——在推广第 626 目公式(4)时——已建立了一关系式, 连接了取在一闭曲面上的这样的积分与展布在由它所范围的立体上的某一 n 重积分。

649. n 重积分中的变数更换 这一问题我们将多少详细地讨论一下。设已知两 n 维区域: $x_1 x_2 \cdots x_n$ 空间中的 (D) 以及 $\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n$ 空间中的 (Δ) , 每一个是由一连续——光滑或分片光滑——曲面围起来的。假定在它们之间用公式

[illegible]

确立一可逆一意的对应。则在对于各导函数通常的假定下以及限定雅可比式

$$J \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_n} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}$$

符号不变时, 在 (D) 中連續的函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的积分可按公式

$$\begin{aligned} & \overbrace{\int \cdots \int}^n_{(D)} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \\ & = \overbrace{\int \cdots \int}^n_{(D)} f(x_1(\xi_1, \cdots, \xi_n), \cdots, x_n(\xi_1, \cdots, \xi_n)) |J| d\xi_1 \cdots d\xi_n \end{aligned} \quad (6)$$

来变换,它完全类似于二重及三重积分变换的公式[584(21); 636(8)]。

我們用数学归纳法来进行这一公式的证明。因为对 $n=2$ 及 $n=3$ 它已經建立起来了，所以只要在假定对 $n-1$ 重积分的类似变换公式为真后去求证对 n 重积分亦真。

不失一般性可以假定偏导数 $\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}$ 中某一个符号不变 (否則就只須將区域 (Δ) 分成若干部分, 在这些部分中它成立), 設这是导数 $\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}$ 。

在所提出的积分(2)中取出对 x_1 的积分后,可将这一积分重写为

$$\cdots, \bar{x}_n(x_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)) |J^*| dx_1,$$

并在里面的积分中按公式(5)中第一个将自变数 x_1 改为变数 ξ_1 (当固定 $\xi_2, \cdots, \xi_n$ 时)。我們得到

$$\int_{(\Delta^*)}^{n-1} d\xi_2 \cdots d\xi_n \int_{\xi_1^0(\xi_2, \cdots, \xi_n)}^{\xi_1(\xi_2, \cdots, \xi_n)} f(x_1(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n),$$

$$x_2(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n), \cdots, x_n(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)) \left| J^* \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \right| d\xi_1,$$

或者, 还原到 n 重积分时:

$$\int_{(\Delta)}^n f(x_1(\xi_1, \cdots, \xi_n), \cdots, x_n(\xi_1, \cdots, \xi_n)) \left| J^* \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \right| d\xi_1 \cdots d\xi_n.$$

为了要得到(6), 剩下的只要证明恒等式

$$J = J^* \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}.$$

但将复合函数(8)对 $\xi_2, \cdots, \xi_n$ 微分并对函数 $\bar{\xi}_1$ 的导数表示式利用隐函数微分法規則时, 求得

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \xi_k} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial \xi_k} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} - \frac{\frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_k}}{\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}}$$

$$(i, k=2, \cdots, n).$$

所以, 如在行列式 J 中在第 k 列元素上 ($k=2, \cdots, n$) 加上相对应的第一

列元素的 $-\frac{\frac{\partial x_1}{\partial \xi_k}}{\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}}$ 倍, 則它作下形:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} \\ 0 & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial \xi_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \xi_n} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix},$$

由此可見, 它等于 $J^* \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}$, 这样证明就完成了。

注意, 我們暗暗地假定了 $n-1$ 維区域 (D_{σ_1}) 及 (Δ_{σ_1}) 每次都是由一个連續的、光滑或分片光滑的 (在所对应的空間內) 曲面所圍起来的。事先将区域 (D) 并与它同时将 (Δ) 分裂为若干部分后, 总可以达到使以上所述至少对每一部分分开来看为真。公式 (6) 既对这些部分成立将对整个区域放在一起亦成立。

用通常的方法, 变数更换的公式可推广到广义积分的情形。

650. 例 1) 求 n 維单纯形 [152]

$$(T_n): x_1 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0, x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq h$$

的体积 T_n .

解 我們有

$$T_n = \int_{(T_n)} \cdots \int_0^h dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_0^h dx_1 \int_0^{h-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{h-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n.$$

在这些单积分中用公式

$$x_1 = h\xi_1, x_2 = h\xi_2, \cdots, x_n = h\xi_n,$$

逐次更换变数, 且不必利用一般公式 (6), 便得結果

$$T_n = h^n \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{1-\xi_1} d\xi_2 \cdots \int_0^{1-\xi_1-\cdots-\xi_{n-1}} d\xi_n = h^n \int_{\substack{\xi_1 \geq 0, \cdots, \xi_n \geq 0 \\ \xi_1 + \cdots + \xi_n \leq 1}} \cdots \int_0^1 d\xi_1 \cdots d\xi_n = \alpha_n h^n,$$

其中 α_n 表示与所提出的积分相类似但对应于 $h=1$ 的积分的值。

而从另一方面, 我們有 (順便利用已得的結果)

$$\alpha_n = \int_0^1 d\xi_n \int_{\substack{\xi_1 \geq 0, \dots, \xi_{n-1} \geq 0 \\ \xi_1 + \dots + \xi_{n-1} \leq 1 - \xi_n}}^{n-1} d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1} = \alpha_{n-1} \int_0^1 (1 - \xi_n)^{n-1} d\xi_n = \frac{\alpha_{n-1}}{n}.$$

所求得的递推关系式(注意 $\alpha_1 = 1$)给我们

$$\alpha_n = \frac{1}{n!},$$

所以最终有

$$T_n = \frac{h^n}{n!}.$$

2) 求 n 维球体[152]

$$(V_n): x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2$$

的体积 V_n .

解 这一个问题是要计算积分

$$V_n = \int_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2} \overbrace{\int \cdots \int}^n dr_1 dr_2 \cdots dx_n.$$

令

$$x_1 = R\xi_1, x_2 = R\xi_2, \dots, x_n = R\xi_n,*$$

易得 $V_n = \beta_n R^n$, 其中数字系数 β_n 表半径为 1 的 n 维球体体积,

为要确定 β_n 我们进行变换

$$\beta_n = \int_{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 \leq 1} \overbrace{\int \cdots \int}^n d\xi_1 \cdots d\xi_n = \int_0^1 d\xi_n \int_{\xi_1^2 + \cdots + \xi_{n-1}^2 \leq 1 - \xi_n^2}^{n-1} d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1},$$

里面的积分代表半径为 $\sqrt{1 - \xi_n^2}$ 的 $n-1$ 维球体的体积, 因此等于 $\beta_{n-1}(1 - \xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}}$. 代入,

又得一递推关系式

$$\beta_n = 2\beta_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta,$$

或[参看 495, 4)(a)]

$$\beta_n = \beta_{n-1} \cdot \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.$$

* 这里同样一般公式(6)是不需要的; 将重积分按公式(4)表成逐次积分的形状后, 就可以再在每个单积分中分开一个个地更换变数。

因为 $\beta_1=2$, 故简易的计算就给出

$$\beta_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

面所求体积等于

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} R^n.$$

对于偶数的 n 以及奇数的 n 得到公式

$$V_{2m} = \frac{\pi^m}{m!} R^{2m}, \quad V_{2m+1} = \frac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!} R^{2m+1}.$$

特别, 对于 V_1, V_2, V_3 , 自然就求得熟知的值 $2R, \pi R^2, \frac{4}{3}\pi R^3$.

3) 计算(广义的)积分

$$S = \int_{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1} \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1} \frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{\sqrt{1-x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}}, \quad (n \geq 2).$$

解 将所提出的积分变换为:

$$S = \int_{x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 \leq 1} \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 \leq 1} dx_1 \dots dx_{n-2} \int_{-\sqrt{1-x_1^2 - \dots - x_{n-2}^2}}^{\sqrt{1-x_1^2 - \dots - x_{n-2}^2}} \frac{dx_{n-1}}{\sqrt{1-x_1^2 - \dots - x_{n-2}^2 - x_{n-1}^2}}.$$

里面的积分现在等于 π , 所以[参看 2)]

$$S = \pi \int_{x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 \leq 1} \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 \leq 1} dx_1 \dots dx_{n-2} = \pi \beta_{n-2} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

附注 很有趣的我們指出, 刚才所计算的积分差一个因子 2 表示 n 维球面 $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ 的面积. 不作详细探讨, 我們提一下, 在以显式给出曲面

$$x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$$

时, 其中点 $(x_1, \dots, x_{n-1})$ 在 $n-1$ 维区域 (E) 内变动, 这一曲面的面积可表作积分

$$\int_{(E)} \dots \int_{(E)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}\right)^2} dx_1 \dots dx_{n-1}.*$$

* 它的结构完全与平面曲线弧长的公式 (5) 320 以及曲面面积的公式 (5) 601 相像, 在这两种情况下考虑的都是显的已知式。

特别, 对半球面

$$x_n = \sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2},$$

我們有
$$\int \cdots \int_{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq 1} \frac{dx_1 \cdots dx_{n-1}}{x_n} = \int \cdots \int_{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq 1} \frac{dx_1 \cdots dx_{n-1}}{\sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2}}.$$

因此, 半径为 1 的 n 维球面面积等于 $2\pi\beta_{n-2}$; 在半径为 R 的球时, 其面积显然是

$$2\pi\beta_{n-2}R^{n-1} = 2 \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} R^{n-1}.$$

这一结果是属于雅可比的。

4) 求证第里希莱公式

$$\int \cdots \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + \dots + x_n \leq 1}} x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 \cdots dx_n = \frac{\Gamma(p_1) \cdots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \cdots + p_n + 1)} \\ (p_1, \dots, p_n \geq 0).$$

由于当 $n=2$ 时公式已经确立起来过[572, 12); 592, 14)], 我们将应用数学归纳法。设它对 $n-1$ 重积分正确。将公式左端重写为形如

$$\int_0^1 x_n^{p_n-1} dx_n \int \cdots \int_{\substack{x_1, \dots, x_{n-1} \geq 0 \\ x_1 + \dots + x_{n-1} \leq 1 - x_n}} x_1^{p_1-1} \cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1} dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

后, 在里面的积分中进行替换

$$x_1 = (1 - x_n)\xi_1, \dots, x_{n-1} = (1 - x_n)\xi_{n-1}, *$$

再应用第里希莱公式到 $n-1$ 重积分。我们将得

$$\frac{\Gamma(p_1) \cdots \Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1 + \cdots + p_{n-1} + 1)} \int_0^1 x_n^{p_n-1} (1 - x_n)^{p_1 + \cdots + p_{n-1}} dx_n;$$

如将积分用它的 Γ 表示式:

$$\frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_1 + \cdots + p_{n-1} + 1)}{\Gamma(p_1 + \cdots + p_{n-1} + p_n + 1)}$$

来代替, 便得所需结果。

5) 容易推广第里希莱公式:

* 参看第 403 页上底注。

$$\int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1} + \dots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n} \leq 1}} \dots \int x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 \dots dx_n = \frac{a_1^{p_1} \dots a_n^{p_n}}{\alpha_1 \dots \alpha_n} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right) \dots \Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{p_n}{\alpha_n} + 1\right)}$$

$$(\alpha_i, \alpha_i, p_i > 0).$$

如变到新的变数 $\xi_i = \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{\alpha_i} (i=1, \dots, n)$, * 这一公式就化为已证过的公式。

特别, 当 $p_1 = \dots = p_n = 1$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 2$, $a_1 = \dots = a_n = R$ 时, 由此又可得到 n 维球体体积 V_n 的公式**[参看 2)]。

6) 特别指出在 $n=3$ 时的第里希莱公式:

$$\iiint_{\substack{x, y, z \geq 0 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\beta} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma} \leq 1}} x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} dx dy dz = \frac{a^p b^q c^r}{\alpha \beta \gamma} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right) \Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + \frac{r}{\gamma} + 1\right)}$$

$$(p, q, r > 0),$$

它在确定所述形状均匀立体的体积、静矩、惯矩以及离心矩时都有用处。

例如, 对椭球体 $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1$ ($\alpha = \beta = \gamma = 2$) 包含在第一卦限内的部分, 我們得到(将密度算作 1):

$$\text{对 } p=q=r=1, \quad V = \frac{abc}{8} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^3}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{\pi}{6} abc,$$

$$\text{对 } p=2, q=r=1, \quad M_{yz} = \frac{a^2 bc}{8} \frac{\Gamma(1) \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)} = \frac{\pi}{16} a^2 bc,$$

$$\text{对 } p=3, q=r=1, \quad I_{yz} = \frac{a^3 bc}{8} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{\pi}{30} a^3 bc,$$

$$\text{对 } p=1, q=r=2, \quad K_{yz} = \frac{ab^2 c^2}{8} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) [\Gamma(1)]^2}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{1}{15} ab^2 c^2, \text{ 等等。}$$

7) 求证立烏維里公式($p_1, p_2, \dots, p_n > 0$):

* 参看第 403 頁上底注。

** 只要注意到, 在限制于变数的正值时, 第里希莱公式仅直接给出体积的 $\frac{1}{2^n}$ 。

$$\int \cdots \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + \dots + x_n \leq 1}}^n \varphi(x_1 + \dots + x_n) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_n =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \cdots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)} \int_0^1 \varphi(u) u^{p_1 + p_2 + \cdots + p_n - 1} du,$$

其中假定了右端的单积分绝对收敛。

对 $n=2$ 这一公式已经知道[572, 16); 586, 17); 592, 14)]。设它对 $n-1$ 重积分为真。被证公式的左端可重写为:

$$\int \cdots \int_{\substack{x_1, \dots, x_{n-1} \geq 0 \\ x_1 + \dots + x_{n-1} \leq 1}}^{n-1} x_1^{p_1-1} \cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1} dx_1 \cdots dx_{n-1} \times$$

$$\times \int_0^{1-x_1-\dots-x_{n-1}} \varphi(x_1 + \dots + x_n) x_n^{p_n-1} dx_n.$$

如令

$$\psi(t) = \int_0^{1-t} \varphi(t+x_n) x_n^{p_n-1} dx_n,$$

则里面的积分此处可用 $\psi(x_1 + \dots + x_{n-1})$ 来代替, 因而由立乌维里公式应用到这 $n-1$ 重积分上去, 它可表作:

$$\frac{\Gamma(p_1) \cdots \Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1 + \cdots + p_{n-1})} \int_0^1 \psi(t) t^{p_1 + \cdots + p_{n-1} - 1} dt.$$

将 $\psi(t)$ 换作它的表示式, 我们就将所得的逐次积分更换为二重积分:

$$\iint_{\substack{t, x_n \geq 0 \\ t + x_n \leq 1}} \varphi(t+x_n) t^{p_1 + \cdots + p_{n-1} - 1} x_n^{p_n-1} dt dx_n,$$

要想得到所需结果, 只要应用已证得的公式到这一积分上去就行了。

8) 由此将容易得出更一般的公式:

$$\int \cdots \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ \left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1} + \cdots + \left(\frac{x_n}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} \leq 1}}^n \varphi\left(\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1} + \cdots + \left(\frac{x_n}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}\right) x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 \cdots dx_n =$$

$$= \frac{\alpha_1^{p_1} \cdots \alpha_n^{p_n}}{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1} + \cdots + \frac{p_n}{\alpha_n}\right)} \int_0^1 \varphi(u) u^{\frac{p_1}{\alpha_1} + \cdots + \frac{p_n}{\alpha_n} - 1} du$$

(假定所有的数 α_i, α_i, p_i 为正的)。

这一公式,例如,可用来计算下列各积分,并同时附带确定了它们的存在条件:*

$$(a) \quad \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1^{\alpha_1} + \dots + x_n^{\alpha_n} \leq 1}} \dots \int \frac{x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1}}{(1 - x_1^{\alpha_1} - \dots - x_n^{\alpha_n})^\mu} dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_n} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right) \dots \Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right) \Gamma(1-\mu)}{\Gamma\left(1-\mu + \frac{p_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{p_n}{\alpha_n}\right)}$$

(当 $\mu < 1$ 时);

$$(b) \quad \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1^{\alpha_1} + \dots + x_n^{\alpha_n} \leq 1}} \dots \int \frac{x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1}}{(x_1^{\alpha_1} + \dots + x_n^{\alpha_n})^\mu} dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_n \left(\frac{p_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{p_n}{\alpha_n} - \mu\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right) \dots \Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{p_n}{\alpha_n}\right)}$$

(当 $\mu < \frac{p_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{p_n}{\alpha_n}$ 时);

$$(B) \quad \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1^{\alpha_1} + \dots + x_n^{\alpha_n} \leq 1}} \dots \int x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1} \sqrt{\frac{1 - x_1^{\alpha_1} - \dots - x_n^{\alpha_n}}{1 + x_1^{\alpha_1} + \dots + x_n^{\alpha_n}}} dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right) \dots \Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\alpha_1 \dots \alpha_n} \frac{1}{\Gamma(m)} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)} \right\},$$

其中为简便计已令

$$m = \frac{p_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{p_n}{\alpha_n}.$$

9) 用数学归纳法求证公式:

$$\int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1^{\alpha_1} + \dots + x_n^{\alpha_n} \leq 1}} \dots \int \varphi(x_1 + \dots + x_n) \frac{x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 \dots dx_n}{(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b)^{p_1 + \dots + p_n}} =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \dots + p_n)} \int_0^1 \phi(u) \frac{u^{p_1 + \dots + p_n - 1}}{(a_1 u + b)^{p_1} \dots (a_n u + b)^{p_n}} du$$

$$(a_1, \dots, a_n \geq 0, b > 0)$$

* 因为立烏維里公式中左端及右端的积分或同时收敛或同时发散。

[参看 586, 18); 利用 495, 2)]。

10) 按照科西那样, 我们指出计算重积分

$$K = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1} e^{-(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)}}{(b_0 + b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n)^q} dx_1 \cdots dx_n$$

$$(p_i, a_i, b_j, q > 0)$$

可以怎样化为计算一单积分。

由已知的公式[492(8)],

$$\frac{1}{(b_0 + b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n)^q} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^\infty e^{-u(b_0 + b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n)} u^{q-1} du.$$

将它代入积分 K 中并改变积分次序, 我们可将它表作

$$K = \int_0^\infty e^{-b_0 u} u^{q-1} du \times$$

$$\times \left\{ \int_0^\infty e^{-(a_1 + b_1 u) x_1} x_1^{p_1-1} dx_1 \cdots \int_0^\infty e^{-(a_n + b_n u) x_n} x_n^{p_n-1} dx_n \right\},$$

或者, 最后, 如对在括号中的积分再利用上述公式:

$$K = \frac{\Gamma(p_1) \cdots \Gamma(p_n)}{\Gamma(q)} \int_0^\infty \frac{e^{-b_0 u} u^{q-1} du}{(a_1 + b_1 u)^{p_1} \cdots (a_n + b_n u)^{p_n}}.$$

这一结果对 $b_0 = 0$ 亦成立, 但须假设 $p_1 + \cdots + p_n > q$.

11) 试计算积分

$$I_{2k} = \int \cdots \int_{x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1} (a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)^{2k} dx_1 \cdots dx_n,$$

其中 $2k$ 是一个自然数, 而 $a_1, \cdots, a_n$ 是任意的实数。

首先, 由多项式定理的公式, 我们有

$$(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)^{2k} = \sum_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 2k} \frac{2k!}{\lambda_1! \cdots \lambda_n!} a_1^{\lambda_1} \cdots a_n^{\lambda_n} x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}.$$

如沿球体 $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1$ 积分, 则指数 λ 中至少有一个为奇数的那些项其积分为零。因此,

$$I_{2k} = \sum_{\mu_1 + \cdots + \mu_n = k} \frac{2k!}{2^{\mu_1}! \cdots 2^{\mu_n}!} a_1^{2\mu_1} \cdots a_n^{2\mu_n} \int \cdots \int_{x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1} x_1^{2\mu_1} \cdots x_n^{2\mu_n} dx_1 \cdots dx_n,$$

但由推广了的第里希莱公式[参看 5)], 所写出的积分有值*

$$\frac{\Gamma\left(\mu_1 + \frac{1}{2}\right) \cdots \Gamma\left(\mu_n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + k + 1\right)}.$$

这里令 $\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\right)\left(\mu - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \frac{(2\mu-1)!!}{2^\mu} \sqrt{\pi},$

經变换后得:

$$\begin{aligned} L_{2k} &= \frac{(2k-1)!!}{2^k} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + k + 1\right)} \sum_{\mu_1 + \cdots + \mu_n = k} \frac{k!}{\mu_1! \cdots \mu_n!} a_1^{2\mu_1} \cdots a_n^{2\mu_n} = \\ &= \frac{(2k-1)!!}{2^k} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + k + 1\right)} (a_1^2 + \cdots + a_n^2)^k. \end{aligned}$$

这一积分首先是納·亞·沙宁(虽然是用另一方法)計算出来的。在注意到积分

$$L_{2k+1} = \int_{x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1} \cdots \int (a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)^{2k+1} dx_1 \cdots dx_n$$

恒等于零后, 沙宁借将指数函数展开为級数的办法并逐项积分便得到这样一积分的值

$$\int_{x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1} \cdots \int e^{a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n} dx_1 \cdots dx_n = \pi^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma\left(\frac{n}{2} + k + 1\right)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k},$$

其中为簡便計已令

$$\rho = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

对偶数的 $n=2m$, 这一結果可重写为

$$\pi^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (k+m)!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k} = \frac{(2\pi)^m}{(i\rho)^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+m)!} \left(\frac{i\rho}{2}\right)^{2k+m} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(i\rho)^{\frac{n}{2}}} J_{\frac{n}{2}}(i\rho).$$

亦即可以虚变元的附标为 $m = \frac{n}{2}$ 的貝塞尔函数[383, 6)]来表示。但是, 必須指出, 如将任何附标的貝塞尔函数放入考察之中, 則所得結果同样对奇数的 n 依然有效。

12) 現在我們轉向将变数更換的一般公式(6)应用到計算重积分的例題。

* 这时應該注意到, 第里希莱公式中假定限制于 $x_1 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0$; 所以由它所給出的結果必須还要乘上 2^n .

很自然的,首先是由公式

[illegible]

变换(11)因而在某种意义上相当于极坐标变换(10)。在 $n=2$ 时, 雅可比曾应用它去证明 B 及 Γ 函数间所已知的关系式[592, 13)]。

应用变换(11)到立烏維里公式 7) 左端的积分中后, 可直接证明它。单纯形

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n \leq 1$$

这时与 $u_1 \dots u_n$ 空间中的立方体 $[0, 1; \dots; 0, 1]$ 相对应。变换的雅可比式等于

$$J = \begin{vmatrix} 1-u_2 & u_2(1-u_3) & \dots & u_2 \dots u_{n-1}(1-u_n) & u_2 \dots u_n \\ -u_1 & u_1(1-u_3) & \dots & u_1 u_3 \dots u_{n-1}(1-u_n) & u_1 u_3 \dots u_n \\ 0 & \dots -u_1 u_2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_1 \dots u_{n-2}(1-u_n) & u_1 \dots u_{n-2} u_n \\ 0 & 0 & \dots & -u_1 \dots u_{n-1} & u_1 \dots u_{n-1} \end{vmatrix}.$$

如在每一行的元素上加上所有以后各行相对应的元素, 则所有在对角线下面的全部元素都换作了零, 而在对角线上的元素就等于

$$1, u_1, u_1 u_2, \dots, u_1 \dots u_{n-1}.$$

因此, 最终有

$$J = u_1^{n-1} u_2^{n-2} \dots u_{n-1}.$$

由公式(6)我们的积分就化为

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \dots \int_0^1 \varphi(u_1) u_1^{p_1+p_2+\dots+p_{n-1}} (1-u_2)^{p_1-1} \times \\ & \times u_2^{p_2+\dots+p_{n-1}} \dots (1-u_n)^{p_{n-1}-1} u_n^{p_n-1} du_1 \dots du_n, \end{aligned}$$

而这已经表作许多单积分乘积的样子; 剩下的就很明显了。

14) 同一变数变换可以得到一变了形的立烏維里公式, 其中 n 重积分是展布在无穷区域上的:

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + \dots + x_n \geq 1}} \varphi(x_1 + x_2 + \dots + x_n) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ & = \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \dots + p_n)} \int_1^\infty \varphi(u) u^{p_1+p_2+\dots+p_{n-1}} du \end{aligned}$$

此处假定右端的积分绝对收敛。

与以前的公式一样, 它可同样推广[比照 8)]:

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ \left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1} + \dots + \left(\frac{x_n}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} \geq 1}} \dots \int \varphi\left(\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1} + \dots + \left(\frac{x_n}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}\right) x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 \dots dx_n = \\ & = \frac{\alpha_1^{p_1} \dots \alpha_n^{p_n} \Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right) \dots \Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\alpha_1 \dots \alpha_n \Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{p_n}{\alpha_n}\right)} \int_1^\infty \varphi(u) u^{\frac{p_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{p_n}{\alpha_n} - 1} du. \end{aligned}$$

用最后一公式, 可以证明, 例如,

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1^{\alpha_1} + \dots + x_n^{\alpha_n} \geq 1}} \dots \int \frac{x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 \dots dx_n}{(x_1^{\alpha_1} + \dots + x_n^{\alpha_n})^\mu} = \\ & = \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_n \left(\mu - \frac{p_1}{\alpha_1} - \dots - \frac{p_n}{\alpha_n}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right) \dots \Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{p_n}{\alpha_n}\right)} \\ & \quad \left(\text{当 } \mu > \frac{p_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{p_n}{\alpha_n} \text{ 时}\right). \end{aligned}$$

15) 求证公式(同样亦属于立烏維里的)

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \dots \int_0^1 \varphi(v_1 v_2 \dots v_n) (1-v_1)^{p_1-1} (1-v_2)^{p_2-1} \dots \\ & \quad \dots (1-v_n)^{p_n-1} v_2^{p_1} v_3^{p_1+p_2} \dots v_n^{p_1+\dots+p_{n-1}} dv_1 \dots dv_n = \\ & = \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \dots + p_n)} \int_0^1 \varphi(u) (1-u)^{p_1+p_2+\dots+p_n-1} du. \end{aligned}$$

提示 如在 7) 中所給的公式中将 $\varphi(u)$ 换成 $\varphi(1-u)$ 并令

$$x_1 = (1-v_1)v_2 \dots v_n,$$

$$x_2 = (1-v_2)v_3 \dots v_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_{n-1} = (1-v_{n-1})v_n,$$

$$x_n = 1-v_n,$$

则它可由这一公式推出来。这时变换的雅可比式有值

$$J = (-1)^n v_2^{p_1} v_3^{p_1+p_2} \dots v_{n-1}^{p_1+\dots+p_{n-1}}.$$

对应于行列式任一元的代数余子式等于元素本身。估计到这一点,雅可比式

$$\frac{D(x_1, \dots, x_{n-1})}{D(u_1, \dots, u_{n-1})} = \begin{vmatrix} a_1 - l_1 \frac{u_1}{u_n} & b_1 - l_1 \frac{u_2}{u_n} & \dots & k_1 - l_1 \frac{u_{n-1}}{u_n} \\ a_2 - l_2 \frac{u_1}{u_n} & b_2 - l_2 \frac{u_2}{u_n} & \dots & k_2 - l_2 \frac{u_{n-1}}{u_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} - l_{n-1} \frac{u_1}{u_n} & b_{n-1} - l_{n-1} \frac{u_2}{u_n} & \dots & k_{n-1} - l_{n-1} \frac{u_{n-1}}{u_n} \end{vmatrix}$$

就会等于

$$l_n + a_n \frac{u_1}{u_n} + b_n \frac{u_2}{u_n} + \dots + k_n \frac{u_{n-1}}{u_n} = \frac{r_n}{u_n}.$$

因此

$$\begin{aligned} K &= 2 \int_{u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2 \leq 1} \dots \int_{u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2 \leq 1} f(Mu_1) \frac{du_1 \dots du_{n-1}}{\sqrt{1 - u_1^2 - \dots - u_{n-1}^2}} = \\ &= 2 \int_{-1}^1 f(Mu_1) du_1 \int_{u_2^2 + \dots + u_{n-1}^2 \leq 1 - u_1^2} \dots \int_{u_2^2 + \dots + u_{n-1}^2 \leq 1 - u_1^2} \frac{du_2 \dots du_{n-1}}{\sqrt{(1 - u_1^2) - u_2^2 - \dots - u_{n-1}^2}}. \end{aligned}$$

里面的积分,容易由 3) 得出,等于

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (1 - u_1^2)^{\frac{n-3}{2}},$$

所以最终有

$$K = 2 \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^1 f(\sqrt{m_1^2 + \dots + m_n^2} u) (1 - u^2)^{\frac{n-3}{2}} du.$$

在这里令 $u = \cos \lambda$ ($0 \leq \lambda \leq \pi$), 亦可将结果写作下形:

$$K = 2 \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\pi f(\sqrt{m_1^2 + \dots + m_n^2} \cos \lambda) \sin^{n-2} \lambda d\lambda.$$

当 $n=3$ 时由此得到我们已知的普安松公式,这在 608, 3) 中我们已推出,且在实质上是用的同一坐标变换法推得的。

17) 已为我们熟知的喀塔朗公式[参看 572, 15) 及 592, 16)]可立刻——重复同样的推

理——移到 n 维的情形:

$$\begin{aligned} \int_{m \leq g(x_1, \dots, x_n) \leq M} \overbrace{\dots}^n f(x_1, \dots, x_n) \varphi(g(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \cdots dx_n = \\ = (S) \int_m^M \varphi(u) d\psi(u) = (R) \int_m^M \varphi(u) \frac{d\psi(u)}{du} du, \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\psi(u) = \int_{m \leq g(x_1, \dots, x_n) \leq u} \overbrace{\dots}^n f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n, \quad (13)$$

这里 M 亦可以是 $+\infty$, 但 $\int_m^{+\infty}$ 了解为 $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_m^M$.

作为一例不妨按照喀塔朗的方法从第里希莱公式 4) 去求得立烏維里公式 7)。

18) 納·亚·沙宁注意到有时喀塔朗公式可在另一种設計下来利用。

假定函数 $f(x_1, \dots, x_n)$ 是 s 次齐次函数 [177], 而函数 $g(x_1, \dots, x_n)$ 亦是齐次但为一次的, 例如, 函数 g 可以有以下形

$$x_1 + \dots + x_n \text{ 或 } \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

又設 $m=0$ 。則在 (13) 中令

$$x_1 = u\xi_1, x_2 = u\xi_2, \dots, x_n = u\xi_n$$

(雅可比式 $J = u^n$) 并考慮到不等式 $0 \leq g(x_1, \dots, x_n) \leq u$ 此时变为不等式 $0 \leq g(\xi_1, \dots, \xi_n) \leq 1$ 时, 我們得到

$$\psi(u) = u^{n+s} \int_{0 \leq g(\xi_1, \dots, \xi_n) \leq 1} \overbrace{\dots}^n f(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \cdots d\xi_n.$$

将它代入 (12) (但將 ξ 又写为 x):

$$\begin{aligned} \int_{0 \leq g(x_1, \dots, x_n) \leq M} \overbrace{\dots}^n f(x_1, \dots, x_n) \varphi(g(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \cdots dx_n = \\ = \int_{0 \leq g(x_1, \dots, x_n) \leq 1} \overbrace{\dots}^n f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \cdot \int_0^M \varphi(u) du^{n+s}. \end{aligned}$$

現在, 如果能够首先选取函数 φ , 其次选取上限 M 使左端的积分容易計算, 則由此就得

积分

$$\int_{\substack{\dots \\ 0 \leq g(x_1, \dots, x_n) \leq 1}}^n f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

的表示式。

例如, 如限定于 $x_1, \dots, x_n$ 的非负值时, 取

$$g(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n,$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1} \quad (p_i > 0),$$

$$\varphi(u) = e^{-u}, \quad M = +\infty,$$

则 s 就等于 $p_1 + \dots + p_n - n$, 而我们将得第里希莱公式[4]:

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{\dots \\ x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ 0 \leq x_1 + \dots + x_n \leq 1}}^n x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 \cdots dx_n = \\ &= \frac{\int_0^\infty e^{-x_1} x_1^{p_1-1} dx_1 \cdots \int_0^\infty e^{-x_n} x_n^{p_n-1} dx_n}{(p_1 + \dots + p_n) \int_0^\infty e^{-u} u^{p_1 + \dots + p_n - 1} du} = \frac{\Gamma(p_1) \cdots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \dots + p_n + 1)}. \end{aligned}$$

19) 用同一方法试化简积分

$$\int_{\substack{\dots \\ x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ 0 \leq x_1 + \dots + x_n \leq 1}}^n \frac{x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1}}{(b_1 x_1 + \dots + b_n x_n)^q} dx_1 \cdots dx_n,$$

但假定

$$p_i > 0, \quad b_i > 0, \quad p_1 + \dots + p_n > q > 0.$$

提示 取 $\varphi(u) = e^{-u}$, $M = +\infty$; 利用当 $a_1 = \dots = a_n = 1$ 及 $b_0 = 0$ 时 10) 的结果。

答

$$\frac{\Gamma(p_1) \cdots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \dots + p_n - q + 1) \Gamma(q)} \int_0^\infty \frac{u^{q-1} du}{(1 + b_1 u)^{p_1} \cdots (1 + b_n u)^{p_n}}.$$

20) 略塔朗公式的下一推广同样亦是属于纳·亚·沙宁的:

$$\int_{\substack{\dots \\ 0 \leq g(x_1, \dots, x_n) \leq M}}^n \varphi(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \cdots dx_n = (R) \int_m^M \left\{ \frac{\partial \Phi(t, c)}{\partial t} \right\}_{c=t} dt,$$

其中

$$\Phi(t, c) = \int_{m \leq g(x_1, \dots, x_n) \leq t} \dots \int \varphi(x_1, \dots, x_n, c) dx_1 \dots dx_n.$$

[如給函数 $\varphi(x_1, \dots, x_n, c)$ 以特殊形式: $f(x_1, \dots, x_n)\varphi(c)$, 由此就得喀塔朗公式.]

我們將采用著者的证明。

在显明的等式

$$\int_m^M dt \int_{m \leq g \leq t}^n F(x_1, \dots, x_n, t) dx_1 \dots dx_n = \int_{m \leq g \leq M}^n dx_1 \dots dx_n \int_m^M F(x_1, \dots, x_n, t) dt$$

中, 令

$$F' = \begin{cases} \frac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial t}, & \text{如 } m \leq g(x_1, \dots, x_n) \leq t, \\ 0, & \text{当 } g(x_1, \dots, x_n) > t \text{ 时;} \end{cases}$$

則得

$$\int_m^M dt \int_{m \leq g \leq t}^n \frac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial t} dx_1 \dots dx_n = \int_{m \leq g \leq M}^n dx_1 \dots dx_n \int_g^M \frac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial t} dt.$$

如算出右端里面的积分, 則由此有

$$\begin{aligned} & \int_{m \leq g \leq M}^n \varphi(x_1, \dots, x_n, g) dx_1 \dots dx_n = \\ & = \Phi(M, M) - \int_m^M dt \int_{m \leq g \leq t}^n \frac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial t} dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (14)$$

另一方面, 按照复合函数的微分法規則, “全导数”

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, t) = \left\{ \frac{\partial \Phi(t, c)}{\partial t} \right\}_{c=t} + \left\{ \frac{\partial \Phi(t, c)}{\partial c} \right\}_{c=t}.$$

应用萊布尼茲規則到右端第二个导数, 可将它換作

$$\int_{m \leq g \leq t}^n \frac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial t} dx_1 \dots dx_n,$$

現在將这一等式对 t 自 m 积分到 M , 注意 $\Phi(m, m) = 0$, 便得出

$$\begin{aligned} \Phi(M, M) - \int_m^M dt \int_{m \leq g \leq t}^n \frac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial t} dx_1 \dots dx_n &= \\ &= \int_m^M \left\{ \frac{\partial \Phi(t, c)}{\partial t} \right\}_{c=t} dt. \end{aligned} \quad (15)$$

如比較(14)及(15), 則得所要证的公式。

21) 我們將应用沙宁公式去計算积分

$$S = \int_{0 \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq 1} \dots \int e^{\frac{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n}{\sigma \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}} dx_1 \dots dx_n.$$

这里

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_n, c) &= e^{\frac{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n}{\sigma}}, \\ g(x_1, \dots, x_n) &= \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \\ m &= 0, \quad M = 1, \end{aligned}$$

$$\Phi(t, c) = \int_{0 \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq t} \dots \int e^{\frac{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n}{\sigma}} dx_1 \dots dx_n.$$

显然, 我們有

$$\begin{aligned} & \int_{0 \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq t} \dots \int e^{\frac{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n}{\sigma}} dx_1 \dots dx_n = \\ &= t^n \int_{c \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq 1} \dots \int e^{\frac{t}{\sigma}(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)} dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

利用习题 11) 的結果后, 易得展开式

$$\Phi(t, c) = \pi^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma\left(\frac{n}{2} + k + 1\right)} \left(\frac{\rho}{2c}\right)^{2k} t^{2k+n},$$

其中

$$\rho = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}.$$

于是

$$\left[\frac{\partial \Phi(t, c)}{\partial t} \right]_{c=t} = t^{n-1} \cdot 2\pi^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k}$$

所以由沙宁公式,

$$S = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n(\rho^2)^{\frac{n}{2}-1}} J_{\frac{n}{2}-1}(\rho t)$$

[比照 11)]。

22) 计算积分 ($\lambda \geq 0$)

$$R(\lambda) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(x_1 + \cdots + x_{n-1} + \frac{\lambda^n}{x_1 \cdots x_{n-1}}\right)} \times \\ \times x_1^{\frac{1}{n}-1} x_2^{\frac{2}{n}-1} \cdots x_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1} dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

[比照 592, 19)]。

对参数 λ 在积分号下面微分 (当 $\lambda > 0$ 时) 并在结果中将一个变数 x_1 以

$$z = \frac{\lambda^n}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}$$

来代换, 则得

$$\frac{dR}{d\lambda} = -n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(x_2 + \cdots + x_{n-1} + z + \frac{\lambda^n}{x_2 \cdots x_{n-1} z}\right)} \times \\ \times x_2^{\frac{1}{n}-1} \cdots x_{n-1}^{\frac{n-2}{n}-1} z^{\frac{n-1}{n}-1} dx_2 \cdots dx_{n-1} dz,$$

亦即

$$\frac{dR}{d\lambda} = -nR.$$

于是

$$R = Ce^{-n\lambda}.$$

因为当 $\lambda = 0$ 时积分 R 保有连续性, 故

$$C = R(0) = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$$

[493, 4°]。最终:

$$R = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-n\lambda}.$$

23) 立烏維里很聪明地利用这一积分来推演属于高斯的 Γ 函数乘法定理 [497]。

在所得等式两端乘上 λ^{p-1} ($p > 0$) 后, 将它对 λ 自 $\lambda = 0$ 积分到 $\lambda = +\infty$ 。从右边得到

$$\frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \int_0^\infty \lambda^{p-1} e^{-n\lambda} d\lambda = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{p+\frac{1}{2}}} \Gamma(p). \quad (16)$$

而在左边我们就将对 λ 的积分移到 (按施行次序的) 第一个位置:

$$f_{ij}^{(m)} = f_i \left(a + j \frac{b-a}{m} \right)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, m-1).$$

将由这些数组成的矩阵自乘。由熟知的定理, 对应于它的行列式

$$\left| \sum_j f_{ij}^{(m)} f_{kj}^{(m)} \right|^n$$

等于所述的原来矩阵的许多行列式的平方和:

$$\sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_n} |f_{ij_k}^{(m)}|^2,$$

其中加法是分布在从 $m(>n)$ 个附标 $0, 1, \dots, m-1$ 中取 n 个的一切可能组合上。如在各组合中颠倒其位置, 则每一项重复 $n!$ 次; 附标 j 相等亦可不必避免, 因为这种情况对应的项为零。结果可以写:

$$\frac{1}{n!} \sum_{j_1=0}^{m-1} \dots \sum_{j_n=0}^{m-1} |f_{ij_k}^{(m)}|^2 = \left| \sum_{j=0}^{m-1} f_{ij}^{(m)} f_{kj}^{(m)} \right|.$$

如左端多重的和中每一项乘上 $\left(\frac{b-a}{m}\right)^n$ 且同时右端行列式的每一元乘上 $\frac{b-a}{m}$, 则得一类似于所求证的等式, 不过不是积分而是积分和。要完成证明, 只须令 $m \rightarrow \infty$ 时变到极限。

* 为简便计, 我们将一行列式在第 i 行及第 k 列交叉处是元 a_{ik} 者写成 $|a_{ik}|$ 的形状。

第十九章 傅立叶*級数

§ 1. 导言

651. 周期量与調和分析 在科学与工程中时常要遇到周期現象，也就是經歷一定的時間 T 后要恢复原狀的現象，時間 T 称为周期。蒸汽机所作的稳定运动是这种現象的实例，它經歷了一定的轉数后又重新經過原来的位置。我們也可取交流电等現象作为实例。与所考虑的周期現象有关的各种量，在經歷周期 T 后，重新取得它們的原值；因此这些量是時間 t 的周期函数，可用下列等式来表明：

$$\varphi(t+T) = \varphi(t).$$

例如交流电的强度与电压就是这样的量。在蒸汽机的例子中，十字头的行程，它的速度与加速度，蒸汽压力，以及在曲柄梢处的切綫力等也都是这样的量。

最簡單的周期函数(如果我們不計常数)是正弦型量： $A \sin(\omega t + \alpha)$ ，其中 ω 是“頻率”，它与周期的关系是：

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (1)$$

用这类簡單的周期函数可以組成比較复杂的周期函数。显然用以組成复杂函数的各正弦型量必須有不同的頻率，因为頻率相等的正弦型量的和仍是有同一頻率的正弦型量。反过来考察形状为

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= A_0, \quad y_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1), \quad y_2 = A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2), \\ y_3 &= A_3 \sin(3\omega t + \alpha_3), \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

* 这个人名或譯为傅里叶、福里哀、富理埃等等——譯者。

的量; 如果不計常数, 这些量的頻率

$$\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$$

是最小頻率 ω 的倍数; 它們的周期是

$$T, \frac{1}{2}T, \frac{1}{3}T, \dots$$

如果將其中某些量相加, 則得到一个周期函数(周期是 T), 但在实质上与(2)型的量已不同。

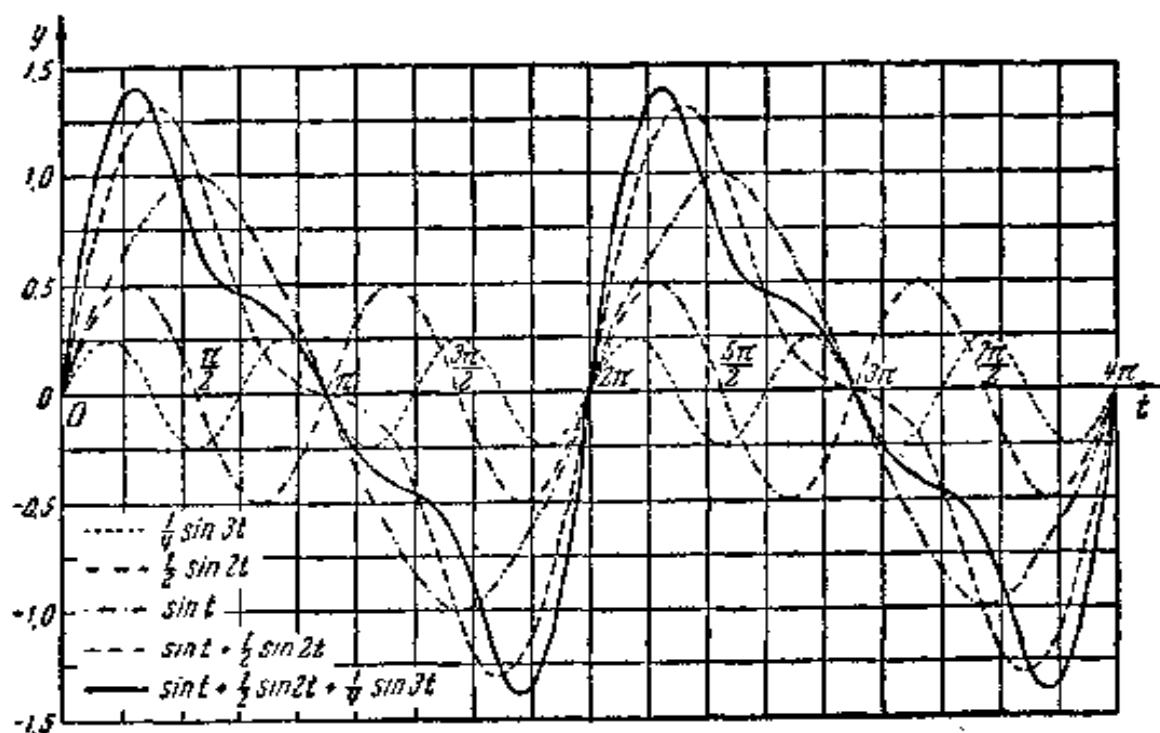


圖 121

作为一例, 作三个正弦型量的和(图 121):

$$\sin t + \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{4} \sin 3t;$$

这函数的图解就其特征來說已与正弦型函数的图解大不相同。用(2)型各量所作成的无穷級数的和的图解則更要不同了。

現在我們很自然地提出相反的問題: 將一个周期是 T 的已給函数 $\varphi(t)$ 表作有限个, 或者即使是无穷个形如(2)的正弦型量的和, 是不是可能呢? 在下面, 我們可以看到, 对于相当广泛的一类函数, 可以給这

問題以肯定的答复；不过我們要引用全部数量(2)所成的无穷序列。对于这类函数，“三角级数”展开式

$$\varphi(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \\ + A_3 \sin(3\omega t + \alpha_3) + \cdots = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \alpha_n) \quad (3)$$

成立，其中 $A_0, A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2, \cdots$ 是常数，对于每个这样的函数，各取特殊的值，而频率 ω 由公式(1)给出。

在几何上，这就表明：周期函数的图解可以由叠加一系列正弦型量的图解得来。如果将每个正弦型量解说为力学上的調和振動，則亦可說这里由函数 $\varphi(t)$ 表示的复杂振動可以分解成各別的調和振動。因此組成展开式(3)的各正弦型量称为函数 $\varphi(t)$ 的調和成分或簡称調和素(第一，第二調和素等)。将周期函数分解成調和素的手續称为調和分析。

如果选取
$$x = \omega t = \frac{2\pi t}{T}$$

作为自变数，則得 x 的函数

$$f(x) = \varphi\left(\frac{x}{\omega}\right),$$

这也是周期函数，但具有标准周期 2π 。展开式(3)将有下面的形状：

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin(x + \alpha_1) + A_2 \sin(2x + \alpha_2) + \\ + A_3 \sin(3x + \alpha_3) + \cdots = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \alpha_n). \quad (4)$$

用二角和的正弦公式展开级数的各项，并令

$$A_0 = a_0, \quad A_n \sin \alpha_n = a_n, \quad A_n \cos \alpha_n = b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

則得三角展开式的最終形状：

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \\ + (a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x) + \cdots = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (5)$$

今后我們总是研究这种形状的展开式^{*}。在这里角 x 的以 2π 为周期的函数就表为 x 的倍角的余弦及正弦的展开式。

在上面,从周期振动现象及与它們有关的量出发,我們得到了函数的三角級数展开式。然而重要的是现在就应注意:当研究只是在有限区間上給出、而完全不是由任何振动现象所产生的函数时,这样的展开式也时常是有用的。

652. 欧勒-傅立叶确定系数法 要研究已給的以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 展开为三角級数(5)的可能性,必須从系数 $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots$ 的一确定組合出发。我們將說明在十八世紀的下半叶欧勒所用的系数确定法,而在十九世紀之初,傅立叶也曾經独立地应用过。

假定函数 $f(x)$ 在区間 $[-\pi, \pi]$ 上绝对可积分。設展开式(5)成立,并将它逐項从 $-\pi$ 积分到 π , 則得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right].$$

但容易看出

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx &= \left. \frac{\sin nx}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx &= \left. -\frac{\cos nx}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

因此在和数符号后的各項都是零,最后求得

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (7)$$

为要确定系数 a_n 的大小,用 $\cos nx$ 乘等式(5)(我們总假定这等

^{*} 如果需要的话,当然不难从这个展开式反过来变成形如(4)的展开式。

式成立)的两端, 再在同一区间上逐项积分:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx &= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx \right]. \end{aligned}$$

由(6), 上式右端第一项等于零。此外, 不论 n, m 如何, 恒有[参考297.4)]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x] \, dx = 0, \quad (8)$$

而 $n \neq m$ 时, 则

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x] \, dx = 0; \quad (9)$$

最后还有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2mx}{2} \, dx = \pi. \quad (10)$$

因此在和数符号后的一切积分, 除了以系数 a_m 为乘数的积分外, 都等于零。从而这系数就被确定为:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx \quad (11)$$

$(m=1, 2, 3, \dots).$

同样, 用 $\sin mx$ 乘展开式(5)后再逐项积分, 即定出正弦的系数:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx \quad (12)$$

$(m=1, 2, 3, \dots).$

在这里除了要用(6)与(8)外, 我们还应用了容易验证的关系式:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0 \quad (n \neq m), \quad (13)$$

与

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \pi. \quad (14)$$

公式(7)、(11)与(12)称为欧勒-傅立叶公式，用这些公式算出的系数称为已給函数的傅立叶系数，用这些系数作成的三角級数(5)称为已給函数的傅立叶級数。在本章中我們专门研究傅立叶級数。

现在来看以上的討論在邏輯上有什么价值。我們的出发点是假設三角展开式(5)成立，但是这个假設究竟真实与否这一問題自然沒有解决。即令假定展开式(5)为真，我們依欧勒与傅立叶的方法算出了展开式(5)的系数，然而像这样做的理由是否令人信服呢？我們一再应用过級数的逐項积分法，但是这种运算并不是什么时候都能进行的[406]。級数的一致收敛性是可以应用这种运算的充分条件。因此现在只有下列定理能够算作已經严格地证明了：

如果周期是 2π 的函数 $f(x)$ 可以展开成一致收敛的三角級数(5)*，则这級数一定是 $f(x)$ 的傅立叶級数。

如果不預先假設一致收敛性，以上的討論甚至不能证明函数能展开成傅立叶級数[参考下面 733, 734]。那么以上的討論究竟有怎样的意义呢？我們只能将它看成一种导入法，由此足以使得在求已給函数的三角展开式时，至少可以从它的傅立叶級数出发，而必須(完全严格地!)确定在那些条件下級数收敛并且收敛于已給函数。

在沒有这样做以前，我們只能够在形式上考虑已給函数 $f(x)$ 的傅

* 注意，用有界函数 $\cos mx$, $\sin mx$ 乘級数各項时并不改变級数的一致收敛性[402]。在这里，一致收敛性也可換成級数各部分和的有界性[488]。

立叶级数,除了知道它是由函数 $f(x)$ “所产生”外,不能再下任何结论。通常用下列符号来表示这级数与函数 f 的关系:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (5a)$$

而避免采用等号。

653. 正交函数系 上节中所讲的是一种讨论的范例,这样的讨论在数学分析中研究许多展开式时常常要应用到。

如果在区间 $[a, b]$ 上所定义的两函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的乘积,其积分为零:

$$\int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx = 0,$$

则此两函数称为在这区间上正交。考虑定义在区间 $[a, b]$ 上的函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 。设系中各函数与它们的平方在 $[a, b]$ 上皆可积分,则它们的两两乘积在同一区间上也可积分 [447, 6]。如果系中各函数两两正交:

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0, \quad (15)$$

($n, m = 0, 1, 2, \dots, n \neq m$)

则此系称为正交函数系。同时我们还永远假定

$$\int_a^b \varphi_n^2(x) dx = \lambda_n > 0, \quad (16)$$

因而在正交系中不包含恒等于零的函数,也不包含其他任何平方的积分等于零的函数(在某种意义下与恒等于零的函数相似*)。

当条件 $\lambda_n = 1 (n = 0, 1, 2, \dots)$ 成立时,这函数系称为规格的。如果

* 参考下面 703。

这些条件不成立, 则当需要时可换取函数系 $\left\{\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right\}$, 这一函数系显然就是规格的。现举几个例如下:

1) 上面考虑过的在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (17)$$

正是直交函数系的重要例子; 其正交性可以由关系式(6), (8), (9)与(13)看出。然而由(10)与(14), 可知它不是规格的。将(17)中各三角函数乘以适当乘数, 不难获得规格系:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \quad (17^*)$$

2) 注意函数系(17)或(17*)在缩小了的区间 $[0, \pi]$ 上不再是正交的。因为如果 n 与 m 一为奇数一为偶数, 则

$$\int_0^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx \neq 0.$$

相反地, 每一仅由余弦

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots \quad (18)$$

或仅由正弦

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots \quad (19)$$

所组成的部分系在这区间上分别成为正交系。这点不难验证。

3) 下列两函数系与刚才考虑过的函数系没有本质上的区别。

$$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \dots \quad (18^*)$$

与

$$\sin \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots, \quad (19^*)$$

其中每一个都是在区间 $[0, l]$ 上的正交系。

4) 为了要给出由三角函数构成的更复杂的正交系的例子, 考虑超越方程

$$\operatorname{tg} \xi = c\xi \quad (c = \text{常数}). \quad (20)$$

可以证明这方程的正根成一无穷集合:

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

在图解上, 各根是正切曲线 $\eta = \operatorname{tg} \xi$ 与直线 $\eta = c\xi$ 相交之点的横坐标(图 122)。作函数系

$$\sin \frac{\xi_1}{l} x, \sin \frac{\xi_2}{l} x, \dots, \frac{\sin \xi_n x}{l}, \dots$$

容易算出(当 $\alpha \neq \beta$ 时)

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin \alpha x \sin \beta x dx &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(\alpha - \beta)l}{\alpha - \beta} - \frac{\sin(\alpha + \beta)l}{\alpha + \beta} \right\} = \\ &= \cos \alpha l \cos \beta l \frac{\beta \operatorname{tg} \alpha l - \alpha \operatorname{tg} \beta l}{\alpha^2 - \beta^2}. \end{aligned}$$

如果在这里令 $\alpha = \frac{\xi_n}{l}$, $\beta = \frac{\xi_m}{l}$ (当 $n \neq m$ 时), 则利用方程(20)可得

$$\int_0^l \sin \frac{\xi_n}{l} x \cdot \sin \frac{\xi_m}{l} x dx = 0 \quad (n \neq m).$$

由此证实了所述函数系在区间 $[0, l]$ 上的正交性。

如果

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi'_n, \dots$$

是方程

$$\operatorname{ctg} \xi = c\xi \quad (c = \text{常数})$$

的正根序列, 则对于函数系

$$\cos \frac{\xi_1}{l} x, \cos \frac{\xi_2}{l} x, \dots,$$

$$\cos \frac{\xi'_n}{l} x, \dots,$$

也可作出类似的结论。

但是这些函数系都不是规格的。

5) 勒戎德多项式

$$X_0(x) = 1, \quad X_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

是在区间 $[-1, 1]$ 上的正交系的重要例子[参考第 111 及 308 款]。因为

$$\int_{-1}^1 X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1},$$

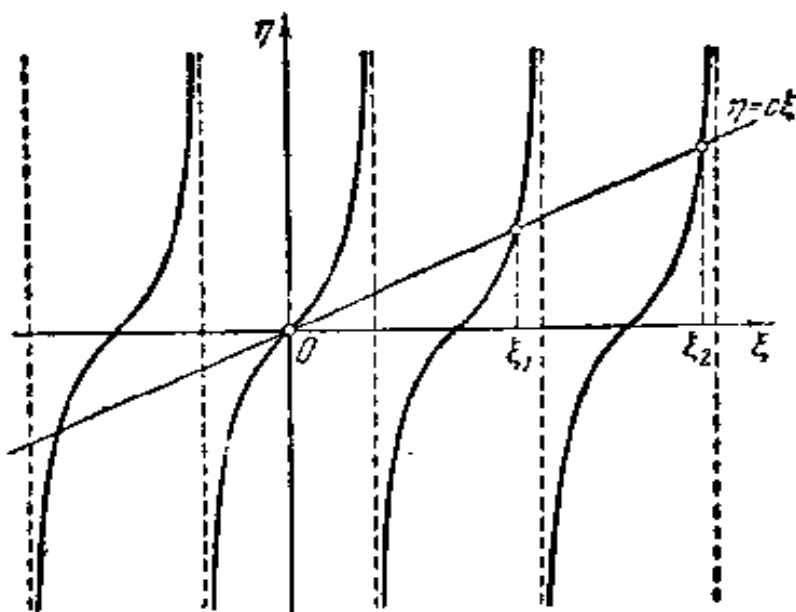


图 122.

所以要得到规格系, 必须分别用 $\sqrt{n+\frac{1}{2}}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) 乘这些多项式.

6) 最后, 再考虑一个与贝塞尔函数有关的例子. 为了写起来简单起见, 我们只限于考虑函数 $J_0(x)$, 但以下所讨论的一切对于函数 $J_n(x)$ ($n>0$) 也都成立.

在贝塞尔函数的理论中, 证明了 $J_0(x)$ 的正根成一无穷集合:

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

将函数 $J_0(x)$ 所满足的方程改写为

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dz}{dx} \right] = -xz,$$

则容易得到: 不论 α 与 β 是什么数,

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dJ_0(\alpha x)}{dx} \right] = -\alpha^2 x J_0(\alpha x),$$

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dJ_0(\beta x)}{dx} \right] = -\beta^2 x J_0(\beta x).$$

用 $J_0(\beta x)$ 乘第一个等式, 用 $J_0(\alpha x)$ 乘第二个等式, 再将两端相减, 则得:

$$(\beta^2 - \alpha^2) x J_0(\alpha x) J_0(\beta x) = \frac{d}{dx} [\alpha x J_0(\beta x) J_0'(\alpha x) - \beta x J_0(\alpha x) J_0'(\beta x)].$$

因此如果 $\alpha \neq \beta$, 则

$$\int_0^1 x J_0(\alpha x) J_0(\beta x) dx = \frac{\alpha J_0(\beta) J_0'(\alpha) - \beta J_0(\alpha) J_0'(\beta)}{\beta^2 - \alpha^2}. \quad (21)$$

如果在这里令 $\alpha = \xi_n, \beta = \xi_m$ ($n \neq m$), 则得关系式:

$$\int_0^1 x J_0(\xi_n x) J_0(\xi_m x) dx = 0,$$

这就证明了函数系 $\{\sqrt{x} J_0(\xi_n x)\}$ 在区间 $[0, 1]$ 上是正交的*. 然而此系并不是规格系.

设在区间 $[a, b]$ 上已给任一正交系 $\{\varphi_n(x)\}$. 我们试行将定义在 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$ 展开成“函数 φ 的级数”

$$f(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) + \dots \quad (22)$$

* 要推广函数 φ 与 ψ 正交性的概念, 我们引进加权 $p(x)$ 的正交性的概念, 用等式

$$\int_a^b p(x) \varphi(x) \psi(x) dx = 0$$

来说明这种正交性. 如果采用这术语, 也能说函数系 $\{J_0(\xi_n x)\}$ 是加权 x 正交的.

为了要确定这展开式中的系数，先設函数可能展开，然后进行与上述特例中相同的手續。这就是說，先用 $\varphi_m(x)$ 乘展开式的两端，再逐項积分：

$$\int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx.$$

由于正交性[参考(15)与(16)]，右端各积分除去一个以外都是零，因此容易得到：

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m} \int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx \quad (23)$$

($m=0, 1, 2, \dots$).

[公式(7), (11), (12)是这公式的特殊情形。]

用公式(23)所确定之系数作出級数(22)，它称为已給函数对于函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 的(广义)傅立叶級数，而各系数本身則称为(广义)傅立叶系数。在規格系的情形下，公式(23)特別简单；这时

$$c_m = \int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx \quad (23^*)$$

($m=0, 1, 2, \dots$).

在这里当然也可重复在上款末尾所作的那些說明。由已給函数所作出的广义傅立叶級数仅仅是在形式上与这函数发生連系。在一般情形下，函数 $f(x)$ 与它的(广义)傅立叶級数之間的关系表示如下：

$$f(x) \sim \sum_0^{\infty} c_n \varphi_n(x). \quad (22^*)$$

与三角級数的情形一样，这級数是否收敛于函数 $f(x)$ ，还須加以研究。

654. 三角插值法 从三角插值法出发，也可自然地接触到用三角

級数表示已給函数 $f(x)$ 的問題。所謂三角插值法就是用三角多項式

$$\sigma_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \quad (24)$$

作为函数 $f(x)$ 的近似式, 使三角多項式与函数在許多点上有相同的值。

总能选取 n 阶三角多項式(24)的 $2n+1$ 个系数: $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n$, 使得在区間 $(-\pi, \pi)$ 內預先指定的 $2n+1$ 个点处, 例如在

$$\xi_i = i\lambda \quad (i = -n, -n+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1, n)$$

各点处(其中 $\lambda = \frac{2\pi}{2n+1}$), 三角多項式的值与函数 $f(x)$ 的值相等。实

际上, 为了要确定这 $2n+1$ 个系数, 我們有个数相同的綫性方程:

$$\alpha_0 + \sum_{\substack{k=1 \\ (i=-n, -n+1, \dots, n)}}^n (\alpha_k \cos k\xi_i + \beta_k \sin k\xi_i) = f(\xi_i) \quad (25)$$

要解这些方程, 应当回忆到一个初等三角恒等式:

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \cos ih = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)h^*}{2 \sin \frac{1}{2}h}. \quad (26)$$

将(25)中各等式两端分別相加。由于正弦是奇函数, 所以 β_k 的系数

$$\sum_{i=-n}^n \sin k\xi_i = 0.$$

α_k 的系数也是这样, 这是因为余弦是偶函数, 所以如果在恒等式(26)

* 如果用 $2 \sin \frac{1}{2}h$ 乘此式左端, 并且将每一乘积 $2 \sin \frac{1}{2}h \cos ih$ 换成差式

$\sin\left(i + \frac{1}{2}\right)h - \sin\left(i - \frac{1}{2}\right)h$, 就不难求得这恒等式。[参考 295 (2).]

中, 令 $h = k\lambda = \frac{2k\pi}{2n+1}$ 时, 应有

$$\sum_{i=-n}^n \cos k\xi_i = 1 + 2 \sum_{i=1}^n \cos ik\lambda = 0. \quad (27)$$

由此得

$$\alpha_0 = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^n f(\xi_i). \quad (28)$$

为了要确定 $\alpha_m (1 \leq m \leq n)$, 分别用 $\cos m\xi_i$ 乘(25)中各等式, 然后将它们的两端分别相加。则由(27), α_0 的系数是零; 因为正弦是奇函数, 所以 β_k 的系数显然也等于零。至于 α_k 的系数则可表为:

$$\sum_{i=-n}^n \cos k\xi_i \cos m\xi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=-n}^n \cos (k+m)\xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i=-n}^n \cos (k-m)\xi_i;$$

当 $k \neq m$ 时, 由(27), 上式右端的两个和式都为零; 当 $k = m$ 时, 第一个和式为零而第二个和式的值显然是 $\frac{2n+1}{2}$ 。这样, 只有 α_m 的系数不等于零, 而等于 $\frac{2n+1}{2}$ 。现在已不难求得

$$\alpha_m = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=-n}^n f(\xi_i) \cos m\xi_i \quad (1 \leq m \leq n). \quad (29)$$

完全与以上相仿, 用 $\sin m\xi_i$ 乘(25)中各等式并且相加, 求得

$$\beta_m = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=-n}^n f(\xi_i) \sin m\xi_i \quad (1 \leq m \leq n). \quad (30)$$

讀者一定已經注意到这里所用方法与欧勒-傅立叶确定三角级数系数法相似。但是在这里我們的計算是无可非議的, 因为不难验证所求得未知数的值确乎适合方程(25)。并且, 由简单的代数推理, 此点可不待验证而自明。我們看到方程系(25)只可能有(如果一般說来有解)

唯一的解,此解是由公式(28), (29), (30)给出,而不论各式的右端是怎样。在这种情形下,方程系的行列式一定不等于零,而这种方程系是确定的。因此用求出的各值为系数作出三角多项式 $\sigma_n(x)$, 则它满足所提出的要求,并能作为我们的函数在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的插值式。

现设已给函数在这区间上可积分(这次是在可积分的原义下!)。如果 n 增大到无穷,则插值多项式 $\sigma_n(x)$ 也作相应的变化,而与 $f(x)$ 在愈来愈“稠密”的点集上重合。插值多项式不仅要“加长”,而且其中的系数也要改变。为了更好地分析系数的性质,将区间 $[-\pi, \pi]$ 用分点 $x_i = (2i-1)\frac{\pi}{2n+1}$ ($-n \leq i \leq n+1$) 分成 $2n+1$ 个相等的部分。则点 ξ_i 恰好是这些部分区间的中点,而各部分区间的长度都等于 $\Delta x_i = \frac{2\pi}{2n+1} = \lambda$ 。如果将公式(28), (29)和(30)改写成下列形状

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=-n}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad \alpha_m = \frac{1}{\pi} \sum_{i=-n}^n f(\xi_i) \cos m\xi_i \Delta x_i,$$

$$\beta_m = \frac{1}{\pi} \sum_{i=-n}^n f(\xi_i) \sin m\xi_i \Delta x_i,$$

则各式右端中的和式就是与上述区间分法相对应的插值和式。现在显然可见,当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\alpha_0 \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad \alpha_m \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx,$$

$$\beta_m \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx,$$

所以我们的函数的傅立叶系数分别是插值三角多项式各系数的极限值。可以说插值多项式“在取极限时”似乎变成了傅立叶级数。

这种步骤当然只能认为是一种导入法。对于函数与其傅立叶级数

等等。

为了研究级数(2)于任一定点 $x=x_0$ 的性质, 作出其部分和的相应表示式

$$s_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx_0 + b_m \sin mx_0).$$

用积分表示式(1)代替 a_m 与 b_m , 并在积分号下引入常数 $\cos mx_0$, $\sin mx_0$, 则得:

$$\begin{aligned} s_n(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du + \\ &+ \sum_{m=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) [\cos mu \cos mx_0 + \sin mu \sin mx_0] du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m(u-x_0) \right\} du. \end{aligned}$$

利用第 654 款中的公式(26)来变换在大括号中的表示式, 就有:

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m(u-x_0) = \frac{\sin(2n+1)\frac{u-x_0}{2}}{2 \sin \frac{u-x_0}{2}},$$

最后得

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin(2n+1)\frac{u-x_0}{2}}{2 \sin \frac{u-x_0}{2}} du. \quad (3)$$

这个重要的积分称为第里希莱(G. Lejeune-Dirichlet)积分。

因为我們在这里討論周期为 2π 的 u 的函数, 所以由上面所作的說明, 可将积分区間 $[-\pi, \pi]$ 例如改成 $[x_0-\pi, x_0+\pi]$:

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(u) \frac{\sin(2n+1)\frac{u-x_0}{2}}{2 \sin \frac{u-x_0}{2}} du.$$

用代换 $t = u - x_0$, 将这积分变换成下列形式:

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t} dt.$$

然后将积分分成两部分: $\int_0^{\pi} + \int_{-\pi}^0$, 并用改换变数符号的方法, 将第二个积分也化为在区间 $[0, \pi]$ 上的积分, 则对于傅立叶级数的第 n 个部分和, 最后得到这样的表示式:

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x_0 + t) + f(x_0 - t)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t} dt. \quad (1)$$

因此, 问题就化为研究这个含有参数 n 的积分的性质。这里所提出的问题的特征是: 在这里不能应用积分号下取极限法^{*}。直到现在为止, 对于含参数的积分求极限, 这是我们所应用过的唯一的方法(参看第十四章)。在本章与下章中, 我们必须系统地研究不能应用这种方法的情况。

656. 第一基本预备定理 在继续研究以前, 先证明黎曼所发现的下一定理, 它在以后的讨论中很重要。

如果函数 $g(t)$ 在某一有限区间 $[a, b]$ 上绝对可积分, 则

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \sin pt \, dt = 0,$$

同样

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \cos pt \, dt = 0.$$

^{*} 在这种情形下, 积分号下的表示式当 $n \rightarrow \infty$ 时根本没有极限。

只要作出上列第一个极限式的证明就够了。预先应注意，不論取任何有限区間 $[\alpha, \beta]$ ，我們有估值如下：

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \sin pt \, dt \right| = \left| \frac{\cos p\alpha - \cos p\beta}{p} \right| \leq \frac{2}{p}. \quad (5)$$

先設函数 $g(t)$ 在原义下可积分。用点

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_n = b \quad (6)$$

将区間 $[a, b]$ 分成 n 个部分，并与此相应来分解积分：

$$\int_a^b g(t) \sin pt \, dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t) \sin pt \, dt$$

用 m_i 表示 $g(t)$ 的值在第 i 个区間上的下确界，則可将上面的表示式变换为：

$$\begin{aligned} \int_a^b g(t) \sin pt \, dt &= \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [g(t) - m_i] \sin pt \, dt + \sum_{i=0}^{n-1} m_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sin pt \, dt. \end{aligned}$$

如果 ω_i 是函数 $g(t)$ 在第 i 个区間上的振幅，則在这区間上 $g(t) - m_i \leq \omega_i$ ；考虑到不等式(5)，不难求得我們的积分的估值：

$$\left| \int_a^b g(t) \sin pt \, dt \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta t_i + \frac{2}{p} \sum_{i=0}^{n-1} |m_i|.$$

已給任一数 $\varepsilon > 0$ ，首先选取分法(6)，使得

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta t_i < \frac{\varepsilon}{2};$$

由于函数 g 的可积分性，这种分法是可能的[285]。現因数 m_i 已由此

确定, 所以能选取

$$p > \frac{4}{s} \sum |m_i|,$$

对于这些值 p , 可得

$$\left| \int_a^b g(t) \sin pt \, dt \right| < s,$$

因此证明了我们的断语。

在函数 $g(t)$ 是广义可积分 (但必须是广义绝对可积分) 的情形下, 只要假定在区间 $[a, b]$ 上只有一个奇异点, 例如点 b , 就够了*。

设 $0 < \eta < b - a$ 。将积分分成两部分:

$$\int_a^b = \int_a^{b-\eta} + \int_{b-\eta}^b,$$

上式右端的第二个积分对于任一值 p 有估值如下:

$$\left| \int_{b-\eta}^b g(t) \sin pt \, dt \right| \leq \int_{b-\eta}^b |g(t)| \, dt;$$

如果选取 η 充分小, 则这个估值 $< \frac{s}{2}$ 。至于积分

$$\int_a^{b-\eta} g(t) \sin pt \, dt,$$

则由已经证明了的结果, 当 $p \rightarrow +\infty$ 时, 它趋近于零, 因为在区间 $[a, b-\eta]$ 上, 函数 $g(t)$ 在原义下可积分; 当 p 充分大时, 这积分的绝对值也变为 $< \frac{s}{2}$ 。这样, 定理的证明就完成了。

我们提起读者注意: 在这里, 积分所趋近的极限不是用积分号下取极限法求出的。

* 否则我们可将区间分成有限个部分, 使每部分只含一个奇异点, 然后将推理分别应用到每一部分上。

如果回忆起表示傅立叶系数的公式(1), 则由此得出第一个直接的推論:

绝对可积分函数的傅立叶系数 a_m, b_m 当 $m \rightarrow \infty$ 时趋近于零。

657. 局部化定理 值得注意的“局部化定理”是已证的预备定理的第二个直接推論, 它也是黎曼所发现的。

先取任一正数 $\delta < \pi$, 将(4)中的积分拆成两部分: $\int_0^\pi = \int_0^\delta + \int_\delta^\pi$. 如果将第二个积分改写成

$$\frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{2 \sin \frac{1}{2} t} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt,$$

则显然正弦的乘数是 t 的函数, 在区间 $[\delta, \pi]$ 上绝对可积分, 因其分母 $2 \sin \frac{1}{2} t$ 在这区间上不为零。在这种情形下, 由预备定理, 这一积分当 $n \rightarrow \infty$ 时趋近于零, 因此对于傅立叶级数的部分和 $s_n(x_0)$, 其极限的存在与极限的大小都可由一个积分

$$\rho_n(\delta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta [f(x_0 + t) + f(x_0 - t)] \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{1}{2} t} dt \quad (7)$$

的性质来完全确定。但在这积分中函数 $f(x)$ 的值只包含对应于变元从 $x_0 - \delta$ 变到 $x_0 + \delta$ 时的那一部分。由这种简单的讨论, 就证明了黎曼定理:

黎曼定理。 函数 $f(x)$ 的傅立叶级数在一点 x_0 处的性质* 只与函数在这点邻近所取的值有关, 即与在这点的任意小的邻域内所取的值有关。

因此, 例如如果取两函数, 使共在 x_0 的任意小的邻域内的值相同, 则不论这两函数在邻域外怎样不同, 在点 x_0 处, 与它们相应的傅立叶

* 我们指的是级数在点 x_0 处的收敛与发散性, 以及级数(在收敛的情形下)有怎样的和。

級数有相同的性质:或者两級数同时收敛并收敛于同一和式;或者两級数同时发散。如果注意到所考虑的两函数的傅立叶系数既然与两函数的一切值有关,因而也就可能完全不同,那么上述結果就显得更令人惊讶了!

658. 狄尼与李泼西茨的傅立叶級数收敛性的判别法 現在再回轉来繼續研究傅立叶級数的部分和式 $s_n(x_0)$ 的性质。我們已經得到它的积分表示式(4)。注意这等式对于滿足所提到的条件的每一函数 $f(x)$ 都成立。如果特別取 $f(x) \equiv 1$, 則 $s_n(x) \equiv 1$, 由(4)就得到

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t} dt.$$

設常數 S_0 是級数的和, 在下面將要求出它的确值。用 S_0 乘等式兩端, 所得結果从(4)式減去, 則得

$$s_n(x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t} dt, \quad (8)$$

其中为簡便計, 已令

$$\varphi(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S_0. \quad (9)$$

如果我們要想断定 S_0 真是級数的和, 則必須证明积分(8)当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于零。

現在回轉来选取 S_0 这个数。实际上重要的情形是: (a) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 連續, 或 (b) $f(x)$ 在这点的兩边只可能有第一种不連續(即跳跃), 从而极限 $f(x_0 + 0)$ 与 $f(x_0 - 0)$ 存在。以后我們只討論这两种情形, 并且恒設

在情形(a)时: $S_0 = f(x_0)$,

在情形(b)时: $S_0 = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$

如果在第一种不連續的点 x_0 上, 等式

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$$

成立, 則(a)与(б)两种情形沒有区分的必要。适合于这种条件的不連續点有时称为正规的。

注意: 因为

$$(a) \lim_{t \rightarrow +0} f(x_0 \pm t) = f(x_0) \text{ 或 } (б) \lim_{t \rightarrow +0} f(x_0 \pm t) = f(x_0 \pm 0)$$

(視那一种情况而定), 故由上述选取数 S_0 的方法, 恒有

$$\lim_{t \rightarrow +0} \varphi(t) = 0. \quad (10)$$

由此可形成:

狄尼(U. Dini)判別法。如果对于某一 $h > 0$, 积分

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t} dt$$

存在, 則函数 $f(x)$ 的傅立叶級数在点 x_0 收敛于和数 S_0 。

事实上, 在这一假定下, 积分

$$\int_0^\pi \frac{|\varphi(t)|}{t} dt$$

也存在。如果将表示式(8)改写成

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t} \cdot \frac{\frac{1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt.$$

則因函数 $\frac{\varphi(t)}{t}$ 绝对可积分, 从而 $\frac{\varphi(t)}{t} \cdot \frac{\frac{1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t}$ 也绝对可积分, 直接由基

本预备定理, 可知上一积分式当 $n \rightarrow \infty$ 时趋近于零。因此这个判别法的证明就完成了。

狄尼积分展开的形状:

在情形(a)时, 为 $\int_0^h \frac{|f(x_0+t) - f(x_0-t) - 2f(x_0)|}{t} dt$;

在情形(b)时, 为 $\int_0^h \frac{|f(x_0+t) + f(x_0-t) - f(x_0+0) - f(x_0-0)|}{t} dt$.

显然, 只要(依不同情况)假设积分

$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t) - f(x_0)|}{t} dt \text{ 与 } \int_0^h \frac{|f(x_0-t) - f(x_0)|}{t} dt \quad (11)$$

或

$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t) - f(x_0+0)|}{t} dt \text{ 与 } \int_0^h \frac{|f(x_0-t) - f(x_0-0)|}{t} dt$$

分别存在就够了。由此应用积分存在的各种已知判别法, 可得关于傅立叶级数收敛性的许多判别法。例如, 在情形(a)时, 我们能证明

李泼西茨(R. O. Lipschitz) 判别法。如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 并且对于充分小的 t , 不等式

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0)| \leq Lt^\alpha$$

成立, 其中 L 与 α 都是正的常数 ($\alpha \leq 1$); 则 $f(x)$ 的傅立叶级数在点 x_0 处收敛于和数 $f(x_0)$ 。

当 $\alpha=1$ 时, 则简单地有

$$\left| \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0)}{t} \right| \leq L,$$

因此积分(11)作为原义积分而存在[444]。如果 $\alpha < 1$, 则有

$$\left| \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0)}{t} \right| \leq \frac{L}{t^{1-\alpha}},$$

并且因为上式右端的函数可积分, 所以积分(11)至少是作为广义积分而存在[446]。

特别, 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有有限导数 $f'(x_0)$, 或者即令有不相等的单侧导数(“尖点”):

$$f'_+(x_0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{-t},$$

则当 $\alpha=1$ 时的李潑西茨条件显然成立。因此, 如果在点 x_0 处, 函数 $f(x)$ 有导数, 或者甚至只有两个有限单侧导数, 则其傅立叶级数收敛, 并且它的和等于 $f(x_0)$ 。

对于情形(6), 也容易说明李潑西茨判别法。作为一特别的推论, 我們在这里指出: 要使得傅立叶级数在第一种不連續点 x_0 处收敛, 只須假定有限的极限

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t}, \quad \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{-t}$$

存在, 且这次级数的和是 $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ 。

上列极限在某种意义下与单侧导数相似, 不过函数在点 x_0 处的值 $f(x_0)$ 要分別用它在这点右边及左边的值的极限来代替。

在实用上最常遇到以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 是可微分的函数, 或者是由几个可微分的函数組成的, 即分段可微分的函数。我們可看到: 对于这样的函数 $f(x)$, 其傅立叶级数除在各別函数的“接連点”处外, 收敛于函数 $f(x)$; 而在“接連点”处, 级数的和是 $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ 。

659. 第二基本预备定理 为了要作出另外一些判别法, 我們还需要建立一个预备定理, 它是由第里希萊首先发现的。

如果函数 $g(t)$ 在区間 $[0, h]$ ($h > 0$) 上单調增加并且有界, 則

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^h g(t) \frac{\sin pt}{t} dt = \frac{\pi}{2} g(+0). \quad (12)$$

证 首先, 所考虑的积分可以表为两个积分之和的形状:

$$g(+0) \int_0^h \frac{\sin pt}{t} dt + \int_0^h [g(t) - g(+0)] \frac{\sin pt}{t} dt. \quad (13)$$

如果应用代换 $pt = z$, 将第一个积分变换为

$$g(+0) \int_0^{p\delta} \frac{\sin z}{z} dz,$$

则立刻可见, 当 $p \rightarrow +\infty$ 时, 这积分趋近于 $\frac{\pi}{2} \cdot g(+0)$, 因为

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2}.$$

因此整个问题就在如何证明(13)中的第二个积分趋近于零。

任意给出 $\varepsilon > 0$, 则有这样的 $\delta > 0$ (可认为 $\delta < h$) 存在, 使得对于 $0 < t \leq \delta$,

$$0 \leq g(t) - g(+0) < \varepsilon.$$

刚才所提到的积分拆成两部分:

$$\left(\int_0^\delta + \int_\delta^h \right) [g(t) - g(+0)] \frac{\sin pt}{t} dt = I_1 + I_2.$$

对积分 I_1 应用波纳公式[294], 则得

$$I_1 = [g(\delta) - g(+0)] \int_0^\delta \frac{\sin pt}{t} dt = [g(\delta) - g(+0)] \int_0^{p\delta} \frac{\sin z}{z} dz,$$

其中第一个因子 $< \varepsilon$, 而第二个因子对于一切值 p 一致有界。事实上,

由广义积分 $\int_0^\infty \frac{\sin z}{z} dz$ 的收敛性, 可见当 $z \rightarrow \infty$ 时, z 的 ($z \geq 0$) 连续函数

$$\int_0^z \frac{\sin z}{z} dz,$$

有有限的极限, 并且对于一切值 z 有界:

$$\left| \int_0^z \frac{\sin z}{z} dz \right| \leq L \quad (L = \text{常数}),$$

从而

$$\left| \int_{p\eta}^{p\delta} \frac{\sin z}{z} dz \right| = \left| \int_0^{p\delta} - \int_0^{p\eta} \right| \leq 2L.$$

因此积分 I_1 具有与 p 无关的估计值:

$$|I_1| \leq 2L_\varepsilon. \quad (14)$$

至于积分 I_2 , 则因 $\sin pt$ 的乘数在原义下可积分(须知 $t \geq \delta$), 由第656款中的预备定理, 可知当 $p \rightarrow +\infty$ 时(并对固定的 δ), 这积分趋近于零。这定理因而得证。

660. 第里希莱-霞当判别法 现在转而推导从另一种思想而来的傅立叶级数收敛性的一个新判别法。

第里希莱-霞当判别法。 如果在以点 x_0 为中点的区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上, 函数 $f(x)$ 有有界变差, 则这函数的傅立叶级数在点 x_0 处收敛于和数 S_0 。

在第 657 款中我们已经看到, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 部分和 $s_n(x)$ 的性质由积分 $\rho_n(\delta)$ 的性质确定[参看(7)], 其中特别可取上面所说的数 h 作为 δ 。将积分 $\rho_n(h)$ 改为

$$\rho_n(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^h [f(x_0 + t) + f(x_0 - t)] \frac{\frac{1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \cdot \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{t} dt.$$

由假定, 方括号内的和式为一有界变差函数; 商数 $\frac{\frac{1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t}$ 则为增函数。

可见它们的乘积也有有界变差, 而且因此可以表示为两个单调增函数

的差的形状。既然上款中的预备定理可以分别应用到每个增函数，所以也可以应用到它们的差，由此立得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(h) &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} [f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)] = \\ &= \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.\end{aligned}$$

因为在連續点处，所得表示式成为 $f(x_0)$ ，所以我們的证明就完成了。

必須說明由第里希萊所首先举出的可展开函数为傅立叶級数之条件，則具有較特殊的性质。他所证明的命題是：

第里希萊判別法。如果以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 在区間 $[-\pi, \pi]$ 上分段单調^{*}，并且在这区間上不連續点的个数不超过一个有限数，則此函数的傅立叶級数在每个連續点处收敛于和数 $f(x_0)$ ，在每个不連續点处收敛于和数 $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ 。

此后，这里所說的条件称为“第里希萊条件”。

因为适合于这条件的函数在任一有限区間上显然有有界变差，所以这判別法可以在形式上包括在前一判別法中。

以上所述判別法完全足以滿足分析及其在实用上的要求。其他提出的判別法主要具有理論上的意义；对于这些，我們不可能詳細研討。

最后来談一談狄尼及第里希萊-霞当的两判別法之間关系的問題。可以证明，这两判別法是不可比較的，这就是說不能从其中的一个推出另一个。先考虑函数 $f(x)$ ，它在区間 $[-\pi, \pi]$ 上定义为：**

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\log \frac{x+1}{2\pi}} & \text{在 } x \neq 0 \text{ 时,} \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

* 这意思是說能将区間 $[-\pi, \pi]$ 分解成为有限个部分区間，使得函数在每个部分区間上单調。

** 用周期法則 $f(x+2\pi) = f(x)$ 将函数推广到实数軸上的其余部分。

这两函数是連續的, 并且是分段单調的, 即滿足第里希萊条件。而这时在点 $x=0$ 处, 对于任一 $h>0$, 狄尼积分

$$\int_0^h \frac{|f(t) + f(-t) - 2f(0)|}{t} dt = 2 \int_0^h \frac{dt}{t \log \frac{t}{2\pi}}$$

显然是发散的。

在另一方面, 如果用下列等式在区間 $[-\pi, \pi]$ 上定义函数:**

$$\begin{cases} f(x) = x \cos \frac{\pi}{2x} & \text{在 } x \neq 0 \text{ 时,} \\ f(0) = 0, \end{cases}$$

則在点 $x=0$ 处, 李潑西茨条件显然成立:

$$|f(x) - f(0)| \leq |x|,$$

因此狄尼条件也成立。然而, 此时函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的任何邻域內沒有有界变差[542]。

661. 非周期函数的情形 以上所建立的全部理論的出发点是: 假定所給函数对于一切实值 x 有定义, 并且有周期 2π 。但是最常遇到的函数 $f(x)$ 或者是: (a) 只在区間 $(-\pi, \pi]$ 上被給出; 或者是: (b) 即使在这区間以外也有定义, 它是非周期的。

为了要能将上面的理論应用到这种函数, 引进由下述方式所定义的輔助函数 $f^*(x)$ 来代替它。在区間 $(-\pi, \pi]$ 上, 取 f^* 与 f 恒等:

$$f^*(x) = f(x) \quad (-\pi < x \leq \pi), \quad (15)$$

又令 $f^*(-\pi) = f^*(\pi)$,

而用周期法則将函数 $f^*(x)$ 推广到 x 的其他实数值。

对于这样作出的以 2π 为周期的函数 $f^*(x)$, 可以应用已证的关于展开的定理。然而, 如果所討論的点 x_0 严格地在 $-\pi$ 与 π 之間, 則当檢查这些定理的条件是否成立时, 由于(15), 只須考虑实际上給出的

** 見上頁。

函数 $f(x)$ 。根据同样的理由，可以不必引进函数 $f^*(x)$ 就直接用公式 (1) 将展开式的系数计算出来。简单地說，不必用輔助函数 $f^*(x)$ ，以上所证明的全部結果都可直接应用到已給函数 $f(x)$ 上来。

但是必須特別注意区間的端点 $x = \pm\pi$ 。当檢查第 658, 660 款中任一定理的条件对于 $f^*(x)$ 譬如說在点 $x = \pi$ 处是否成立时，則既須考察輔助函数 $f^*(x)$ 在 $x = \pi$ 左側 的值，又須考察在 右側 的值；其左側的值与已給函数 $f(x)$ 的对应值一致，而其右側的值則与 $f(x)$ 在 $x = -\pi$ 的右側的值一致。因此，如果我們要对于点 $x = \pm\pi$ 复述第里希萊-霞当判别法，則在两种情形下都必須要求 $f(x)$ 在 $x = \pi$ 的左側与 $x = -\pi$ 的右側都有有界变差。此时在两种情形下，应取

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{f^*(\pi+0) + f^*(\pi-0)}{2} = \frac{f^*(-\pi+0) + f^*(-\pi-0)}{2} = \\ &= \frac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2} \end{aligned}$$

作为值 S_0 。由此可知，即使已給函数 $f(x)$ 在 $x = \pm\pi$ 处連續，但是沒有周期 2π ，从而 $f(\pi) \neq f(-\pi)$ ，則当傅立叶級数收敛性的任一个充分条件成立时，这一級数的和将为

$$\frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2},$$

而与 $f(-\pi)$ 及 $f(\pi)$ 都不相同。对于这种函数，展开式只在开区間 $(-\pi, \pi)$ 內成立。

讀者应当特別留心下面的說明。如果三角級数 (2) 在区間 $(-\pi, \pi)$ 內收敛于函数 $f(x)$ ，則因为它的各項都以 2π 为周期，級数处处收敛，而且它的和 $S(x)$ 也是以 2π 为周期的 x 的周期函数。不过一般說来，这个和在上述区間以外已与函数 $f(x)$ 不同 [如果已經在整个实軸上給出 $f(x)$]。以后 [664] 将用許多例子来解說此点。

最后指出，可取长为 2π 的任一区間 $(a, a+2\pi]$ 来代替区間 $(-\pi, \pi]$ 。

662. 任意区間的情形 設在任意长 $2l(l>0)$ 的区間 $(-l, l]$ 上給出一函数 $f(x)$ 。如果用下式代換:

$$x = \frac{ly}{\pi} \quad (-\pi < y \leq \pi),$$

則得在区間 $(-\pi, \pi]$ 上一个 y 的函数 $f\left(\frac{ly}{\pi}\right)$, 此时就可应用上款中的討論。我們已看到, 在一定的条件下, 可将它展开为傅立叶級数:

$$f\left(\frac{ly}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ny + b_n \sin ny),$$

其中各系数由欧勒-傅立叶公式确定:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right) \cos ny dy, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right) \sin ny dy.$$

($n=0, 1, 2, \dots$) ($n=1, 2, \dots$)

現在回到原有的变数 x , 令

$$y = \frac{\pi x}{l},$$

則得已給函数 $f(x)$ 的三角級数展开式, 但其型式略有变更:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (16)$$

这里取的不是角 x 的, 而是角 $\frac{\pi x}{l}$ 的倍角的余弦与正弦。用同一代換,

可将关于确定展开式系数的公式变换成下形:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (17)$$

($n=0, 1, 2, \dots$) ($n=1, 2, \dots$)

对于区間的端点 $x = \pm l$, 上款中对点 $x = \pm \pi$ 所作的說明仍然有效。最后, 区間 $(-l, l]$ 可用另外任一长为 $2l$ 的区間来代替, 特別可用区間

現設 $f(x)$ 是在區間 $[-\pi, \pi]$ 上絕對可積分的偶函數。則 $f(x)\sin nx$ 是奇函數, 由上所述,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0. \\ (n=1, 2, \dots)$$

因此, 偶函數的傅立葉級數只含余弦:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \quad (18)$$

因為在這種情形下, $f(x)\cos nx$ 也是偶函數, 則應用上述第二個說明, 能將展開式的係數 a_n 寫作

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx. \quad (19) \\ (n=0, 1, 2, \dots)$$

如果函數 $f(x)$ 是奇函數, 則函數 $f(x)\cos nx$ 也是奇函數, 從而

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0. \\ (n=0, 1, 2, \dots)$$

我們得結論如下: 奇函數的傅立葉級數只含正弦:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (20)$$

而且由於乘積 $f(x)\sin nx$ 是偶函數, 所以能寫出

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad (21) \\ (n=1, 2, \dots)$$

順便注意到在區間 $[-\pi, \pi]$ 上所給出的每一函數 $f(x)$ 都能夠表作

偶函数与奇函数之和的形式:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

其中

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

显然, 函数 $f(x)$ 的傅立叶级数恰巧是由函数 $f_1(x)$ 的余弦展开式与函数 $f_2(x)$ 的正弦展开式所组成的。

再设只是在区间 $[0, \pi]$ 上给出 $f(x)$ 。要想在这区间上将它展开为傅立叶级数(2), 我们对于在区间 $[-\pi, 0)$ 上的值 x , 任意补充函数的定义, 然后应用第 661 款中的结果。由于可以任意补充函数的定义, 所以就有可能得到各种不同的三角级数。如果在 0 与 π 之间的任一点 x_0 处, 函数满足在第 668, 670 款中所建立的一个判别法, 则这些级数在点 x_0 处或者收敛于 $f(x_0)$, 或者在 x_0 是不连续点时收敛于 $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ 。

利用函数定义在区间 $[-\pi, 0)$ 的任意性, 可以得到 $f(x)$ 的只含余弦的或只含正弦的展开式。实际上, 想像在 $0 < x \leq \pi$ 时, 令

$$f(-x) = f(x), \quad (22)$$

则得在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的偶函数(图 123, a), 而且它有周期 2π 。由前述可知它的展开式只含余弦。展开式的系数可用公式 (19) 来计算, 而在计算中只用得着原给函数 $f(x)$ 的值。

同样, 如果用条件(对于 $0 < x \leq \pi$)

$$f(-x) = -f(x) \quad (23)$$

来补充函数 $f(x)$ 的定义, 使它成为奇函数(图 123, b), 则其展开式中只含一些正弦项。而其系数可由公式(21)来确定。

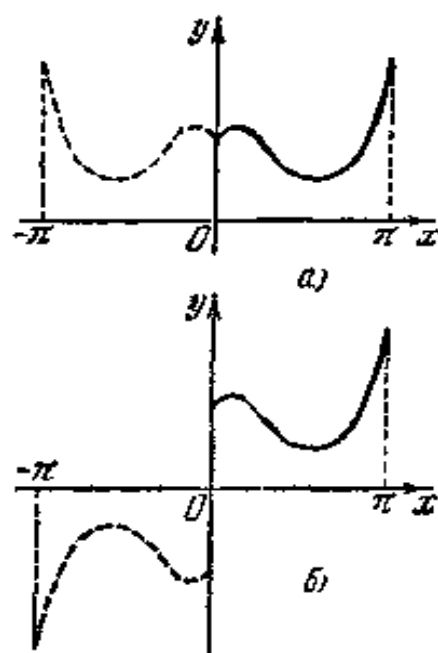


圖 123.

因此, 当已知的一些条件成立时, 在区间 $[0, \pi]$ 上所给出的函数既能展开为只含正弦的级数, 又能展开为只含余弦的级数!

然而, 点 $x=0$ 及 $x=\pi$ 需要特别加以研究。在这两点处, 两个展开式是不同的。为简单起见, 假定所给函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 及 $x=\pi$ 处连续, 而首先考虑余弦展开式。条件(22)首先使得在 $x=0$ 处的连续性保持不变, 因此当应有的条件成立时, 级数(18)在 $x=0$ 处恰好收敛于 $f(0)$ 。又因

$$f(-\pi+0)=f(\pi-0)=f(\pi),$$

所以在 $x=\pi$ 处也有类似的情况。

正弦展开式的情况则不相同。现不深入讨论由于条件(23)而破坏了函数的连续性等等, 而只简单地指出在点 $x=0$ 与 $x=\pi$ 处级数(20)的和显然是零。因此只有在 $f(0)$ 及 $f(\pi)$ 的值等于零时, 级数的和才能给出这些值。

如果函数 $f(x)$ 是在区间 $[0, l]$ ($l>0$) 上给出的, 则引用与 662 中相同的变数代换后, 展开函数为余弦级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

或正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

的问题就化为刚才所讨论过的问题。此时展开式中的系数可分别用公式

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (24)$$

(n=0, 1, 2, ...)

或

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (25)$$

(n=1, 2, ...)

计算出来。

664. 例 下面作为例子的函数不是可微分函数, 就是分段可微分的函数。这种函数无疑地能展开为傅立叶级数, 因此我们不讨论展开问题。

1) 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内展开函数

$$f(x) = e^{ax} \quad (a = \text{常数}, \neq 0).$$

由公式(1):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} dx = \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{a\pi} = 2 \frac{\operatorname{sh} a\pi}{a\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{a \cos nx + n \sin nx}{a^2 + n^2} e^{ax} \right]_{-\pi}^{\pi} = (-1)^n \frac{1}{\pi} \frac{2a}{a^2 + n^2} \operatorname{sh} a\pi,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{a \sin nx - n \cos nx}{a^2 + n^2} e^{ax} \right]_{-\pi}^{\pi} = (-1)^{n-1} \frac{1}{\pi} \frac{2n}{a^2 + n^2} \operatorname{sh} a\pi.$$

因此, 对于 $-\pi < x < \pi$, 则有

$$e^{ax} = \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} a\pi \left\{ \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} [a \cos nx - n \sin nx] \right\}.$$

如果我们从区间 $(0, 2\pi)$ 出发, 则得系数不同的展开式——此时必须利用公式(1*)。不过新的展开式也不难从已经求得的展开式推出。

2) 在区间 $(0, 2\pi)$ 内展开函数

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

由公式(1*):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\pi x - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos nx dx = \frac{1}{2\pi} (\pi - x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx dx = 0,$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx dx = -\frac{1}{2\pi} (\pi - x) \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n}.$$

这样得到特别简单并且只含正弦的展开式:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi).$$

在 $x=0$ (或 2π) 处, 级数的和等于零, 上面的等式不成立。在以上所指出的区间之外, 这个等式也不成立。级数和 $S(x)$ 的图解 (图 124) 是由无限多个平行线段与在 x 轴上的一列孤立点所构成的。

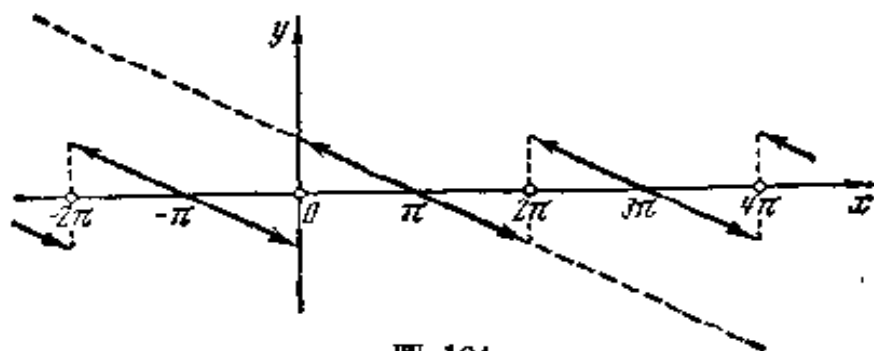


图 124.

3) 由于上题中所得展开式特别重要, 今不依赖一般的理论, 而用初等的方法将它推演出来。

设 $0 < x < 2\pi$ 。利用第 654 款中的公式 (26), 将它改写为:

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2},$$

逐步求得:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} &= \int_0^x \sum_{k=1}^n \cos kt \, dt = -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} dt = \\ &= -\frac{x}{2} + \int_0^x \left[\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin(2n+1)\frac{t}{2} dt + \int_0^x \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{t} dt. \end{aligned}$$

但当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 由第 656 款中的基本预备定理, 上面的等式最后一部分中的第二项趋近于 0^* ; 而作代换 $u = (2n+1)\frac{t}{2}$, 则第三项变换为

$$\int_0^{(2n+1)\frac{x}{2}} \frac{\sin u}{u} du,$$

* 如果令方括弧中的因子当 $t=0$ 时的值为 0, 则它是在这点解析的函数, 因为它在这点邻近, 可以展开成幂级数:

$$\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t} = \frac{1}{12}t + \frac{37}{5760}t^3 + \dots$$

它显然趋近于 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$. 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin kr}{k} = \frac{\pi - r}{2},$$

这就是我们要证明的。

4) 从 2) 中的展开式出发, 不加计算, 可推得其他有趣的展开式。在原展开式中将 x 换成 $2x$, 并用 2 除等式两端, 得:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kr}{2k} \quad (0 < x < \pi),$$

由原展开式减去这个展开式, 得:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \quad (0 < x < \pi).$$

如果用 $S(x)$ 表示上面级数的和, 则 $S(0) = S(\pi) = 0$ 。因为正弦是奇函数, 改变 r 的符号, 可知在区间 $(-\pi, 0)$ 内, $S(x) = -\frac{\pi}{4}$; 对于 x 的其他数值, 和数 $S(x)$ 可由周期规律推出, 因此特别在区间 $(2\pi, 3\pi)$ 内, 又得 $S(x) = \frac{\pi}{4}$, 等等。函数 $S(x)$ 的图解见图 125; 图 126 显示

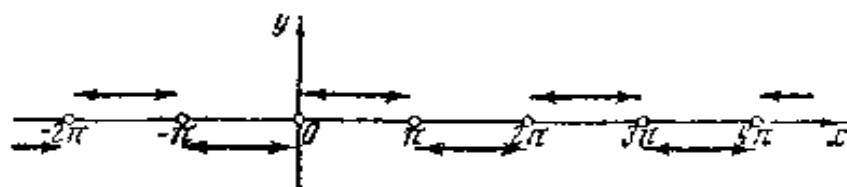


图 125.

由级数的各部分和所表示的、不连续函数的逐步渐近值。

如果在所考虑的展开式中, 令 $r = \frac{\pi}{2}$, 即得我们熟知的莱布尼兹级数[392(16)]

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

当 $x = \frac{\pi}{6}$ 及 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, 得级数

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \dots$$

及

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \dots,$$

合并此处所求得的展开式与 2) 中的展开式, 不难得出关于函数 $f(x) = x$ 的级数:

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi),$$

我們只是对于 $0 < x < \pi$ 直接得出此等式, 但显然这等式对于 $x=0$ 也成立; 此外它的两端显然都是奇函数, 因此最后的展开式对于整个区间 $(-\pi, \pi)$ 正确。

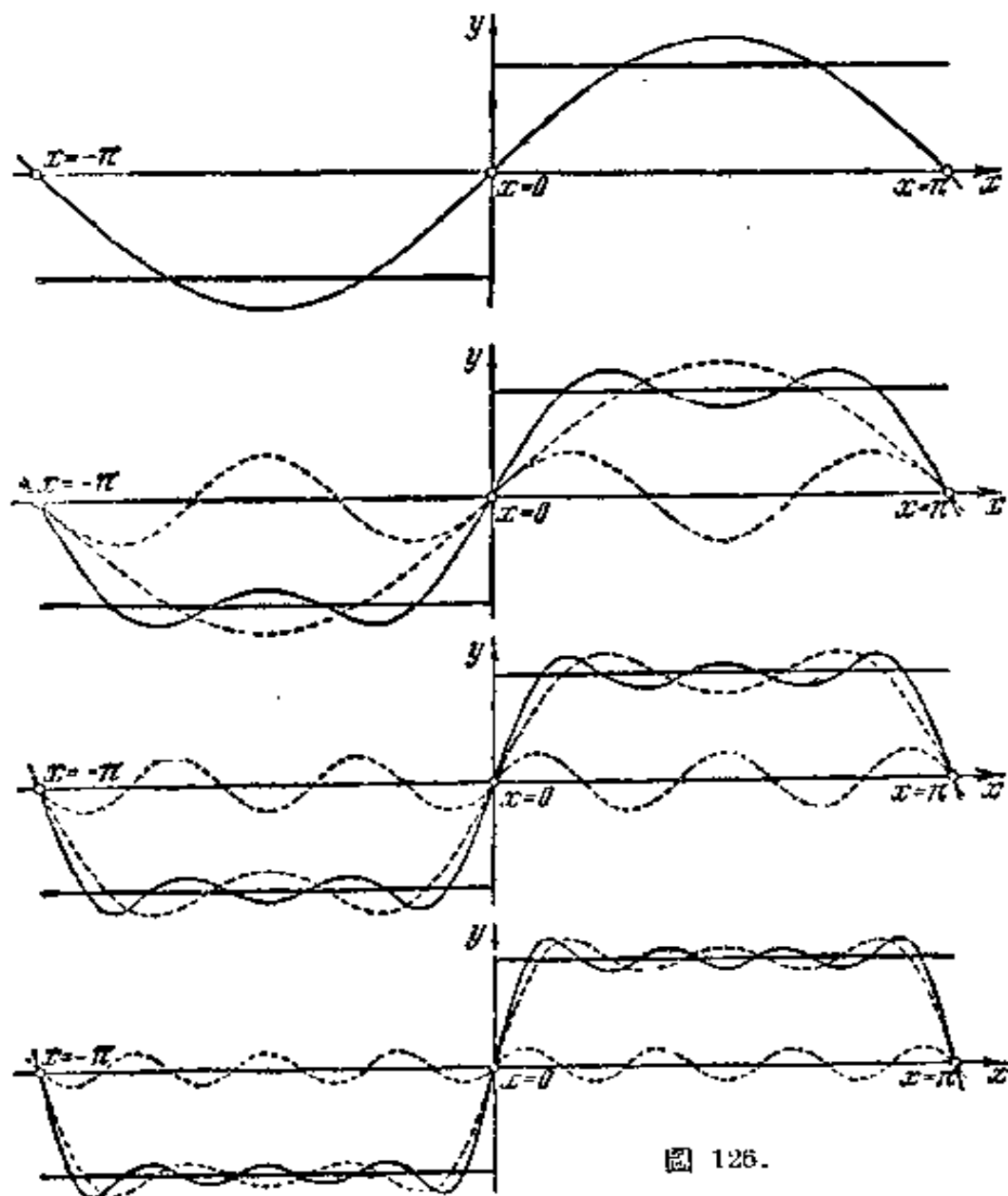


圖 126.

当 x 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时, 級数和的图解不难由图 127 表出。在图 128 上, 描画着部分和

$$y = s_5(x) = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} \right)$$

的图解

5) 依靠 2) 中的展开式, 证明在整个实数轴上

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n} = \begin{cases} x - E(x) & \text{对于非整数 } x, \\ \frac{1}{2} & \text{对于整数 } x. \end{cases}$$

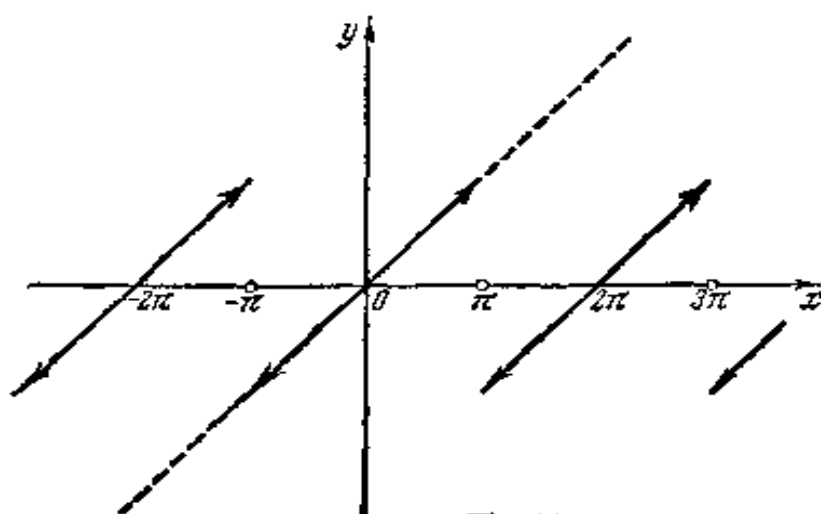


图 127.

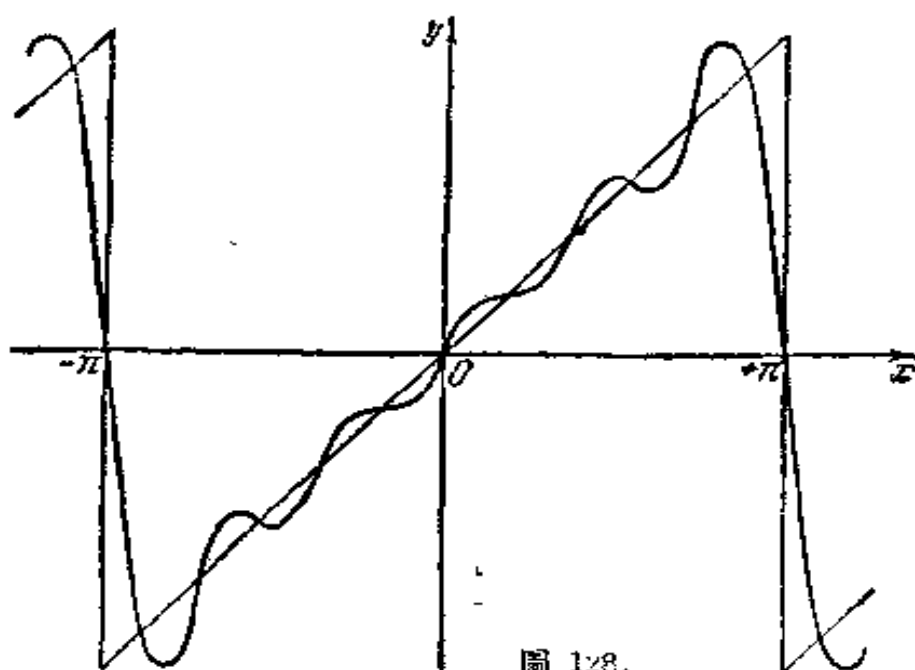


图 128.

6) 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上, 展开(偶)函数 $f(x) = x^2$ 为余弦级数。

由公式(19):

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} x^2 \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx =$$

$$= \frac{4}{\pi n} x \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2} \int_0^{\pi} \cos nx dx = (-1)^n \frac{4}{n^2} \quad (n > 0),$$

因此

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

级数和的图解表示在图 129 上, 它是由无穷个互相联结的抛物线弧所组成的。

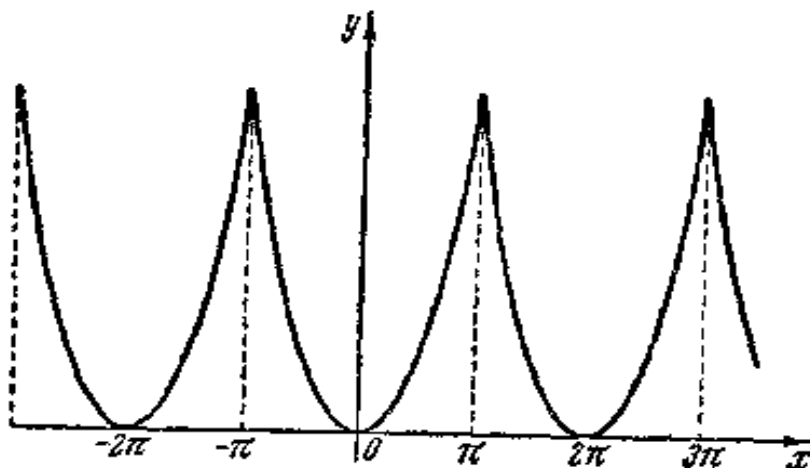


圖 129.

在所得展开式中, 令 $x = \pi$

或 $x = 0$, 则得出熟知的结果:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

此两式中, 任何一式亦可由其

他一式直接推演出来。

7) 将函数:

(a) $f_1(x) = \cos ax$, 在 $[-\pi, \pi]$ 上按余弦展开,

(b) $f_2(x) = \sin ax$, 在 $(-\pi, \pi)$ 内按正弦展开

(这里假定数 a 不是整数)。

(a) 我们有

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \, dx = -\frac{\sin a\pi}{a\pi},$$

$$(n > 0) \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos a \cdot \cos nx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(a+n)x + \cos(a-n)x] \, dx = (-1)^n \frac{2a}{a^2 - n^2} \frac{\sin a\pi}{\pi},$$

因此

$$\frac{\pi}{2} \frac{\cos ax}{\sin a\pi} = \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a \cos nx}{a^2 - n^2} \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

(b) 答

$$\frac{\pi}{2} \frac{\sin ax}{\sin a\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin nx}{a^2 - n^2} \quad (-\pi < x < \pi).$$

顺便注意到当 $x = 0$ 时, 可由 (a) 得:

$$\frac{1}{\sin a\pi} = \frac{1}{a\pi} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\pi}{(a\pi)^2 - (n\pi)^2}.$$

或者令 $\alpha\pi = z$, 则得:

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - (n\pi)^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right]$$

(其中 z 是不为 π 之整倍数的任何数)。由此重新求得函数 $\frac{1}{\sin z}$ 之由简单分数形成的展开式。在(a)中令 $x = \pi$, 便又得到函数 $\cotg z$ 的简单分数形式的展开式[参看 413, 7)]。

非常显著的是: 这几个数学上的重要结果可以简单地从各别的三角展开式推得。

8) 由 1) 中函数 $f(x) = e^{ax}$ 的展开式可以很简单地推得函数:

(a) $f_1(x) = \operatorname{ch} ax$, 在 $[-\pi, \pi]$ 上的余弦展开式。

(b) $f_2(x) = \operatorname{sh} ax$, 在 $(-\pi, \pi)$ 内的正弦展开式, 而且 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 分别是关于 $f(x)$ 的偶的与奇的组成函数[663]。其展开式的形状是:

$$\frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{sh} a\pi} = \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{a^2 + n^2} \cos nx \quad (-\pi \leq x \leq \pi),$$

$$\frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} a\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{a^2 + n^2} \sin nx \quad (-\pi < x < \pi).$$

作为推论, 由此可得函数 $\frac{1}{\operatorname{sh} z}$ 与 $\operatorname{cth} z$ 的简单分数形式的展开式。

现转到从 0 到 π 的区间上所给出的函数之余弦或正弦展开式的例子[663]。

9) 在区间 $[0, \pi]$ 上, 用余弦展开函数 $f(x) = x$ 。

由公式(19):

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} x \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = 2 \frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi} \quad (n > 0),$$

即

$$a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2\pi} \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

所求展开式的形状为:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

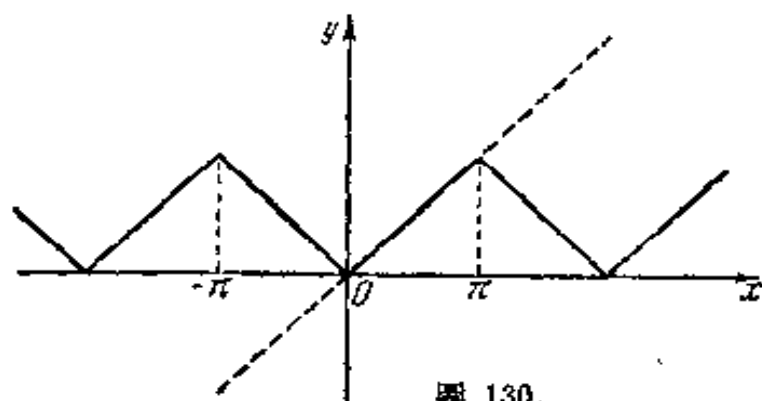


图 130.

级数和的图解表示在图 130 上[比较同一函数在 4) 中的正弦展开式及在图 127 上的图解]。在图 131 上, 描画出近似曲线:

$$y = s_5(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x \right).$$

结合所得结果与在 6) 中函数

x^2 的余弦展开式, 容易得出:

$$\frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

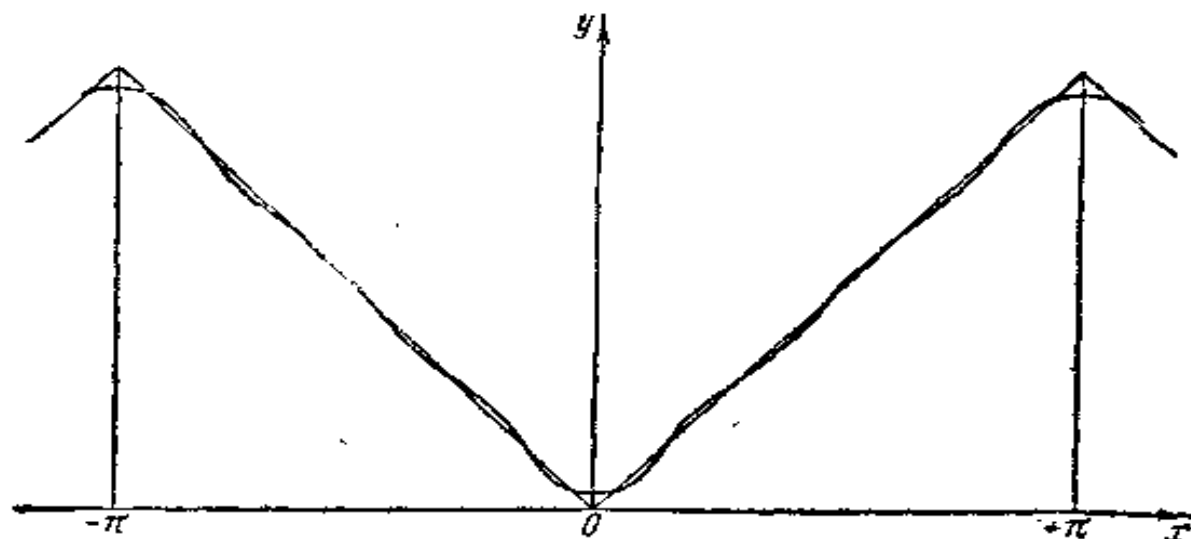


图 131.

然而, 因为将 x 换成 $2\pi - x$ 时, 等式两端的值均不变, 所以事实上等式在较大的区间 $[0, 2\pi]$ 上依然成立。

10) 在区间 $(0, \pi)$ 内, 按正弦展开函数 $f(x) = x^2$ 。

答:

$$x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

其中

$$b_{2k} = -\frac{\pi}{k}, \quad b_{2k-1} = \frac{2\pi}{2k-1} - \frac{8}{\pi(2k-1)^3}.$$

读者应作出级数和的图解, 并且将它与图 129 上的图解相比较。

11) 在以 0 到 π 的区间中, 展开函数 $f(x) = e^{ax}$ 为 (a) 余弦级数 与 (b) 正弦级数。

答

$$(a) e^{ax} = \frac{e^{a\pi} - 1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{a\pi} - 1}{a^2 + n^2} \cos nx \quad (0 \leq x \leq \pi),$$

$$(b) e^{ax} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n e^{a\pi}] \frac{n}{a^2 + n^2} \sin nx \quad (0 < x < \pi).$$

12) 将函数

(a) $f_1(x) = \sin ax$, 在 $[0, \pi]$ 上按余弦展开,

(b) $f_2(x) = \cos ax$, 在 $(0, \pi)$ 内按正弦展开。

(a) 解 首先假定 a 不是整数。则

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin ax \, dx = \frac{1 - \cos a\pi}{\pi},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin ax \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(a+n)x + \sin(a-n)x] \, dx = \\ &= \frac{2a}{\pi} [1 - (-1)^n \cos a\pi] \frac{1}{a^2 - n^2}. \end{aligned}$$

所求展开式可写成下列形式:

$$\begin{aligned} \sin ax &= \frac{1 - \cos a\pi}{\pi} \left\{ 1 + 2a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kr}{a^2 - (2k)^2} \right\} + \\ &+ 2a \frac{1 + \cos a\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)r}{a^2 - (2k-1)^2} \quad (0 \leq x \leq \pi). \end{aligned}$$

现设 a 为整数, 则需要分成偶数 $a = 2m$ 或奇数 $a = 2m-1$ 两种情形。当 $a = 2m$ 时,

$$a_0 = 0, \quad a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = \frac{8m}{\pi} \frac{1}{(2m)^2 - (2k-1)^2},$$

因此

$$\sin 2mx = \frac{8m}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)r}{(2m)^2 - (2k-1)^2}^* \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

同样, 当 $a = 2m-1$ 时,

$$\sin(2m-1)r = \frac{2}{\pi} \left\{ 1 + 2(2m-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kr}{(2m-1)^2 - (2k)^2} \right\}^* \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

* 不难证明, 如果在等式左端将正弦用它的绝对值来代替, 则展开式在整个实数轴上成立。

(6) 提示 应分成与在(a)中一样的各种情形来讨论。

13) 证明关于在 $[0, \pi]$ 上的 x ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^4} = \frac{1}{96} \pi (\pi - 2x) (\pi^2 + 2\pi x - 2x^2).$$

提示 将在上式右端的函数 $f(x)$ 展开为傅立叶级数, 当重复进行分部积分时, 顾及 $f'(0) = f'(\pi) = 0$.

14) 现在考虑广义可积分函数展开式的例子。设要在区间 $(-\pi, \pi)$ 内, 按 余弦 展开偶函数

$$f(x) = \log 2 \cos \frac{x}{2}.$$

函数在区间的两端变为 ∞ , 但依然保持(绝对)可积分性。

由公式(19):

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log 2 \cos \frac{x}{2} dx = \log 2 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos t dt = 0$$

[参考 455, 1°], 而关于 $n > 0$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \log 2 \cos \frac{x}{2} \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \log 2 \cos \frac{x}{2} \cdot \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \\ &+ \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx \cdot \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx = (-1)^{n-1} \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} dx \end{aligned}$$

(将 x 换作 $\pi - x$)。为了要计算最后一个积分, 将被积分函数写为和的形状:

$$\frac{\sin nx \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x} + \frac{\sin \left(n - \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x},$$

根据第 654 款中的恒等式(26), 将上式每一项分别换作和数

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \cos ix \quad \text{或} \quad \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \cos ix.$$

最后,

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

而所求展开式的形状是

$$\log 2 \cos \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi).$$

如果当 $x = \pm\pi$ 时令等式两端的值是 $-\infty$, 则可看作等式在此时也成立。如果在 $\log$ 符号下将余弦用它的绝对值来代替, 则新的等式对于一切实数值 x 皆成立:

在证得的等式中, 用 $\pi - x$ 代替 x , 就得另一有趣的展开式:

$$-\log 2 \sin \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi).$$

关于此公式的推广, 可作与上相同的说明。

最后举几个展开“接速”函数的例子, 这种函数在区间不同的部分上是用不同的分析表示式给出的*。

15) 设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } -\pi < x < 0, \\ x, & \text{如果 } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

展开这函数为完全的傅立叶级数。

由公式(1)有:

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{4},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} x \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi},$$

即

$$a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = -\frac{2}{(2k-1)^2\pi},$$

同样

$$b_n = -\frac{\cos n\pi}{n} = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

展开式为

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \cos x + \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{2}{9\pi} \cos 3x + \\ + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \quad (-\pi < x < \pi).$$

16) 在从 0 到 π 的区间上按余弦展开函数

$$(a) \quad f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{对于 } 0 \leq x \leq h, \\ 0 & \text{对于 } h < x \leq \pi, \end{cases}$$

$$(6) \quad f_2(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2h} & \text{对于 } 0 \leq x \leq 2h, \\ 0 & \text{对于 } 2h < x \leq \pi. \end{cases}$$

* 然而与以上已研究过的例子比较, 此处并没有包含任何新的原则: 实际上, 2) 中的级数和也可看作是由许多线性函数“接速”而得的函数(参考图 124)。

$$(a) \quad \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^h dx = \frac{h}{\pi}, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^h \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{\sin nh}{n},$$

除在点 $x=h$ 外,

$$f_1(x) = \frac{2h}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{nh} \cos nx \right\} \quad (0 \leq x \leq \pi),$$

而在点 $x=h$, 级数和等于 $\frac{1}{2}$ 。

$$(6) \quad \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2h} \left(1 - \frac{x}{2h}\right) dx = \frac{h}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{2h} \left(1 - \frac{x}{2h}\right) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{1 - \cos 2nh}{2n^2 h} = \frac{2}{\pi} \frac{\sin^2 nh}{n^2 h},$$

$$f_2(x) = \frac{2h}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin^2 nh}{nh} \right)^2 \cos nx \right\} \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

17) 求证

$$(a) \quad \cos x - \frac{\cos 5x}{5} + \frac{\cos 7x}{7} - \frac{\cos 11x}{11} + \dots = \begin{cases} \frac{\pi}{2\sqrt{3}} & \text{当 } 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ 时,} \\ \frac{\pi}{4\sqrt{3}} & \text{当 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 时,} \\ 0 & \text{当 } \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ 时,} \\ -\frac{\pi}{4\sqrt{3}} & \text{当 } x = \frac{2\pi}{3} \text{ 时,} \\ -\frac{\pi}{2\sqrt{3}} & \text{当 } \frac{2\pi}{3} < x \leq \pi \text{ 时.} \end{cases}$$

$$(6) \quad \sin x - \frac{\sin 5x}{5^2} + \frac{\sin 7x}{7^2} - \frac{\sin 11x}{11^2} + \dots = \begin{cases} \frac{\pi}{2\sqrt{3}} & \text{当 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ 时,} \\ \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}} & \text{当 } \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ 时,} \\ \frac{\pi}{2\sqrt{3}}(\pi - x) & \text{当 } \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi \text{ 时.} \end{cases}$$

18) 设函数 $f(x)$ 由下列各等式定义:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{关于 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\cos x & \text{关于 } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

按余弦展开这函数。

答:
$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1} \right\}.$$

19) 求证级数和

$$\frac{\pi}{2}(\cos x + \sin x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} [\cos(4k+1)x - \sin(4k+1)x - \cos(4k+3)x - \sin(4k+3)x]$$

当 $m\pi < x < m\pi + \frac{\pi}{2}$ 时等于 $\pi \sin x$, 当 $m\pi + \frac{\pi}{2} < x < (m+1)\pi$ 时等于 $\pi \cos x$, 而当 $x = m\pi$

或 $(m + \frac{1}{2})\pi$ 时等于 $(-1)^m \frac{\pi}{2}$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

20) 以正六边形的边长 a 为半径, 以其(互不相邻的)三顶点为圆心作圆, 圆的外弧构成三叶线(图132)。如果取六边形的中心作为极点, 取通过一圆心的直线作为极轴, 试写出三叶线的极坐标方程式。

提示 $r = f(\theta)$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$), 其中偶函数 $f(\theta)$ 由下列等式定义:

$$f(\theta) = \begin{cases} 2a \cos \theta & \text{关于 } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \\ 2a \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) & \text{关于 } \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

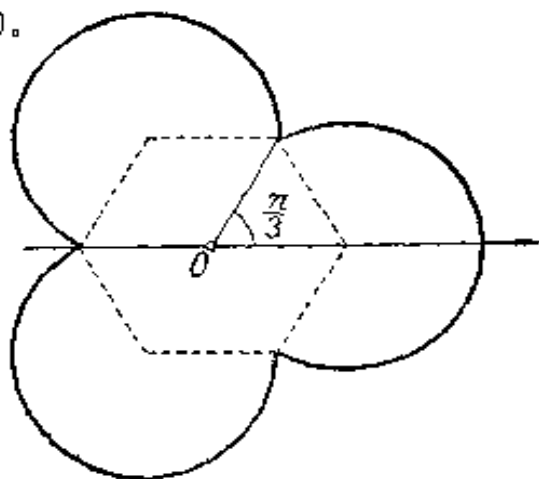


图 132.

按余弦展开此函数。

答

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}a} r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} \cos 3\theta - \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\theta + \frac{1}{8 \cdot 10} \cos 9\theta - \dots \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi).$$

21) 利用已知的展开式, 求证

$$(a) \quad x \sin x = 1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2 - 1} \quad (-\pi \leq x \leq \pi);$$

$$(b) \quad x \cos x = -\frac{1}{2} \sin x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 - 1} \sin nx \quad (-\pi < x < \pi);$$

$$(c) \quad \sin x \log 2 \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{4} \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1} \sin nx \quad (-\pi < x < \pi);$$

$$(1) \cos x \log 2 \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2-1} \cos nx \quad (-\pi < x < \pi).$$

22) 如果在区间 $[0, 2\pi]$ 上所给出的函数 $f(x)$ 适合条件:

$$(a) f(2\pi-x) = f(x) \text{ 或 } (b) f(2\pi-x) = -f(x),$$

则在第一种情形下, 所有的 $b_n = 0$; 在第二种情形下, 所有的 $a_n = 0$.

证明此结果 [或者从公式(1)出发, 或者按周期性开拓而得的函数为偶函数或奇函数来证明].

附注 由此可预见函数 $\frac{\pi-x}{2}$ 与 $\log 2 \sin \frac{x}{2}$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的展开式 [2) 与 14)] 的特性, 因为

$$\frac{\pi - (2\pi - x)}{2} = -\frac{\pi - x}{2},$$

$$\log 2 \sin \frac{2\pi - x}{2} = \log 2 \sin \frac{x}{2}.$$

23) 求证: 如果在区间 $[-\pi, \pi]$ 上函数 $f(x)$ 适合条件:

$$(a) f(x+\pi) = f(x) \text{ 或 } (b) f(x+\pi) = -f(x),$$

则在第一种情形下, $a_{2m-1} = b_{2m-1} = 0$; 在第二种情形下, $a_{2m} = b_{2m} = 0$.

24) 限于在区间 $[0, \pi]$ 上所给出的函数, 求证由条件

(a) $f(\pi-x) = f(x)$ 可导出等式 $a_{2m-1} = 0$ (在余弦展开式中) 或 $b_{2m} = 0$ (在正弦展开式中);

(b) $f(\pi-x) = -f(x)$ 可导出等式 $a_{2m} = 0$ (在余弦展开式中) 或 $b_{2m-1} = 0$ (在正弦展开式中).

附注 基于此点, 可以预见: 在 4) 中函数 $\frac{\pi-x}{4}$ 与 $\frac{\pi}{4}$ 的正弦展开式的特性; 在 12) 中函数 $\sin 2mx$ 与 $\sin(2m-1)x$ 的余弦展开式的特性; 以及在 13), 17) 与 18) 中各展开式的特性.

25) 仿照第 663 款中的推理, 证明在通常的条件下, 能将在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上所给出的函数在这区间上展开为只含偶数或奇数倍 x 的余弦或正弦展开式. 求出系数的公式, 并应用于各例.

26) 设已给函数 $f(x)$ 有周期 2π , 并以 a_m, b_m 为其傅立叶系数. 求用这些系数表示“经过位移的”函数 $f(x+h)$ (h = 常数) 的傅立叶系数 $\bar{a}_m, \bar{b}_m$.

利用在 655 款中关于周期函数积分的说明, 有

$$\begin{aligned}\bar{a}_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+h) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x) dx = a_0, \\ \bar{a}_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+h) \cos mx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x) \cos m(x-h) dx = \\ &= \cos mh \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x) \cos mx dx + \sin mh \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x) \sin mx dx = \\ &= a_m \cos mh + b_m \sin mh.\end{aligned}$$

同样,

$$\bar{b}_m = b_m \cos mh - a_m \sin mh.$$

695. $\log \Gamma(x)$ 的展开式 作为较复杂的例子, 我们按照枯莫尔 (H. B. Kummer) 的方法, 作出函数 $\log \Gamma(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 上的傅立叶级数展开式.

利用在第 662 款中关于在区间 $(0, 2l]$ 上的函数展开式所作的说明 (在现在的情形下, $2l=1$), 求出下列形式的展开式:

$$\log \Gamma(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x),$$

而且可由与第 662 款中公式(17*)相仿的公式求出其系数:

$$\begin{aligned}a_n &= 2 \int_0^1 \log \Gamma(x) \cos 2n\pi x dx, & b_n &= 2 \int_0^1 \log \Gamma(x) \sin 2n\pi x dx, \\ (n=0, 1, 2, \dots) & & (n=1, 2, \dots)\end{aligned}$$

但我们要指出, 系数 a_n 几乎不加计算就可确定出来. 事实上, 对已知的关系式 [493, 3°]

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{2\pi}{2 \sin \pi x}$$

两端取对数, 求得

$$\log \Gamma(x) + \log \Gamma(1-x) = \log 2\pi - \log 2 \sin \pi x.$$

函数 $\log \Gamma(1-x)$ 的傅立叶级数可由函数 $\log \Gamma(x)$ 的傅立叶级数中将 x 换成 $1-x$ 而得. 因此含余弦的各项保持不变, 而含正弦的各项变号. 两级数相加, 得

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 a_n \cos 2n\pi x.$$

另一方面, 如果利用函数 $-\log 2 \sin \frac{x}{2}$ 的已知的展开式 [664, 14)], 但将其中的 x 换成

$2\pi x$, 则不难写出上面等式右端函数的傅立叶级数:

$$\log 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos 2n\pi x.$$

这样立刻可得

$$\frac{1}{2}a_0 = \log \sqrt{2\pi}, \quad a_n = \frac{1}{2n} \quad (n=1, 2, \dots).$$

计算系数 b_n 要复杂得多。从 $\log \Gamma(x)$ 的公式出发[501]

$$\log \Gamma(x) = \int_0^{\infty} \left[(x-1)e^{-z} - \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{1-e^{-z}} \right] \frac{dz}{z},$$

作代换 $e^{-z} = t$, 此式变换为

$$\log \Gamma(x) = \int_0^1 \left[\frac{1-t^{x-1}}{1-t} - x+1 \right] \frac{dt}{\log t}.$$

将此表示式代入 b_n 的公式中, 并且颠倒对 x 及对 t 积分的次序, 得

$$b_n = 2 \int_0^1 \frac{dt}{\log t} \int_0^1 \left[\frac{1-t^{x-1}}{1-t} - x+1 \right] \sin 2n\pi x dx.$$

我们可以改变积分次序的理由如下: 表示式

$$\left[\frac{1-t^{x-1}}{1-t} - x+1 \right] \frac{\sin 2n\pi x}{\log t}$$

作为二元函数, 只是在 $t=0$ 处不连续^{*}。但此表示式对变数 t 的积分对于在区间 $[0, 1]$ 上的 x 一致收敛, 因为

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\frac{t^{x-1}-1}{1-t} - (1-x) \right] \frac{|\sin 2n\pi x|}{|\log t|} dt &< \\ &< \frac{1}{1-\tau} \cdot \frac{1}{|\log \tau|} \cdot \frac{|\sin 2n\pi x|}{x} \tau^x < \frac{1}{1-\tau} \cdot \frac{1}{|\log \tau|} \cdot 2n\pi. \end{aligned}$$

由已知的定理[483], 改变积分次序是可容许的。

现来继续计算。我们有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin 2n\pi x dx &= 0, \quad \int_0^1 x \sin 2n\pi x dx = -\frac{1}{2n\pi}, \\ \int_0^1 t^{x-1} \sin 2n\pi x dx &= \frac{1}{t} \int_0^1 e^{x \log t} \sin 2n\pi x dx = \\ &= \frac{\log t \cdot \sin 2n\pi x - 2n\pi \cos 2n\pi x \cdot e^{x \log t}}{t[\log^2 t + 4n^2\pi^2]} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{(1-t)2n\pi}{t[\log^2 t + 4n^2\pi^2]}. \end{aligned}$$

* 不难验证在 $t=1$ 处, 连续性事实上并未破坏。

于是

$$b_n = 2 \int_0^1 \left[-\frac{2n\pi}{t[\log^2 t + 4n^2\pi^2]} + \frac{1}{2n\pi} \right] \frac{dt}{\log t}.$$

在这里令 $t = e^{-2n\pi u}$, 最后将 b_n 的表示式化成下式:

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^\infty \left[\frac{1}{1+u^2} - e^{-2n\pi u} \right] \frac{du}{u}.$$

特别推得

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{1}{1+u^2} - e^{-2\pi u} \right] \frac{du}{u},$$

由此

$$nb_n - b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (e^{-2\pi u} - e^{-2n\pi u}) \frac{du}{u} = \frac{1}{\pi} \log n,$$

(弗卢拉尼积分, 458)。这样, 确定一切系数的问题化成了确定第一个系数的问题。

回忆欧勒常数的积分表示式[496]

$$C = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+u} - e^{-u} \right) \frac{du}{u},$$

则

$$b_1 = \frac{1}{\pi} C = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+u} \right) \frac{du}{u} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (e^{-u} - e^{-2\pi u}) \frac{du}{u},$$

但第一个积分可以直接计算出来, 它等于零; 第二个积分等于 $\frac{1}{\pi} \log 2\pi$ (又是弗卢拉尼积分)。最后得

$$b_1 = \frac{1}{\pi} (C + \log 2\pi).$$

从而得

$$b_n = \frac{1}{n\pi} (C + \log 2n\pi).$$

所求展开式的形状是

$$\log \Gamma(x) = \log \sqrt{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \cos 2n\pi x + \frac{1}{n\pi} (C + \log 2n\pi) \sin 2n\pi x$$

$$(0 < x < 1).$$

§ 3. 补充

666. 系数递减的级数 直到此时为止, 我們是从预先给定的函数出发, 将它展为傅立叶级数, 而应用到确定可展开函数为傅立叶级数的

充分条件。在少数简单的情形下，反过来可证明已给的三角级数收敛于某一绝对可积分函数，并且是这函数的傅立叶级数。我們在这里叙述楊格(W. H. Young)的有关研究。

我們將討論下列形状的级数：

$$(C) \frac{1}{2}q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_{\nu} \cos \nu x, \quad (S) \sum_{\nu=1}^{\infty} q_{\nu} \sin \nu x,$$

而且恒假定系数 q_{ν} 是正数，并且单调减趋近于零。如我們所知[参考第 403 款末]，在任一不含点 $2k\pi (k=0, \pm 1, \dots)$ 的闭区间上，两级数均一致收敛。用 $f(x)$ 表示级数(C)的和，用 $g(x)$ 表示级数(S)的和；两函数都有周期 2π ，并且除去形如 $2k\pi$ 的各点外，处处連續。在这些例外点，级数(C)可能发散*。因为函数 f 是偶的， g 是奇的，因此只須在区间 $[0, \pi]$ 上进行討論。

1° 如果函数 f (或 g) 绝对可积分，則级数(C)[或(S)]是它的傅立叶级数**。

(a) 用 $\sin mx (m=1, 2, 3, \dots)$ 乘函数 g 的展开式：

$$g(x) \sin mx = \sum_{\nu=1}^{\infty} q_{\nu} \sin \nu x \cdot \sin mx,$$

即得在区间 $[0, \pi]$ 上一致收敛的级数。事实上，因为

$$\sum_{\nu=1}^n \sin \nu x = \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

* 如果级数 $\sum_1^{\infty} q_{\nu}$ 收敛，則级数(C)及(S)一致收敛于两連續函数，而两级数就是这两

連續函数的傅立叶级数[652]。下文只在级数 $\sum_1^{\infty} q_{\nu}$ 发散时有意义。

** 这定理是一个很难证明的一般定理[参考 733, 734]的特殊情形，在这里我們宁可就所考虑的简单类型的级数来解决这个问题。

則
$$\left| \sum_{v=1}^n \sin vx \sin mx \right| \leq \frac{|\sin mx|}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{mx}{\frac{x}{\pi}} = m\pi,$$

然后在这里应用第里希莱判别法[403]。[我們在这里应用初等不等式

$$|\sin z| \leq z \quad (z \geq 0), \quad \sin z > \frac{2}{\pi}z, \quad \left(0 < z \leq \frac{\pi}{2}\right). \quad]$$

在这种情形下, 可将级数从 0 到 π 逐项积分, 求得

$$q_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin mx \, dx.$$

(6) 轉到討論函数 f , 用 $1 - \cos mx$ 乘它的展开式:

$$f(x)(1 - \cos mx) = \frac{1}{2}q_0(1 - \cos mx) + \sum_{v=1}^{\infty} q_v \cos vx(1 - \cos mx).$$

由第里希莱判别法, 这级数同样在区間 $[0, \pi]$ 上一致收敛。要想证明此点, 只須注意

$$\frac{1}{2} + \sum_{v=1}^n \cos vx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x}, \quad (1)$$

因此

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}(1 - \cos mx) + \sum_{v=1}^n \cos vx(1 - \cos mx) \right| &\leq \frac{1 - \cos mx}{2 \sin \frac{1}{2}x} \\ &\leq \frac{\frac{1}{2}m^2x^2}{\frac{2x}{\pi}} = \frac{1}{4}m^2 \pi x \leq \frac{1}{4}m^2 \pi^2. \end{aligned}$$

$$\left[\text{应用不等式: } 1 - \cos z < \frac{1}{2}z^2. \right]$$

逐项从 0 到 π 积分, 得

$$q_0 - q_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos mx \, dx, \\ (m=1, 2, 3, \dots)$$

在这里取 $m \rightarrow +\infty$ 时的极限。由假设, $q_m \rightarrow 0$, 又由第 656 款中的基本预备定理, 上式最后一个积分也趋近于零。这样, 首先得

$$q_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$$

然后普遍地求得

$$q_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos mx dx,$$

至此证明完毕。

2° 如果级数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q_{\nu}}{\nu} = Q \quad (2)$$

收敛, 则两级数 (C) 及 (S) 各确定一个绝对可积分的函数 (并且因此是这两函数的傅立叶级数)。

因为讨论上两级数的方式相同, 所以我们只限于讨论级数 (C)。令

$$Q_n = \frac{1}{2} q_0 + q_1 + \cdots + q_n,$$

我们逐步求得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n}{n(n+1)} &= \frac{1}{2} q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{\nu=1}^n q_{\nu} = \\ &= \frac{1}{2} q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_{\nu} \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q_{\nu}}{\nu} = \frac{1}{2} q_0 + Q; \end{aligned} \quad (3)$$

在这里, 我们交换了两个求和步骤的次序 [381] 并且利用了显而易见的等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \text{ 以及一般的 } \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{\nu}$$

[参考 354, 4)]。

現設

$$\frac{\pi}{n+1} \leq x \leq \frac{\pi}{n}.$$

对于 x 的这些值, $f(x)$ 表示如下式:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} q_0 + \sum_{\nu=1}^n q_\nu \cos \nu x \right) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} q_\nu \cos \nu x.$$

第一个和式的绝对值按 Q_n 来估值。为了估值第二个和式, 将亚培尔预备定理[371]应用到表示式

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+\mu} q_\nu \cos \nu x.$$

因为

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{n+\mu} \cos \nu x \right| = \left| \frac{\sin \left(n + \mu + \frac{1}{2} \right) x - \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{1}{2} x} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2} x},$$

則

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{n+\mu} q_\nu \cos \nu x \right| \leq \frac{q_{n+1}}{\sin \frac{1}{2} x} < \frac{\pi}{x} q_{n+1} < \frac{\pi}{x} q_n < (n+1) q_n.$$

在趋近于极限时, 第二个和式的同一估值保持有效, 故最后得

$$|f(x)| \leq Q_n + (n+1) q_n \quad \left(\frac{\pi}{n+1} \leq x \leq \frac{\pi}{n} \right).$$

在这种情形下[参考(3)及(2)],

$$\begin{aligned} \int_0^\pi |f(x)| dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} |f(x)| dx \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n(n+1)} [Q_n + (n+1) q_n] = \pi \left(\frac{1}{2} q_0 + 2Q \right), \end{aligned}$$

因此函数 $f(x)$ 确是绝对可积分。只須应用 1° 就可完成这定理的证明
了。

我們以后可以看到[706], 級数(2)的收敛性同时是級数(S)为傅
立叶級数的必要条件, 因此对于級数(S)所得的結果, 不能再加改善。
而級数(C)的情况則不相同: 这里所提到的条件决不是必要条件。对
于这种情形, 我們还要举出上面沒有包括的另一充分条件。

3° 如果差数 $\Delta q_\nu = q_\nu - q_{\nu+1}$ 随着 ν 增大而单调减小, 則函数 $f(x)$
是非負的并且是可积分的[級数(C)是它的傅立叶級数]。

对部分和

$$C_n(x) = \frac{1}{2}q_0 + \sum_{\nu=1}^n q_\nu \cos \nu x \quad (x > 0)$$

作亚培尔变换[371]。考虑到(1), 求得

$$C_n(x) = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}x} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta q_\nu \cdot \sin \left(\nu + \frac{1}{2} \right) x + q_n \cdot \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right\}.$$

再对所得和式作亚培尔变换。如果为简单起见, 令 $\Delta q_\nu - \Delta q_{\nu+1} = \Delta^2 q_\nu$,
并考虑到

$$\sum_{\nu=0}^m \sin \left(\nu + \frac{1}{2} \right) x = \frac{1 - \cos(m+1)x}{2 \sin \frac{1}{2}x},$$

則 $C_n(x)$ 化成下列形式:

$$\begin{aligned} C_n(x) = & \frac{1}{4 \sin^2 \frac{1}{2}x} \sum_{\nu=0}^{n-2} \Delta^2 q_\nu \cdot (1 - \cos \nu + 1)x) + \\ & + \Delta q_{n-1} \cdot \frac{1 - \cos nx}{4 \sin^2 \frac{1}{2}x} + q_n \cdot \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{1}{2}x}. \end{aligned}$$

因为当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 上式最后两项趋近于零, 所以在取极限时, 即得用非負的連續函数所作成的 $f(x)$ 的展开式:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2 q_{\nu} \cdot \frac{1 - \cos(\nu+1)x}{4 \sin^2 \frac{1}{2}x}$$

(由假定, 系数 $\Delta^2 q_{\nu}$ 是非負的)。由此可見, 函数 $f(x)$ 也是非負的。

为了证明这函数的可积分性, 我們利用第 480 款中的推論, 以及将该推論換述为級数情形所作的說明。只要下面的級数收敛, 則可写出

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2 q_{\nu} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(\nu+1)x}{4 \sin^2 \frac{1}{2}x} dx.$$

因为

$$\frac{1 - \cos(\nu+1)x}{4 \sin^2 \frac{1}{2}x} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{\sin\left(\mu + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{\lambda=1}^{\mu} \cos \lambda x \right\},$$

則直接可得

$$\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(\nu+1)x}{4 \sin^2 \frac{1}{2}x} dx = \frac{\pi}{2}(\nu+1)$$

[参考 297, 5)(6)], 因此

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) \Delta^2 q_{\nu}.$$

现在还只須证实上式右端的級数收敛。

在 365, 2) 中, 我們已經看到如果有单調減的正項級数

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \tag{4}$$

收敛, 則条件

$$\nu a_{\nu} \rightarrow 0$$

必須成立。由此還可知，級數

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)(a_{\nu}-a_{\nu+1}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\Delta a_{\nu}$$

收斂且與級數(4)有相同的和數：此點可由恒等式

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} (\nu+1)(a_{\nu}-a_{\nu+1}) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{\nu} - na_n$$

看出。現在如果取 $a_{\nu} = \Delta q_{\nu}$ ，則有

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\Delta^2 q_{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta q_{\nu} = q_0,$$

最後得

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{\pi}{2} q_0$$

定理便已得證。

例如，級數

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\log n}$$

適合於這定理中的條件；這個例子所以值得注意是由於對於它不能應用定理 2°，因為級數

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

發散[358, 6°]。

附注 如果在級數(C)與(S)中，將變數 x 換成 $x+\pi$ ，則得係數變號而其絕對值減的級數。對於這類級數，已證明的各定理還是保持有效。

667. 三角級數借助於變數解析函數的求和法 在許多情形下，當研究形如(C)或(S)的級數之係數時，能證明這些級數收斂(可能除去若干個別的點)，且為其和的傅立葉級數(可參考前款)，但在所有這

些情形下,自然要产生下一问题:怎样求出这些级数的和?或者更正确地說,如果级数的和一般地可用初等函数表示为有限的形状,则怎样将它们表示成为这种形状呢?早在欧勒(与拉格朗日)就已成功地应用了复变数解析函数求出三角级数的有限形和。欧勒方法的思想将叙述如下。

設对于某一組系数 $\{q_n\}$,两级数(C)与(S)在区間 $[0, 2\pi]$ 上(可能除去若干个别的点)处处收敛于函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 。現考虑具有同样系数,且用复变数 z 所作成的幂级数:

$$\frac{1}{2}q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n. \quad (5)$$

由假设,在单位圆的圆周 $|z|=1$ 上,即当 $z=e^{ix}$ 时,除在若干个别的点外,这级数收敛:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n e^{inx} &= \frac{1}{2}q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n (\cos nx + i \sin nx) = \\ &= f(x) + ig(x). \end{aligned} \quad (6)$$

在这种情形下,由熟知的幂级数的性质,当 $|z|<1$ 时,即在单位圆内,级数(5)显然收敛,且在那里定出某一复变数函数 $\varphi(z)$ 。利用已知的初等复变数函数的展开式[参考第十二章, §5],我們常常能将 $\varphi(z)$ 化为这些函数。于是对于 $z=re^{ix}(r<1)$,就有

$$\frac{1}{2}q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n r^n e^{inx} = \varphi(re^{ix}),$$

又由亚培尔定理[429],只要级数(6)收敛,它的和可以作为极限

$$f(x) + ig(x) = \lim_{r \rightarrow 1} \varphi(re^{ix}) \quad (7)$$

而求得。通常这极限就等于 $\varphi(e^{ix})$,由此可以计算出函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的有限形状。

例如, 設給出級數

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu x}{\nu} \quad \text{及} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu}.$$

由前款中所证明的断語可得結論: 这两級数收敛(第一个級数除去在点 0 与 2π 外), 并且是它們所定出的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的傅立叶級数。可是这些函数究竟是什么呢? 要回答这問題, 作出級数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu}.$$

由于这級数与对数級数[431]相似, 不难求得其和为

$$\varphi(z) = -\log(1-z) = \log \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1),$$

因此

$$f(x) + ig(x) = \log \frac{1}{1-e^{ix}} \quad (x \neq 0, 2\pi).$$

由簡單的計算, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-e^{ix}} &= \frac{1}{(1-\cos x) - i \sin x} = \frac{1}{2} + i \frac{\sin x}{2(1-\cos x)} = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \right], \end{aligned}$$

所以这表示式的模数是 $\frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}}$, 而幅角是 $\frac{\pi-x}{2}$ 。故

$$\log \frac{1}{1-e^{ix}} = -\log 2 \sin \frac{x}{2} + i \frac{\pi-x}{2},$$

因此, 最后求得

$$f(x) = -\log 2 \sin \frac{x}{2}, \quad g(x) = \frac{\pi-x}{2} \quad (0 < x < 2\pi).$$

我們已經知道了这些結果[664, 14)与2)], 并且过去有一次也是用“复数的”推理求得的[434, 6)(6)]; 但以往我們是从函数 f 与 g 出发的, 而現在是从解析函数 φ 出发的。在这里两个級数本身是我們討論的起点。讀者可以在下款中找到另一些类似的例子。

再次強調指出: 必須預先确知, 級数(C)及(S)收斂, 我們才能够应用极限等式(7)来确定級数的和。但由等式右端极限存在, 还不能断定两級数收斂。为了要用例子說明此点, 考虑对于 $0 < x < 2\pi$ 显然发散的級数

$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \cos \nu x \text{ 与 } \sum_{\nu=1}^{\infty} \sin \nu x.$$

但是如果作出与它們相对应的級数

$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2},$$

則当点 $z = re^{ix}$ 沿着单位圓的半徑趋近于圓周上的点 e^{ix} 时, 这級数的和有完全确定的极限

$$\frac{1}{1-e^{ix}} - \frac{1}{2} = i \frac{\sin x}{2(1-\cos x)} \quad (0 < x < 2\pi).$$

如果預先不能断定級数(C)与(S)收斂, 則等式(7)只能看作一种导入法: 先由这等式求得函数 f 与 g , 然后計算它們的傅立叶系数, 只有当这些系数与已知級数的系数一致时, 才可应用我們所已知的傅立叶級数收斂性判別法。

668. 例 在下面所有各题中, 請讀者证明所設級数的收斂性。

1) 求下列各級数的和:

$$(a) 1 + \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{\cos nx}{1 \cdot 2 \cdots n} + \cdots$$

$$(6) \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{\sin nx}{1 \cdot 2 \cdots n} + \cdots$$

解 这里

$$\varphi(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu!} = e^z, *$$

所以

$$\varphi(e^{ix}) = e^{\cos x + i \sin x} = e^{\cos x} [\cos(\sin x) + i \sin(\sin x)].$$

由此得

$$(a) f(x) = e^{\cos x} \cos(\sin x), \quad g(x) = e^{\cos x} \sin(\sin x).$$

2) 求下列级数的和:

$$(a) \frac{\cos x}{1!} - \frac{\cos 3x}{3!} + \frac{\cos 5x}{5!} - \dots, \quad (b) \frac{\sin x}{1!} - \frac{\sin 3x}{3!} + \frac{\sin 5x}{5!} - \dots,$$

$$(c) 1 - \frac{\cos 2x}{2!} + \frac{\cos 4x}{4!} - \dots, \quad (r) \frac{\sin 2x}{2!} - \frac{\sin 4x}{4!} + \frac{\sin 6x}{6!} - \dots.$$

提示 在情形(a), (b)下, 函数 $\varphi(z)$ 等于

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots,$$

在情形(c), (r)下, 它等于

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots.$$

利用将复变数的正弦及余弦分解为实虚两部分的展开式[432]:

$$\sin(\alpha + \beta i) = \sin \alpha \operatorname{ch} \beta + i \cos \alpha \operatorname{sh} \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta i) = \cos \alpha \operatorname{ch} \beta - i \sin \alpha \operatorname{sh} \beta.$$

答:

$$(a) \sin(\cos x) \operatorname{ch}(\sin x), \quad (b) \cos(\cos x) \operatorname{sh}(\sin x),$$

$$(c) \cos(\cos x) \operatorname{ch}(\sin x), \quad (r) \sin(\cos x) \operatorname{sh}(\sin x).$$

3) 求下列级数的和:

$$(a) 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n(n+1)}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)},$$

$$(c) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2-1}, \quad (r) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^2-1},$$

$$(d) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2-1} \cos nx, \quad (e) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2-1} \sin nx,$$

$$(ж) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{(n+1)(n+2)}, \quad (з) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{(n+1)(n+2)}.$$

* 我們保持上款中的記号。

(a), (6). 解 与这两情形相对应的级数

$$\varphi(z) = 1 + \frac{z}{1 \cdot 2} - \frac{z^2}{2 \cdot 3} + \frac{z^3}{3 \cdot 4} - \dots$$

不能直接求出已知的初等函数, 但是如果利用显明的等式

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

将级数变换如下:

$$1 + \left\{ z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \right\} + \left\{ -\frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \dots \right\},$$

则由对数级数[431]不难求得

$$\varphi(z) = 1 + \log(1+z) + \frac{1}{z} [\log(1+z) - z] = \left(1 + \frac{1}{z}\right) \log(1+z).$$

现在在这里代入 $z = e^{ix} = \cos x + i \sin x$. 即有

$$1+z = (1+\cos x) + i \sin x = 2 \cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2} \right),$$

因此(对于 $0 < x < \pi$) 这表示式的模数是 $2 \cos \frac{x}{2}$, 其幅角是 $\frac{x}{2}$, 并且

$$\log(1+z) = \log 2 \cos \frac{x}{2} + i \frac{x}{2}.$$

最后得

$$\varphi(e^{ix}) = [(1+\cos x) - i \sin x] \cdot \left[\log 2 \cos \frac{x}{2} + i \frac{x}{2} \right].$$

由此对于 $-\pi < x < \pi$,

$$f(x) = (1+\cos x) \log 2 \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} x \sin x,$$

$$g(x) = \frac{1}{2} x (1+\cos x) - \sin x \log 2 \cos \frac{x}{2}.$$

(B) — (A) 提示 在所有各情形下, 利用对应的等式

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right), \quad \frac{n}{n^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} \right),$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

就不难化为对数级数的问题。

$$\text{答:} \quad (\kappa) \quad (\cos x + \cos 2x) \log 2 \cos \frac{x}{2} + \frac{x}{2} (\sin x + \sin 2x) - \cos x,$$

$$(\delta) \quad (\sin x + \sin 2x) \log 2 \cos \frac{x}{2} - \frac{x}{2} (\cos x + \cos 2x) - \sin x.$$

[关于(B) — (e)参考 664, 21).]

4) 求下一級数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)x}{n}.$$

提示 $\varphi(z) = \frac{1}{z} \log(1+z^2).$

答: 限制在区间 $0 \leq x \leq \pi$ 上, 有

$$f(x) = \begin{cases} \cos x \log 2 \cos x + x \sin x & \text{对于 } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x \log 2 |\cos x| + (x - \pi) \sin x & \text{对于 } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

5) 求下列級数的和:

$$(a) \frac{\cos 2x}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 3x}{2 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 4} + \dots,$$

$$(b) \frac{\cos 2x}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\cos 3x}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots.$$

提示 利用

$$\frac{1}{(n-1)n} \text{ 及 } \frac{1}{(n-1)n(n+1)}$$

的“简单分数”展开式, 则化为 $\log \frac{1}{1-z}$ 的问题。

答: 在两种情形下, 关于 $0 < x < 2\pi$,

$$(a) (1 - \cos x) \log 2 \sin \frac{x}{2} - \frac{\pi - x}{2} \sin x + \cos x,$$

$$(b) (1 - \cos x) \log 2 \sin \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \cos x - \frac{1}{2}.$$

6) 求下列級数的和:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1},$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)2n}.$$

(a), (b), 解 作出級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1},$$

于其中可看出反正切函数

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \log \frac{1+zi}{1-zi}$$

的展开式; 除去 $z = \pm i$ 外, 这展开式关于 $|z| \leq 1$ 成立[432]。

在这里令 $z = e^{ix}$, 并且限于区间 $0 \leq x \leq \pi$, 但除去点 $x = \frac{\pi}{2}$ 。则有

$$\frac{1+zi}{1-zi} = i \frac{\cos x}{1+\sin x} = i \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right),$$

因此这表示式的模数为 $\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right|$, 其辐角为 $+\frac{\pi}{2}$ 或 $-\frac{\pi}{2}$, 依 $x < \frac{\pi}{2}$ 或 $x > \frac{\pi}{2}$ 而定。所以

$$\log \frac{1+zi}{1-zi} = \log \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \right| \pm \frac{\pi}{2}i,$$

并且

$$\operatorname{arctg} z = \pm \frac{\pi}{4} + i \cdot \frac{1}{2} \log \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \right|.$$

这样,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{关于 } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{4} & \text{关于 } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \end{cases}$$

且关于这些 x 的值,

$$g(x) = \frac{1}{2} \log \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \right| = \frac{1}{4} \log \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

(B) 提示 合并刚才所得的结果及习题 4) 中的结果, 求得

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\cos x \log 2 \cos x + x \sin x) & \text{关于 } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\cos x \log 2 |\cos x| + (x - \pi) \sin x) & \text{关于 } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

7) 求下列级数的和:

$$(a) \cos x + \frac{1}{2} \frac{\cos 3x}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\cos 5x}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\cos 7x}{7} + \dots;$$

$$(b) \sin x + \frac{1}{2} \frac{\sin 3x}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\sin 5x}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\sin 7x}{7} + \dots;$$

$$(c) \frac{\cos x}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2} \frac{\cos 3x}{3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\cos 5x}{5 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\cos 7x}{7 \cdot 8} + \dots;$$

$$(d) \frac{\sin x}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2} \frac{\sin 3x}{3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\sin 5x}{5 \cdot 6} + \dots$$

解 关于情形 (a) 及 (b)

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{z^{2n-1}}{2n-1} = \arcsin z$$

[432]。其次, 关于 $0 \leq x \leq \pi$,

$$\arcsin e^{ix} = \arcsin \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} + i \log(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{\sin x}).$$

知道了表示式右端的正弦实际上等于 e^{ix} , 则易于验证此点。又由方程

$$\sin u \operatorname{ch} v = \cos x, \quad \cos u \operatorname{sh} v = \sin x$$

求得 u, v , 就不难推出上面的表示式。这样,

$$f(x) = \arcsin \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}}, \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

$$g(x) = \log(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{\sin x})$$

关于情形 (B) 及 (C), 得级数

$$\begin{aligned} \frac{z}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2} \frac{z^3}{3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{z^5}{5 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{z^7}{7 \cdot 8} + \dots = \left\{ z + \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{z^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{z^7}{7} + \dots \right\} - \\ - \frac{1}{z} \left\{ \frac{1}{2} z^2 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} z^4 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} z^6 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} z^8 + \dots \right\} = \arcsin z + \frac{1}{z} (\sqrt{1 - z^2} - 1) \end{aligned}$$

[433]。因此关于 $0 \leq x \leq \pi$,

$$f(x) = \arcsin \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}} + \sqrt{2 \sin x} \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \cos x,$$

$$g(x) = \log(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{\sin x}) - \sqrt{2 \sin x} \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \sin x.$$

669. 傅立叶级数的复数形式 重新考虑以 2π 为周期且在任一有限区间上绝对可积分的任意函数 $f(x)$, 并考虑与这函数相对应的傅立叶级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx. \quad (8)$$

级数的系数由下列公式确定:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos mu \, du, \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin mu \, du. \quad (9)$$

($m=0, 1, 2, \dots$) ($m=1, 2, \dots$)

现在如果将 $\cos mx$ 与 $\sin mx$ 用纯虚变数的指数函数表示式来代替 [430]:

$$\cos mx = \frac{1}{2} (e^{mx i} + e^{-mx i}),$$

$$\sin mx = \frac{1}{2i} (e^{mx i} - e^{-mx i}) = \frac{i}{2} (e^{-mx i} - e^{mx i}),$$

則得級数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_m - b_m i) e^{mx i} + \frac{1}{2} (a_m + b_m i) e^{-mx i}.$$

此式可简单地写成:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{kx i}, \quad (10)$$

其中

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_m = \frac{1}{2} (a_m - b_m i), \quad c_{-m} = \frac{1}{2} (a_m + b_m i), \quad (11)$$

(m=1, 2, 3, ...)

因此

$$c_{-m} = \bar{c}_m^*. \quad (12)$$

上一表示式是函数 $f(x)$ 的傅立叶级数的复数形式。

如果级数(8)收敛于函数 $f(x)$ 的充分条件成立, 则级数(10)也收敛于同一和数, 不过只要(由求得级数的方法可知)将求和的手续了解为求对称的部分和

$$\sum_{m=-n}^n c_m e^{mx i}$$

在 $n \rightarrow +\infty$ 时的极限。然而如果级数

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{mx i} \quad \text{及} \quad \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} e^{-mx i}$$

分别收敛, 则上面所说的极限可由这两级数的和相加而得。

如果考虑到欧勒-傅立叶公式(9), 则由公式(11)所确定的展开式(10)的系数 c_m 可一律写成:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-nu i} du, \quad (13)$$

(n=0, ±1, ±2, ...)

* 請回忆: 如果 z 是复数, 则符号 $\bar{z}$ 表示与它相共轭的复数。

如果設函数 $f(x)$ 能展开为級数(10)(因此能用 $=$ 代替 $\sim$), 我們用 e^{-nxi} 乘等式的两端, 再从 $-\pi$ 积分到 π , 并在等式的右端逐項积分, 則也可直接求得这些系数, 而与系数 a_m 及 b_m 相似[652]。

如果有复函数

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x),$$

其中 f_1 及 f_2 为属于所考虑类型的实函数, 則函数 f 的傅立叶級数很自然地称为函数 f_1 与 f_2 的傅立叶級数的形式和, 而預先須用 i 乘 f_2 的傅立叶級数的各項。在复数形式下, 函数 f 的傅立叶級数有(10)的形状, 其中系数 c_n 和剛才一样, 可用公式(13)表示出来。[但在一般的情形下, 当然不能肯定系数 c_m 与 c_{-m} 的共軛性。]

有时很自然就直接得到函数的傅立叶級数展开式的复数形式。作为一例, 回忆貝塞尔函数的母函数及其展开式[383, 6];

$$e^{\frac{\alpha}{2}(z - z^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\alpha) z^n.$$

不难看出, 这展开式对于不等于零的一切复值 z 皆成立。在这里, 令 $z = e^{ix}$, 則得

$$e^{\alpha i \sin x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\alpha) e^{nxi}, \quad (14)$$

复函数

$$e^{\alpha i \sin x} = \cos(\alpha \sin x) + i \sin(\alpha \sin x) \quad (15)$$

已被展开为(10)型的級数, 此級数对于 x 一致收敛* (由于幂級数的性质), 并且因此显然为此复函数的傅立叶級数。

回忆

$$J_{-m}(\alpha) = (-1)^m J_m(\alpha)$$

[383, 6)], 将求得的展开式改写为下列形式:

$$\begin{aligned} J_0(\alpha) + \sum_{m=1}^{\infty} J_m(\alpha) [e^{mxi} + (-1)^m e^{-mxi}] &= \\ &= J_0(\alpha) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\alpha) \cos 2kx + 2i \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(\alpha) \sin(2k-1)x. \end{aligned} \quad (16)$$

* 我們分別考察兩級数 $\sum_{n=0}^{\infty}$ 与 $\sum_{n=-1}^{-\infty}$ 。

分别比较表示式(15)及(16)的实数与虚数部分, 即得有趣的展开式:

$$\cos(a \sin x) = J_0(a) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(a) \cos 2kx,$$

$$\sin(a \sin x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(a) \sin(2k-1)x.$$

在此处将 x 换成 $x + \frac{\pi}{2}$, 还能得到另外两个展开式:

$$\cos(a \cos x) = J_0(a) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(a) \cos 2kx,$$

$$\sin(a \cos x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} J_{2k-1}(a) \cos(2k-1)x,$$

最后, 如果应用公式(13)来计算展开式(14)的系数, 则得熟知的贝塞尔函数的积分表示式:

$$J_n(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(a \sin x - nx)i} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(a \sin x - nx) dx,$$

这公式我们曾经遇到过好几次了。

670. 共轭级数 具有任意实系数的三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx \quad (17)$$

可以在形式上*当作复变数 z 的幂级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m - b_m i) z^m \quad (18)$$

在 $z = e^{ix}$ 时的实数部分。事实上, 这时

$$z^m = e^{mxi} = \cos mx + i \sin mx$$

并且

$$(a_m - b_m i) z^m = (a_m \cos mx + b_m \sin mx) + i(-b_m \cos mx + a_m \sin mx).$$

* 因为我们不知道这级数是否收敛, 所以这里只能说在形式上。

級数的虚数部分也可在形式上表示为級数

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-b_m \cos mx + a_m \sin mx). \quad (19)$$

級数(19)称为与級数(17)共轭。

与某一(以 2π 为周期并且绝对可积分的)函数 $f(x)$ 的傅立叶級数相共轭的級数值得特别注意。与傅立叶級数(17)本身收敛性问题相平行, 特别能提出共轭級数的收敛性的问题。但是在这种情形下, 由于事先不能自然地预料到共轭級数的和是什么, 所以产生了额外的困难。

与在第 655 款中一样, 我們开始先作出在 $x=x_0$ 处級数(19)的部分和 $\tilde{s}_n(x_0)$ 的适当表示式。将系数 $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots$ 用它们的积分表示式来代替[参考(9)], 则逐步求得:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_n(x_0) &= \sum_{m=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) [-\sin mu \cos mx_0 + \cos mu \sin mx_0] du = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sum_{m=1}^n \sin m(u-x_0) du. \end{aligned}$$

如果用公式

$$\sum_{m=1}^n \sin mt = \frac{\cos \frac{1}{2}t - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t}$$

变换积分号下的和式, 则 $\tilde{s}_n(x_0)$ 的表示式取得下列形式:

$$\tilde{s}_n(x_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\cos \frac{1}{2}(u-x_0) - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)(u-x_0)}{\sin \frac{1}{2}(u-x_0)} du.$$

这积分与第里希莱积分相似。

换取区间 $[x_0 - \pi, x_0 + \pi]$, 并利用代换 $u - x_0 = t$, 与第 655 款中一样, 求得

$$\begin{aligned}\tilde{s}_n(x_0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t) \frac{\cos \frac{1}{2}t - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{1}{2}t} dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \psi(t) \frac{\cos \frac{1}{2}t - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{1}{2}t} dt,\end{aligned}\quad (20)$$

其中为简单起见, 已令

$$\psi(t) = f(x_0 + t) - f(x_0 - t). \quad (21)$$

如果假定积分

$$\tilde{S}_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}t} dt \quad (22)$$

收敛, 即使不是绝对收敛, 则可写出:

$$\tilde{s}_n(x_0) - \tilde{S}_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(t) \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt$$

并能设法证明此积分当 $n \rightarrow +\infty$ 时趋近于零: 这时 $\tilde{S}_0$ 就是级数 (19) 的和。我们只指出按照狄尼判别法 [658] 型式建立的关于级数 (19) 有和 $\tilde{S}_0$ 的充分条件:

如果积分

$$\int_0^h \frac{|\psi(t)|}{t} dt \quad (h > 0)$$

存在, 则与函数 $f(x)$ 的傅立叶级数共轭的级数在点 x_0 处收敛于和数 $\tilde{S}_0$ 。

由于

$$\frac{\psi(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} t} = \frac{\psi(t)}{t} \cdot \frac{\frac{1}{2} t}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} t},$$

則由所作假定, 首先推出积分(22)绝对收敛。同样可证明积分

$$\int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{2 \sin \frac{1}{2} t} dt$$

为绝对收敛, 由此根据第 656 款中的预备定理, 則有 $\tilde{s}_n(x_0) - \tilde{S}_0 \rightarrow 0$, 这就是所需要证明的。

显然, 我們只須假定两积分

$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t) - f(x_0)|}{t} dt \quad \text{及} \quad \int_0^h \frac{|f(x_0-t) - f(x_0)|}{t} dt$$

分别存在, 或者更特别地只須假定李潑西茨条件

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0)| \leq Ct^\alpha \quad (0 < \alpha \leq 1)$$

成立就够了。

注意在所有这些条件中, 都要假设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处連續, 或至少两极限 $f(x_0 \pm 0)$ 相等。但在一般情形下, 当函数 $f(x)$ 在所考虑的点 x_0 有一跳跃, 即当条件

$$f(x_0+0) - f(x_0-0) \geq 0,$$

成立时, 可以证明共轭級数(19)在这点显然发散*, 因此假定函数 $f(x)$ 在点 x_0 处連續是必要的。在此处可看出級数(17)与(19)的情况有特殊的差别: 实际上, 对于傅立叶級数(17), 仅有跳跃存在并不足以妨碍級数的收敛。

我們对于与傅立叶級数共轭的級数不再作更詳細的研究。

671. 多重傅立叶級数 我們也能考虑多元函数的傅立叶級数。为

* 显然积分(22)也发散。

了作出这种表示式, 只須限于考虑二元函数的情形。

設对于一切实值 x 与 y 給出函数 $f(x, y)$ 。我們假設它对 x 及对 y 都有周期 2π , 并且它在正方形

$$(Q) = [-\pi, \pi; -\pi, \pi]$$

上可积分(在原义或广义下)。仿照展开式(10), 写出二重級数

$$f(x, y) \sim \sum_{n, m=-\infty}^{+\infty} \gamma_{n, m} e^{(nx+my)i}, \quad (23)$$

与它相对应, 其中系数 $\gamma_{v, \mu}$ 是由类似于(13)的公式确定:

$$\gamma_{v, \mu} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) e^{-(vx+\mu y)i} dx dy,$$

($v, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

这就是函数 $f(x, y)$ 的复数形式的傅立叶级数。如果在上面写出的关系式中, 我們將符号 $\sim$ 换为 $=$, 再用 $e^{-(nx+my)i}$ 乘“等式”两端, 并且在矩形 (Q) 上积分, 而对级数則逐項积分, 則能由通常的方法求得傅立叶级数的系数。

这时实数形式的傅立叶级数十分复杂。如果在复级数中集合各共軛項, 則得

$$f(x, y) \sim \sum_{n, m=0}^{\infty} [a_{n, m} \cos nx \cos my + b_{n, m} \cos nx \sin my + c_{n, m} \sin nx \cos my + d_{n, m} \sin nx \sin my], \quad (24)$$

其中

$$a_{0, 0} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) dx dy,$$

$$a_{n, 0} = \frac{1}{2\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) \cos nx dx dy; \quad a_{0, m} = \frac{1}{2\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) \cos my dx dy;$$

($n=1, 2, 3, \dots$) ($m=1, 2, 3, \dots$)

$$b_{0, m} = \frac{1}{2\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) \sin my dx dy; \quad c_{n, 0} = \frac{1}{2\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) \sin nx dx dy;$$

($m=1, 2, 3, \dots$) ($n=1, 2, 3, \dots$)

并且,最后得: $m, n=1, 2, 3, \dots$ 时,

$$\left. \begin{aligned} a_{n,m} &= \frac{1}{\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) \cos nx \cos my \, dx \, dy, \\ b_{n,m} &= \frac{1}{\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) \cos nx \sin my \, dx \, dy, \\ c_{n,m} &= \frac{1}{\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) \sin nx \cos my \, dx \, dy, \\ d_{n,m} &= \frac{1}{\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) \sin nx \sin my \, dx \, dy. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

但通常将级数(24)写成下列形式:

$$f(x, y) \sim \sum_{n, m=0}^{\infty} \lambda_{n, m} [a_{n, m} \cos nx \cos my + b_{n, m} \cos nx \sin my + \\ + c_{n, m} \sin nx \cos my + d_{n, m} \sin nx \sin my], \quad (24^*)$$

其中乘数 $\lambda_{n, m}$ 当 $n=m=0$ 时为四分之一, 当指标 n, m 中只有一个等于零时为二分之一, 当 n, m 都不等于零时为一。而系数 $a_{n, m}, b_{n, m}, c_{n, m}, d_{n, m}$ 都可由公式(25)计算出来。

级数 (24) [或 (24*)] 的收敛的问题可以由研究它的部分和 $S_{n, m}(x_0, y_0)$ 来解决。对于这种部分和能得到类似于第里希莱积分的积分表示式:

$$S_{n, m}(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f(x_0 + u, y_0 + v) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)v}{\sin \frac{1}{2}u \sin \frac{1}{2}v} \, du \, dv.$$

我们不研究这个问题。而只说明, 如果下列条件成立, 则函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处显然可展开为傅立叶级数: 1) 偏导数 f'_x 和 f'_y 处处存在并且有界, 2) 在所给点的邻域内二级导数 f''_{xy} (或 f''_{yx}) 存在, 并且在所给点处连续。

§4 傅立叶级数的收敛特性

672. 对于基本预备定理的几点补充 当转而研究傅立叶级数本身的收敛特性时, 我们首先讨论这种级数一致收敛的充分条件。

要研究这个问题, 必须先将第 656 款中的第一基本预备定理加以补充。这就要在該款所讨论的积分中引入不同的参数, 现在研究对于这些参数积分一致趋近于零的问题。

1° 设函数 $g(t)$ 定义在区间 $[A, B]$ 上并且在这区间上绝对可积分, 此时如果变数 a 与 b 取区间 $[A, B]$ 上的任何值, 则两积分

$$\int_a^b g(t) \sin pt \, dt, \quad \int_a^b g(t) \cos pt \, dt$$

当 $p \rightarrow +\infty$ 时对于 a 与 b 一致趋近于零。

我们只要讨论上列第一个积分就够了。由于函数

$$\int_A^t |g(t)| \, dt$$

一致连续, 对于给出的 $\varepsilon > 0$, 能用点

$$A = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_i < \tau_{i+1} < \cdots < \tau_n = B$$

将区间 $[A, B]$ 分得充分小, 使得

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |g(t)| \, dt < \varepsilon \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1).$$

又因形如

$$\int_{\tau_i}^{\tau_j} g(t) \sin pt \, dt \quad (1)$$

($i, j = 0, 1, 2, \cdots, n$)

的积分只有有限个, 所以能求出共同的 $\Delta > 0$, 使得对于 $p > \Delta$, 所有的积

分的绝对值都小于 ε 。但不难看出不論 a 与 b 如何, 积分

$$\int_a^b g(t) \sin pt \, dt$$

与(1)中某一积分之差(对于任意的 p) 小于 2ε 。因此当 $p > \Delta$ 时, 不論 a 与 b 如何, 这积分的绝对值小于 3ε 。这就是需要证明的。

2° 其次可以断定积分

$$\int_a^b g(x \pm t) \sin pt \, dt, \quad \int_a^b g(x \pm t) \cos pt \, dt$$

当 $p \rightarrow +\infty$ 时对于参数 a, b 及 x 一致趋近于零, 只要其中各参数适合条件

$$A \leq x \pm a, \quad x \pm b \leq B.$$

事实上, 例如对第一个积分作代换

$$x \pm t = u,$$

则可以写成

$$\begin{aligned} & \int_{x+a}^{x+b} g(u) \sin p(u-x) du = \\ & = \cos px \int_{x+a}^{x+b} g(u) \sin pu \, du - \sin px \int_{x+a}^{x+b} g(u) \cos pu \, du, \end{aligned}$$

因此問題化为前一情形(1°)。

3° 最后, 如果在积分号下的表示式中还引入在区間 $[A, B]$ 上有有界变差的任意乘数 $\gamma(t)$, 則积分

$$\int_a^b g(x \pm t) \gamma(t) \sin pt \, dt, \quad \int_a^b g(x \pm t) \gamma(t) \cos pt \, dt$$

当 $p \rightarrow +\infty$ 时也一致趋近于零。

因为 $\gamma(t)$ 可写成两个单调增函数的差的形状, 所以我们只要假设 $\gamma(t)$ 本身是增函数就够了。在这种情形下, 由第二中值定理[294],

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x \pm t) \gamma(t) \sin pt \, dt &= \\ &= \gamma(a) \int_a^r g(x \pm t) \sin pt \, dt + \gamma(b) \int_r^b g(x \pm t) \cos pt \, dt \\ &\quad (a \leq r \leq b). \end{aligned}$$

由于函数 $\gamma(t)$ 有界, 在这里问题也化为已经考虑过的情形(2°)。

现在转到第二基本预备定理; 我们对于它只补充说明如下:

4° 设函数 $g(t)$ 在区间 $[A, B]$ 上连续并且单调增加, 而区间 $[a, b]$ 含在 $[A, B]$ 的内部。则积分

$$\int_0^h g(x \pm t) \frac{\sin pt}{t} dt$$

(其中 $0 < h \leq a - A$ 及 $B - b$) 当 $p \rightarrow +\infty$ 时对于在区间 $[a, b]$ 上的 x 一致趋近于极限 $\frac{\pi}{2}g(x)$ 。

依照第 659 款中的证明并使其适合于这里所设的情形。现将第 659 款(13)中的第一个积分写作

$$g(x) \int_0^h \frac{\sin pt}{t} dt = g(x) \int_0^{ph} \frac{\sin z}{z} dz,$$

由于 $g(x)$ 有界, 所以这积分对于在 $[a, b]$ 上的 x 一致趋近于极限 $\frac{\pi}{2}g(x)$ 。在另一方面, 因为函数 $g(x)$ 在 $[A, B]$ 上一致连续, 所以对于已给的 $\varepsilon > 0$, 我们可选出与 x (在从 a 到 b 的范围中变化) 无关的数 $\delta > 0$, 使得

$$|g(x \pm t) - g(x)| < \varepsilon \quad \text{当} \quad 0 < t \leq \delta.$$

分解第 659 款(13)中第二个积分(与在那款中一样)为和数 $I_1 + I_2$, 我們有不仅与 p 无关而且也与 x 无关的估计值 659 款(14)。最后, 由 3°, I_2 对于 x 一致趋近于零。总之, 由此可推得所需要的結論。

673. 傅立叶級数一致收敛性的判別法 現在不难作出一些适当的判別法来判断傅立叶級数在某一区間 $[a, b]$ 上是否一致收敛于 $f(x)$ 。当然首先要假定这函数在所述区間上連續[参考 404]。現先作出形状改变了的

狄尼判別法。已給在区間 $[a, b]$ 上的一連續函数 $f(x)$ 。如果取定某一 $h > 0$, 对于在 $[a, b]$ 上的一切 x , 积分

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t} dt \quad (2)$$

存在, 并且对于 x 一致收敛(当 $t=0$ 时), 則函数 $f(x)$ 的傅立叶級数在区間 $[a, b]$ 上一致收敛于这函数。

我們回忆在这种情形下,

$$\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$$

并且

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt. \quad (3)$$

由所作假定, 对于任意給出的 $\varepsilon > 0$, 有一与 x 无关的数 $\delta > 0$ 存在, 使得对于在 $[a, b]$ 上的一切 x ,

$$\int_0^{\delta} \frac{|\varphi(t)|}{t} dt < \varepsilon.$$

这时积分(3)可表示为和数 $\frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi}$ 的形状。并且显然不論 n 为何

值,

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \varphi(t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{|\varphi(t)|}{t} \cdot \frac{\frac{1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} dt < \\ < \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon} \frac{|\varphi(t)|}{t} dt < \frac{\varepsilon}{2}^*,$$

这式对上述所有的值 x 一致成立。

轉到积分

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt, \quad (4)$$

由前款第 3° 段, 可見积分

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x \pm t) \cdot \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}t} \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时对于在 $[a, b]$ 上的 x 一致趋近于零。由于函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上有界, 这个結果对于积分

$$\frac{1}{\pi} f(x) \int_0^{\pi} \frac{1}{\sin \frac{1}{2}t} \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt$$

也成立。由此可見有一个与 x 无关的数 N 存在, 使得当 $n > N$ 时, 不論 x 是 $[a, b]$ 上的何数, 积分(3)的絕對值变为 $< \varepsilon$ 。至此证明完成。

由此可特別推出

李泼西茨判別法。如果在某一比較 $[a, b]$ 更寬的区間 $[A, B]$ 上

* 利用不等式

$$\sin z > \frac{2}{\pi} z \quad \left(0 < z < \frac{\pi}{2}\right).$$

$(A < a < b < B)$, 条件

$$|f(x') - f(x)| \leq C|x' - x|^\alpha$$

成立, 其中 x, x' 是 $[A, B]$ 上的任意点, C 与 α 是正常数 ($\alpha \leq 1$); 则函数 $f(x)$ 的傅立叶级数在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于这函数。

事实上, 如果选取 h 为两数 $B-b$ 与 $a-A$ 中较小的一数, 则对于在 $[a, b]$ 上一切 x 的值, 积分(2)小于下一收敛积分:

$$\int_0^h \frac{2C}{t^{1-\alpha}} dt.$$

如果函数 $f(x)$ 在比 $[a, b]$ 更宽的区间上有有界的导数 $f'(x)$, 则显然李泼西茨条件(在 $\alpha=1$ 时)成立, 因此函数 $f(x)$ 的傅立叶级数在 $[a, b]$ 上一致收敛于这函数。

而且这条件是下一判别法的一个特殊情形:

第里希莱-霞当判别法 如果在某一比 $[a, b]$ 更宽的区间 $[A, B]$ 上函数 $f(x)$ 连续并有有界变差, 则函数 $f(x)$ 的傅立叶级数在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于这函数。

依照第 660 款中的论证, 将积分

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt$$

表示为积分的和 $\frac{1}{\pi} \int_0^h + \frac{1}{\pi} \int_h^\pi$, 其中正数 h 要选得小于 $a-A$ 与 $B-b$, 且

与 $[a, b]$ 上 x 的值无关。由 3°, 显然上面第二个积分当 $n \rightarrow \infty$ 时对于 x 一致趋近于零。在第一个积分中, 令

$$\frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}t} = \left[\frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}t} - \frac{1}{t} \right] + \frac{1}{t},$$

首先从第一个积分中分出一部分：

$$\frac{1}{\pi} \int_0^n [f(x+t) + f(x-t)] \left[\frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}t} - \frac{1}{t} \right] \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt,$$

又由 3°, 这部分一致趋近于零*。

最后回到积分

$$\frac{1}{\pi} \int_0^n [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{t} dt.$$

因为在区间 $[A, B]$ 上函数 $f(x)$ 可以表示为两个連續增函数之差
的形状：

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

所以对这两函数分别应用命题 4°, 便能断定上面的积分一致趋近于极
限 $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2f(x) = f(x)$ 。证明至此完成。

特别，如果在区间 $[-\pi, \pi]$ 上給出一連續并有有界变差的函数
 $f(x)$ 且适合条件

$$f(-\pi) = f(\pi),$$

則它的傅立叶级数在整个区间上一致收敛于这函数。

为了要证明这定理，只須以 2π 为周期，按周期規則在整个数轴上
开拓此函数，然后任取一包含 $[-\pi, \pi]$ 在其内部的区间作为 $[A, B]$ 。

674. 傅立叶级数在不連續点附近的性质；特殊情形 现在研究函数 $f(x)$ 的傅立叶级
数在这函数的不連續点附近的性质。我們开始考虑一个特殊的级数。这级数有一种有趣的
现象，能够最简单明了地表现出来。

我們知道级数

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = 2 \left\{ \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right\} \quad (5)$$

* 参考第 664 款 3) 下的底注。

收敛于和式

$$\sigma(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{如果 } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{如果 } x = 0, \pm\pi, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{如果 } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

[参考 664, 4)]; 在点 $x=0$ 的左方及右方, 函数有跳跃:

$$\sigma(+0) - \sigma(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \sigma(0) - \sigma(-0) = \frac{\pi}{2}.$$

我们将研究级数部分和

$$\sigma_{2n-1}(x) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

的性质^{*}。因为它是奇函数, 所以只要在区间 $[0, \pi]$ 上考虑它就够了。此外, 显而易见的恒等式

$$\sin(2k-1)\left(\frac{\pi}{2} + x'\right) = \sin(2k-1)\left(\frac{\pi}{2} - x'\right)$$

指出 $\sigma_{2n-1}(x)$ 关于点 $x = \frac{\pi}{2}$ 为对称:

$$\sigma_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2} + x'\right) = \sigma_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2} - x'\right);$$

因此可以限于在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上进行研究。

不难求得 $\sigma_{2n-1}(x)$ 的表示式:

$$\sigma_{2n-1}(x) = 2 \int_0^x [\cos u + \cos 3u + \cdots + \cos(2n-1)u] du = \int_0^x \frac{\sin 2nu}{\sin u} du, \quad (6)$$

或者, 如果令 $2nu = t$, 即得:

$$\sigma_{2n-1}(x) = \frac{1}{2n} \int_0^{2n\pi} \frac{\sin t}{\sin \frac{t}{2n}} dt. \quad (7)$$

这表示式可写成和式的形状:

$$\sigma_{2n-1}(x) = \frac{1}{2n} \left\{ \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} + \cdots + \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} + \int_{k\pi}^{2n\pi} \right\} \frac{\sin t}{\sin \frac{t}{2n}} dt, \quad (8)$$

* 显然 $\sigma_{2n}(x) = \sigma_{2n-1}(x)$ 。

其中 $k = E\left(\frac{2n\tau}{\pi}\right)$ 。对于 $i = 0, 1, \dots, n-1$, 一般地令

$$\frac{1}{2n} \int_{i\pi}^{(i+1)\pi} \frac{\sin t}{\sin \frac{t}{2n}} dt = (-1)^i \frac{1}{2n} \int_0^\pi \frac{\sin z}{\sin \frac{z+i\pi}{2n}} dz = (-1)^i v_i,$$

我們显然有

$$v_i > 0 \text{ 及 } v_{i+1} < v_i. \quad (9)$$

因此, 最后得:

$$\sigma_{2n-1}(x) = v_0 - v_1 + \dots + (-1)^{k-1} v_{k-1} + (-1)^k \bar{v}_k, \quad (8^*)$$

其中用 $(-1)^k \bar{v}_k$ 表示最后的一个“不规则”项; 它的符号是 $(-1)^k$, 而其绝对值小于 v_k 。

由此立即推得关于和式 $\sigma_{2n-1}(x)$ 的性质的一系列结论。如果固定 n , 而 x 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$, 则

- 1) 和式 $\sigma_{2n-1}(x)$ 为正, 且只在 $x=0$ 处为零;
- 2) 它在点

$$x_m = \frac{m\pi}{2n} \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

处有极值: 当 m 是奇数时有极大值, 是偶数时有极小值。事实上, 由 (8^*) 可见在区间 $\left[m\frac{\pi}{2n}, (m+1)\frac{\pi}{2n}\right]$ 上, 函数 $\sigma_{2n-1}(x)$ 当 m 是偶数时为增函数, 当 m 是奇数时为减函数*。

最后, 由极值的表示式

$$\sigma_{2n-1}(x_m) = v_0 - v_1 + \dots + (-1)^m v_m$$

并且考虑不等式(9), 可知:

- 3) 当 x 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上变化时, $\sigma_{2n-1}(x)$ 的极大值从左向右减小而极小值则增大。

所有这些断语都表现于图 133, 在这图中描出了函数 $\sigma_{11}(x)$ 的图解作为例子。

现讨论函数 $\sigma_{2n-1}(x)$ 的最大的极大值, 即从 $x=0$ 计算起的第一个极大值, 它就是函数在点

$$x_1^{(n)} = \frac{\pi}{2n}$$

处的值, 其大小等于[参考(7)]

$$M_1^{(n)} = \sigma_{2n-1}(x_1^{(n)}) = \frac{1}{2n} \int_0^\pi \frac{\sin t}{\sin \frac{t}{2n}} dt.$$

* 考虑导数

$$\frac{d}{dx} \sigma_{2n-1}(x) = \frac{\sin 2nx}{\sin x}$$

时, 也容易得到关于函数 $\sigma_{2n-1}(x)$ 的极值的论断 2) [参考(6)]。

在这里我們取 n 作为指标, 因为现在打算要研究当 n 变化时函数的性质。显然当 n 增大时,

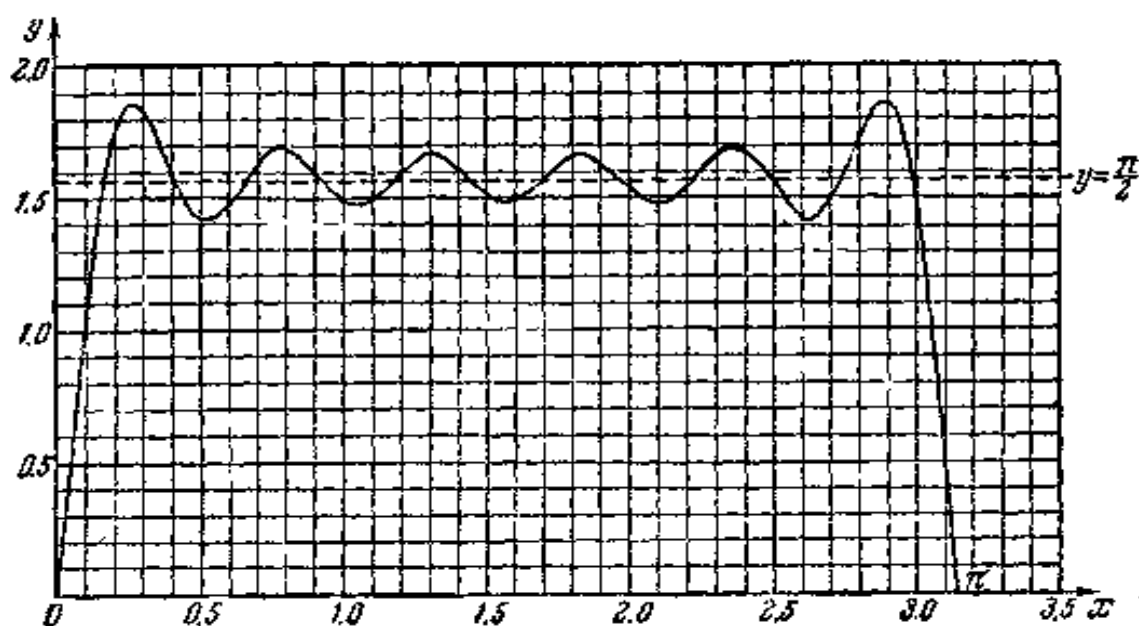


圖 133.

$x_1^{(n)}$ 单调减小, 并且当 $n \rightarrow +\infty$ 时趋近于零。为了简化对于 $M_1^{(n)}$ 的大小的研究起见, 将它的表示式换写为下列形式:

$$M_1^{(n)} = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \frac{t}{\sin \frac{t}{2n}} dt.$$

因为当 n 增大时, 被积分式中的第二个因子随着 n 的递增而一致(关于 t)递减* 趋近于一, 所以 $M_1^{(n)}$ 也显然递减趋近于极限:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_1^{(n)} = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \mu_1. \quad (10)$$

由此得:

4) 函数 $\sigma_{2n-1}(x)$ 在值 $x = x_1^{(n)}$ 处达到第一个(最大的)极大值, 当 n 无限增大时, $x_1^{(n)}$ 单调减趋近于零, 而极大值 $M_1^{(n)}$ 本身则单调减趋近于公式(10)所表示的极限 μ_1 。

一般说来, 对于函数的第 k 个(k 固定)极值也能作类似的断语: 函数在值

$$x_k^{(n)} = k \cdot \frac{\pi}{2n} \quad (n \geq k)$$

* 我們在此处应用到这个事实: 当 z 从 0 增大到 $\frac{\pi}{2}$ 时, 函数 $\frac{z}{\sin z}$ 本身也增大。

处达到它; 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_k^{(n)}$ 趋近于 0, 而第 k 个极值的大小 $M_k^{(n)}$, 则单调趋近于极限

$$\mu_k = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt,$$

如果所讲的是极大值 (k 为奇数) 则 $M_k^{(n)}$ 减小; 如果是极小值 (k 为偶数) 则 $M_k^{(n)}$ 增大。

为了说明起见, 我们作出了图 134, 在其中将前六个和式 σ_{2n-1} ($n=1, 2, 3, 4, 5, 6$) 的图解加以比较。

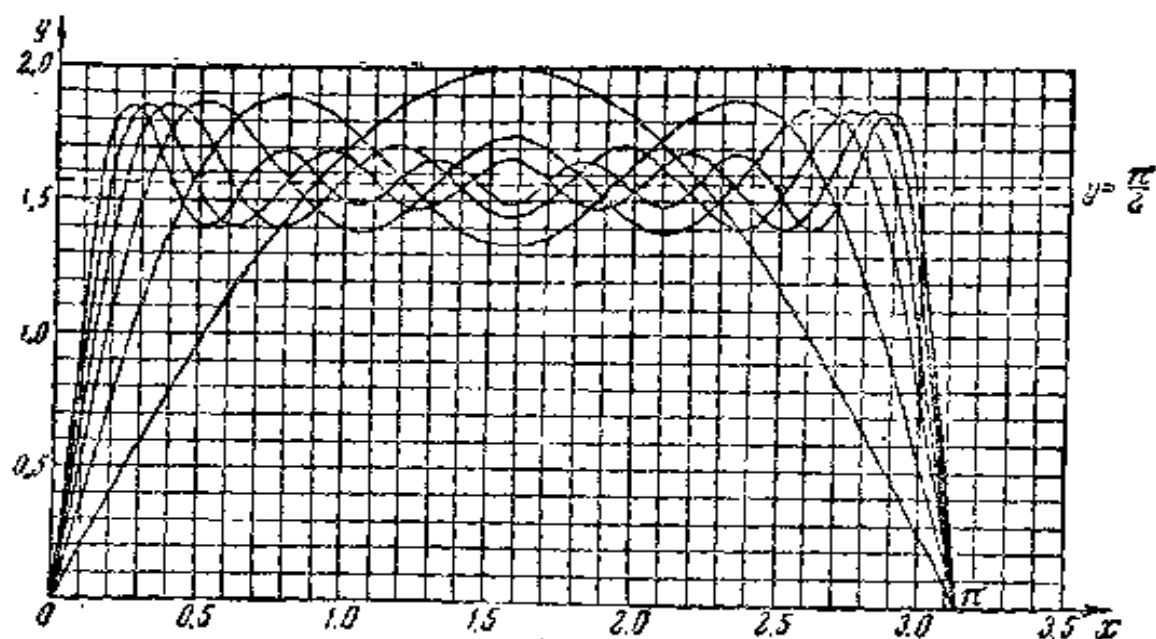


图 134.

由第 439 款中所作的推理, 显然数 μ_k 比起数

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

来, 依次交互一大一小。差数 $\rho_k = \mu_k - \frac{\pi}{2}$ 有下列各值:

$$\rho_1 \doteq 0.281^*; \rho_2 \doteq -0.153; \rho_3 \doteq 0.104; \rho_4 \doteq -0.073; \rho_5 \doteq 0.063; \dots \quad (11)$$

现在我们已能充分完满地说明级数 (5) 的部分和 $\sigma_{2n-1}(x)$ 收敛于和式 $\sigma(x)$ 这一特性, 为了明确起见, 我们的讨论限于在区间 $[0, \pi]$ 上。

如果用任意充分小的邻域 $[0, \delta]$ 及 $(\pi - \delta, \pi]$ 划出不连续点 $x=0$ 及 $x=\pi$, 则由前款所证明的结果, 级数在余下的区间 $[\delta, \pi - \delta]$ 上 一致收敛。换句话说, 当 n 充分大时, 部分和

* 参考 412, 4)。

$\sigma_{2n-1}(x)$ 的图解在这区间的整个范围就向着直线 $y = \frac{\pi}{2}$ 任意充分靠攏。在点 $x=0$ (及 $x=\pi$) 附近, 函数从值 $\frac{\pi}{2}$ 变到值 0, 即有一跳跃; 在这里, 自然不可能有一致逼近的性质, 因为 $\sigma_{2n-1}(x)$ 从在 $x=\delta$ (或 $\pi-\delta$) 处接近于 $\frac{\pi}{2}$ 的值以连续的方式变为在 $x=0$ (或 π) 处的值 0。

然而很值得注意的是: 一致近似性之所以不能成立的原因不仅在此; 我們要提起讀者注意这个事实。在 y 軸右侧附近, 当函数 $\sigma_{2n-1}(x)$ 的图解突然趋近于原点 $(0, 0)$ 以前, 它圍繞着直线 $y = \frac{\pi}{2}$ 振荡, 而且振荡的振幅当 $n \rightarrow \infty$ 时一点没有无限减小的趋势。反之, 如我們所已看到, 在这个直线上面的第一个峰, 也就是最高的一个峰的高度在这时趋近于数量 $\rho_1 \doteq 0.281$, 随着第一个峰, 其余的谷与峰当 n 增大时从右向左推移, 并向 y 軸密集, 而且当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它們的顶点与直线 $y = \frac{\pi}{2}$ 的距离分别趋近于序列 (11) 中其余的数量 $\rho_2, \rho_3, \dots$ 等等。在直线 $x=\pi$ 的左侧邻近, 也有类似的图形。在 y 軸左侧附近也是一样, 应重新作出同一图形; 不过要将所有考虑过的数量变号。

可以说对于曲线 $y = \sigma_{2n-1}(x)$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 画在图 135, a 上的折线不是“极限的几何图形”(不是如我們自然料想到的那样!); 而应取图 135, b 中的折线作为极限图形, 其中垂直的线段分别延长了約 $0.281: \frac{\pi}{2} \doteq 18\%$ 。

在上世紀的末年, 吉卜斯 (J. W. Gibbs) 首先也是在一个三角展开式的特例上注意到这

种收敛性的缺点, 因此我們称它为吉卜斯現象。現在将看到在某种意义下, 这种现象在一般情况下也要产生。

675. 任意函数的情形 考虑以 2π 为周期并具有第一种孤立不連續点 $x=x_0$ 的绝对可积分函数 $f(x)$ 。则在某一区间 $[x_0-\Delta, x_0+\Delta]$ 上 ($\Delta>0$), 沒有其他不連續点; 为了简单起见, 假定函数在这区间上有有

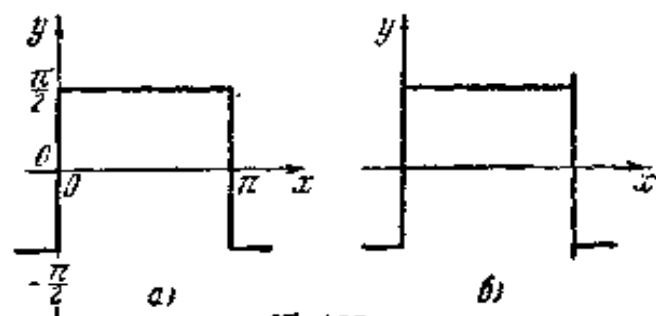


圖 135.

界变差。

現引用函数 $\sigma(x-x_0)$, 它与上款中所研究的函数的差别只是在于向右平移了 x_0 , 利用它作出函数

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} - \frac{1}{\pi} [f(x_0+0) - f(x_0-0)] \sigma(x-x_0).$$

如果在不連續点 $x=x_0$ 处, 約定取 $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$ 作为值 $f(x_0)$, 則容易证实:

$$\varphi(x_0+0) = \varphi(x_0-0) = \varphi(x_0) = 0.$$

这样, 函数 $\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处就是連續的; 利用函数 σ 能够补救函数 f 的不連續性! 如果取 $\Delta < \pi$, 則函数 φ 在区间 $[x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]$ 的其余各点处也連續; 而且函数 φ 也与函数 f 及 σ 一样, 在这个区间上也有有界变差。

现在可写出

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{\pi} [f(x_0+0) - f(x_0-0)] \sigma(x-x_0) + \varphi(x).$$

在这里, 将函数 $\sigma(x-x_0)$ 及 $\varphi(x)$ 用它們的傅立叶级数展开式来代替, 我們显然就得到已給函数的傅立叶级数展开式。它的部分和 $s_m(x)$ 可表示为下列形式:

$$s_m(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0+0) - f(x_0-0)}{\pi} \sigma_m(x-x_0) + \varphi_m(x).$$

在这里, 当 $m = 2n-1$ 或 $2n$ 时,

$$\begin{aligned} \sigma_m(x-x_0) &= \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)(x-x_0)}{2k-1} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} [\cos x_0 \sin(2k-1)x - \sin x_0 \cos(2k-1)x], \end{aligned}$$

而 $\varphi_m(x)$ 则表示 φ 的级数的相应部分和。

因为 $\varphi(x_0) = 0$, 并且函数 $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处連續, 所以当 Δ 充分小时, $\varphi(x)$ 在区间 $[x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]$ 上的一切值可任意小。同时 $\varphi_m(x)$ 在这区间上一致趋近于 $\varphi(x)$, 因此当 m 充分大时, $\varphi_m(x)$ 的值可任意小。这样, 和式 $s_m(x)$ 的性质基本上已由和式 $\sigma_m(x-x_0)$ 的已知性质所确定, $\varphi_m(x)$ 一项的出现只会有不重要的改变, 而当 x 愈接近于 x_0 及 m 愈大时, 則改变愈小。

如果对于奇数 $m = 2n-1$, 令

$$\xi_m = x_0 + \frac{\pi}{2n} = x_0 + \frac{\pi}{m+1},$$

而对于偶数 $m = 2n$,

$$\xi_m = x_0 + \frac{\pi}{2n} = x_0 + \frac{\pi}{m},$$

則

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_m = x_0.$$

如果同时考虑到(10), 則

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(\xi_m) = f(x_0) + \frac{f(x_0+0) - f(x_0-0)}{\pi} \cdot \mu_1,$$

因为当 $m \rightarrow \infty$ 时, 显然

$$\varphi_m(\xi_m) = [\varphi_m(\xi_m) - \varphi(\xi_m)] + \varphi(\xi_m) \rightarrow 0.$$

用 $\frac{\pi}{2} + \rho_1$ 代替 μ_1 , 并且引用跳跃量 $D = f(x_0+0) - f(x_0-0)$, 可将所得结果改写为:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(\xi_m) = f(x_0+0) + \frac{D}{\pi} \rho_1. \quad (12)$$

同样, 按照 m 是奇数或偶数, 令

$$\bar{\xi}_m = x_0 - \frac{\pi}{m+1} \text{ 或 } x_0 - \frac{\pi}{m},$$

得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(\bar{\xi}_m) = f(x_0-0) - \frac{D}{\pi} \rho_1. \quad (13)$$

这样, 在所考虑的一般情形下, 和式 $s_m(x)$ 在不连续点 x_0 的邻域内之振幅的极限值比较函数 $f(x)$ 的跳跃量 $|D|$ 大

$$\frac{2|D|}{\pi} \rho_1,$$

即大 18%。在这里, 要得到和式 $s_m(x)$ 的图解的极限几何图形, 只对曲线 $y=f(x)$ 附加在垂直线 $x=x_0$ 上联结纵坐标为 $f(x_0-0)$ 及 $f(x_0+0)$ 的两点的线段是不够的, 还必须把这线段相应地向上下两方延长。可以说对于任意的函数都有吉卜斯现象!

附注 对吉卜斯现象的研究还可得到其他有趣的结论。譬如, 利用这种研究, 对于有有界变差的函数 $f(x)$, 则能由它的傅立叶级数直接求出确定它在任意点 x_0 处的单侧极限 $f(x_0 \pm 0)$ 及跳跃量的公式。为了这个目的, 例如, 可应用公式(12)与(13); 将它们两端相减, 求得

$$D = \frac{\pi}{2\rho_1} \lim_{m \rightarrow \infty} [s_m(\xi_m) - s_m(\bar{\xi}_m)],$$

然后确定 $f(x_0 \pm 0)$ 便容易多了。这种类型的公式都是由费叶尔(L. Fejér)求得的。

676. 傅立叶级数的奇异性质 · 预先的说明 在连续函数的傅立叶级数的一切收敛判别法中, 除了连续性本身以外, 总还需要加上某些条件: 有时是某一积分存在, 某一不等式成立, 或有限的导数存在; 有时是函数有有界变差或逐段单调。因而很自然地发生了下一问题: 要傅立叶级数的收敛, 仅有产生这级数的函数连续这一性质是否就够了呢? 早在 1876 年, 杜·布阿列蒙(P. du Bois-Reymond)已经对这问题作了否定的答复, 他作出了一个连续函数的例子, 其傅立叶级数在若干点发散。

莱彼格(H. Lebesgue)在 1906 年作出了一连续函数的例子, 其傅

立叶级数处处收敛,但是并不一致收敛。

在这里,我们要依照费叶尔所指出的方法,作出具有“杜·布阿列蒙奇异性质”及“莱彼格奇异性质”的一些例子。

在这两种情形下,都要用下列有限三角多项式(m 与 n 表示自然数)作为作法的要素:

$$P_{m,n}(x) = \left[\frac{\cos mx}{n} + \frac{\cos(m+1)x}{n-1} + \cdots + \frac{\cos(m+n-1)x}{1} \right] -$$

$$- \left[\frac{\cos(m+n+1)x}{1} + \cdots + \frac{\cos(m+2n-1)x}{n-1} + \frac{\cos(m+2n)x}{n} \right],$$

$$Q_{m,n}(x) = \left[\frac{\sin mx}{n} + \frac{\sin(m+1)x}{n-1} + \cdots + \frac{\sin(m+n-1)x}{1} \right] -$$

$$- \left[\frac{\sin(m+n+1)x}{1} + \cdots + \frac{\sin(m+2n-1)x}{n-1} + \frac{\sin(m+2n)x}{n} \right].$$

事先推出这些多项式的若干性质:

1° 第一,不论变数 x 及指标 m 及 n 的值是怎样,一定有一个常数 M 存在,使得

$$|P_{m,n}(x)| \leq M \text{ 及 } |Q_{m,n}(x)| \leq M. \quad (14)$$

为了要证明这性质,变换多项式 P 与 Q ,合并其中具有相同系数的各项。这样,在第一个多项式中,令(当 $\nu=1, 2, \cdots, n$ 时)

$$\frac{\cos(m+n-\nu)x}{\nu} - \frac{\cos(m+n+\nu)x}{\nu} = 2 \sin(m+n)x \frac{\sin \nu x}{\nu},$$

我们将它化成下列形式:

$$P_{m,n}(x) = 2 \sin(m+n)x \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin \nu x}{\nu}.$$

同样,

$$Q_{m,n}(x) = -2 \cos(m+n)x \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin \nu x}{\nu}.$$

因为在这里两种情形下,所出现的和式的乘数显然有界,所以问题归结

为和式本身的有界性。我們过去已将这和式表成下列形式[664, 3)]:

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\sin \nu x}{\nu} = -\frac{x}{2} + \int_0^x \left[\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt + \int_0^{(n+\frac{1}{2})x} \frac{\sin u}{u} du.$$

在这里, 右端的第二项当 $n \rightarrow \infty$ 时一致趋近于零, 所以它有界[672, 1°];

又因积分 $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du$ 收敛, 所以第三项也有界。由此推得所需要的結論。

2° 多項式 P 及 Q 的部分和(即在多項式中从第一項起任意个相連各項的和)的情况則有所不同。如果取多項式 $P_{m,n}(x)$ 前 n 項的和, 則当 $x=0$ 时, 它的值是

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

即随着 n 一同发散于无穷大[356, 1)]。因为, 显然,

$$\frac{1}{\nu} > \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{dx}{x} = \log(\nu+1) - \log \nu,$$

所以可求得 H_n 的下一熟知的估計值

$$H_n > \log n.$$

当 $x=0$ 时, 多項式 $Q_{m,n}(x)$ 的部分和全都等于零。但是如果我們計算多項式的前 n 項在靠近于零的(当 m 及 n 很大时)点 $x = \frac{\pi}{2(m+n)}$ 处的和, 則得

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\nu\pi}{2(m+n)} \right).$$

根据熟知的不等式 $\sin z > \frac{2}{\pi} z \left(0 < z < \frac{\pi}{2} \right)$, 这和式比

$$\sum_{\nu=1}^n \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{m+n} \right) = H_n - \frac{n}{m+n} > \log n - 1$$

更大,并且也随着 n 无穷增大。实际上在这里已经包含着(杜·布阿列蒙及萊彼格的)两种奇异性质的胚胎了。

3° 如果我们取任意正数 ε , 限制变数 x 在区间 $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ 上变化*, 则两多项式的一切部分和(的绝对值)都以同一与 m 及 n 无关的常数 $L(\varepsilon)$ 为界。只须关于表示式

$$\sum_{\lambda=1}^l \frac{\cos(p \pm \lambda)x}{\lambda}, \quad \sum_{\lambda=1}^l \frac{\sin(p \pm \lambda)x}{\lambda}, \quad (15)$$

证明此点就够了, 因为容易看出在一般的情形下, 各部分和可写成两个类似表示式的差。

现取表示式

$$\sum_{\lambda=1}^l \frac{\cos(p + \lambda)x}{\lambda}$$

为例, 并且为了求它的估计值须应用亚培尔预备定理[371]。当标数 λ 增大时, 因子 $\frac{1}{\lambda}$ 减小, 但总是正数。至于因子 $\cos(p + \lambda)x$, 则其任意个的和

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda_0} \cos(p + \lambda)x = \frac{\sin\left(p + \lambda_0 + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(p + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

的绝对值不超过常数 $\frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}}$ 。由此可作结论:

$$\left| \sum_{\lambda=1}^l \frac{\cos(p + \lambda)x}{\lambda} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}}.$$

* 或取从 $2k\pi + \varepsilon$ 到 $2(k+1)\pi - \varepsilon$ 的区间(其中 k 为任意整数), 像这样并没有什么不同。

对于 (15) 中其他的表示式, 这个結論还是成立。这样, 可以取常数 $\frac{2}{\sin \frac{\delta}{2}}$ 作为上述的界 $L(\delta)$ 。

所有这些性质在下款中都要应用到。

677. 奇异性质的作法 現在取正数序列 $\{a_k\}$, 使得級数 Σa_k 收敛。又取两个无穷增加的自然数序列 $\{m_k\}$ 及 $\{n_k\}$, 作出两級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k P_{m_k, n_k}(x) = \Phi(x) \quad (\text{I})$$

及

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k Q_{m_k, n_k}(x) = \Psi(x). \quad (\text{II})$$

則因根据(14), 这两級数都以收敛級数 $M \Sigma a_k$ 为强函数, 所以它們絕對且一致收敛。因此[404]函数 $\Phi(x)$ 及 $\Psi(x)$ 显然連續。

我們选取 a_k, m_k 及 n_k 使其适合下列两个要求:

- 1) $m_{k+1} > m_k + 2n_k$ (关于 $k=1, 2, 3, \dots$),
- 2) 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $a_k \log n_k \rightarrow +\infty$ 。

例如可令 $a_k = \frac{1}{k^2}, m_k = n_k = 2^{k^2}$

两个不同的三角多項式 $a_k P_{m_k, n_k}(x)$ 或 $a_k Q_{m_k, n_k}(x)$ 分別在級数 (I) 或 (II) 中出現, 由 1), 它們不包含具有 x 的相同倍数的項。如果現在簡單地依次一一写出 (I) 或 (II) 中的多項式序列的一切項, 即去掉所有括号, 則得两个三角級数 (一个是余弦級数, 另一个是正弦級数), 就是函数 $\Phi(x)$ 及 $\Psi(x)$ 的傅立叶級数。事实上, 例如如果用 $\cos px$ 乘等式 (I) 的两端并从 0 到 2π 积分, 則由級数的一致收敛性, 能够进行級数的逐項积分法。然后将每个积分

$$\int_0^{2\pi} a_k P_{m_k, n_k}(x) \cos px \, dx$$

用有限个积分的和来代替, 则除了在 $a_k P_{m_k, n_k}(x)$ 中含 $\cos px$ 项的情形以外, 一切积分都是零。由此可知 $\cos px$ 的系数是傅立叶系数。

现在研究这些傅立叶级数收敛及其收敛的特性问题。如果限制 x 在区间 $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ 上变化, 则这两级数也与级数(I)及(II)一样, 是收敛的, 并且甚是一致收敛的。这是因为(例如)函数 $\Phi(x)$ 的傅立叶级数的任一部分和, 与级数(I)的某一部分和

$$\sum_{k=1}^{s-1} a_k P_{m_k, n_k}(x)$$

的差只是三角多项式

$$a_s P_{m_s, n_s}(x)$$

中的某一部分和, 而由 676, 3°, 这一部分和的绝对值不会超过 $a_s L(\varepsilon)$. 并且当 s 无穷增加时一致趋近于零。

由于 ε 的任意性, 因此就保证了函数 $\Phi(x)$ 与 $\Psi(x)$ 的傅立叶级数在 $(0, 2\pi)$ 内的一切值 x 处收敛。然而第一个级数在 $x=0$ (或 2π) 处发散, 即有“杜·布阿列蒙奇异性性质”! 实际上, 如果一般地用 $s_m(x)$ 表示它的第 m 个部分和, 我们有

$$s_{m_k+n_k-1}(x) - s_{m_k-1}(x) = a_k \left[\frac{\cos m_k x}{n_k} + \dots + \frac{\cos(m_k + n_k - 1)x}{1} \right],$$

因此[参考 676, 2°]

$$s_{m_k+n_k-1}(0) - s_{m_k-1}(0) = a_k H_{n_k} > a_k \log n_k,$$

结合要求 2), 此式证实了级数收敛的基本条件[355, 5°]不能成立。

至于函数 $\Psi(x)$ 的傅立叶级数则仅含正弦, 所以当然它在 $x=0$ (或 2π) 处也收敛。但是这时在点 $x=0$ 的邻域内, 收敛性不是一致的, 因而我们在这里体现了“莱彼格奇异性性质”! 为了要证实这一点, 一般地

用 $\tilde{s}_m(x)$ 表示它的第 m 个部分和, 并且计算在点 $x = \frac{\pi}{2(m_k + n_k)}$ 处的

差数

$$\bar{s}_{m_k+n_{k-1}}(x) - \bar{s}_{m_{k-1}}(x) = a_k \left[\frac{\sin m_k x}{n_k} + \dots + \frac{\sin(m_k + n_k - 1)x}{1} \right];$$

由 676, 2°, 它比

$$a_k(\log n_k - 1)$$

还大, 并且随着 k 增加到无穷大。

将作法加繁, 则能确定以 2π 为周期的連續函数 $\Phi(x)$, 使得它的傅立叶級数在区間 $[0, 2\pi]$ 的任一部分有发散点。

然而直到現在为止, 关于連續函数的傅立叶級数是不是可能处处发散的問題还没有解决。的确, 处处发散的傅立叶級数曾由阿·恩·柯尔莫果洛夫院士用精密的方法作出了一例, 但是他的例子已与性质較复杂的函数有关, 并且利用了較通常更普遍的(萊彼格的)积分定义。

§ 5. 与函数可微分性相关的余部估值

678. 函数与其导数的傅立叶系数間之关系 考虑以 2π 为周期并有直到 k 級 ($k \geq 1$) 导数的函数 $f(x)$ 。当然, 前 $k-1$ 个导数是連續函数; 而假定第 k 級导数为(絕對)可积分。与在前面一样, 我們用 a_m, b_m 表示函数 $f(x)$ 的傅立叶系数; 对于导数 $f^{(i)}(x)$ ($i=1, 2, \dots, k$), 則用 $a_m^{(i)}, b_m^{(i)}$ 表示其傅立叶系数。

分部积分, 求得(对 $m=1, 2, 3, \dots$)

$$\pi a_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = f(x) \frac{\sin mx}{m} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{m} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin mx \, dx,$$

因此

$$a_m = -\frac{b_m'}{m};$$

同样

$$b_m = \frac{a_m'}{m}.$$

如果将所得公式应用到系数 a'_m, b'_m , 则得用 a''_m, b''_m 表示它们的式子, 将这些式子代入 a_m, b_m 的公式中, 则有

$$a_m = -\frac{a''_m}{m^2}, \quad b_m = -\frac{b''_m}{m^2}.$$

继续应用这种方法, 我们分别偶数与奇数的情形, 归纳作出最后的公式:

$$\text{当 } k=2h \text{ 时: } a_m = (-1)^h \frac{a_m^{(k)}}{m^k}, \quad b_m = (-1)^h \frac{b_m^{(k)}}{m^k}, \quad (1a)$$

$$\text{当 } k=2h+1 \text{ 时: } a_m = (-1)^{h+1} \frac{b_m^{(k)}}{m^k}, \quad b_m = (-1)^h \frac{a_m^{(k)}}{m^k}. \quad (1b)$$

我们提出的问题是: 在对 k 级可微分函数的 k 级导数加上若干条件时, 利用上列公式求出这函数的傅立叶级数的余部估值。在前一节的开始, 我们研究了傅立叶级数的一致收敛性的问题, 即它的余部一致趋近于零的问题; 的确, 在这里, 在更严格的假定下, 利用函数的可微分性求出余部的无穷小阶后, 我们甚至能估计这种趋近的速度。

679. 在有界函数情形时部分和的估值 现只假定函数 $f(x)$ 有界:

$$|f(x)| \leq M,$$

在这里, 例如, 可把 M 了解为 $|f(x)|$ 的上确界。我们预先要给出傅立叶级数的部分和 $s_n(x)$ 以及与其共轭的级数的部分和 $\tilde{s}_n(x)$ 的估值。

由熟知的公式[参考 655, (4)],

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt.$$

由此逐步有:

$$\begin{aligned}
 |s_n(x)| &\leq \frac{2M}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \right|}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt < M \int_0^{\pi} \frac{\left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \right|}{t} dt^* = \\
 &= M \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin u|}{u} du < M \int_0^1 du + M \int_1^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{du}{u} = \\
 &= M \left[1 + \log \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \right] < M (\log n + 1 + \log 2\pi).
 \end{aligned}$$

如果将 A 理解为一充分大的常数, 则(当 $n \geq 2$ 时)在最后一个括号中的表示式比 $A \log n$ 小, 因此最后得

$$|s_n(x)| \leq AM \log n^{**} \quad (n \geq 2). \quad (2)$$

转到共轭级数, 我们回忆[670, (20)]

$$\tilde{s}_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \frac{\cos \frac{1}{2}t - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt.$$

因此

$$\begin{aligned}
 |\tilde{s}_n(x)| &\leq \frac{2M}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left| \cos \frac{1}{2}t - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t \right|}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt = \\
 &= \frac{4M}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left| \sin \frac{n}{2}t \cdot \sin \frac{n+1}{2}t \right|}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt < \frac{4M}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left| \sin \frac{n+1}{2}t \right|}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt.
 \end{aligned}$$

* 参考 673 款狄尼判别法下的底注。

** 例如可以取

$$A = 2 + \frac{1 + \log \pi}{\log 2}.$$

但是这当然不是常数 A 所能取得的最好值。

再与以上同样进行推理, 我們得到类似的估值:

$$|\tilde{s}_n(x)| \leq AM \log n \quad (n \geq 2), \quad (3)$$

其中 A 是新的常数, 一般說来与前面的 A 不同, 但是与它相似的是这个 A 也与函数 $f(x)$ 的选取无关。然而当然能在两种情形下采用同一常数——即两数中較大的一数。

差式 $R_n(x) = f(x) - s_n(x)$ [只有当 $s_n(x)$ 收敛于函数 f 时, 它才是傅立叶级数的余部] 的估值与 (2) 相仿:

$$|R_n(x)| \leq AM \log n \quad (n \geq 2),$$

事实上,

$$|R_n(x)| \leq |f(x)| + |s_n(x)| \leq M + AM \log n,$$

因此只要适当地增大常数 A , 即得所需要的不等式。

对于随着 n 增加到无穷大的数量在不等式右端这个事实, 讀者不必感觉惊讶。的确, 我們知道对于若干有界 (甚至于是連續的, 参考 677) 函数 $f(x)$, 量 $R_n(x)$ 确乎能够无穷增大, 而我們的不等式則必須对于一切有界可积分的函数都成立。

680. 函数有 k 級有界导数时余部的估值 現在再轉而考虑以 2π 为周期并有直到 k 級 ($k \geq 1$) 导数的函数 $f(x)$, 而且这次假定 k 級导数有界:

$$|f^{(k)}(x)| \leq M_k$$

并且有常义积分。

我們將证明施·恩·伯恩斯坦院士所发现的重要結果: 在已作的假定下, 有一个绝对常数 A 存在, 使得 (对于 $n \geq 2$)

$$|R_n(x)| \leq AM_k \frac{\log n}{n^k}. \quad (4)$$

在证明时, 我們將分別 k 为偶数及奇数两种情形。

1° 設 $k = 2h$ 。如果利用公式 (1a), 則可将函数 $f(x)$ 的傅立叶级数

的余部的表示式*

$$R_n = R_n(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx$$

写成下列形式

$$R_n = (-1)^k \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^k} (a_m^{(k)} \cos mx + b_m^{(k)} \sin mx).$$

在括弧中, 我們有函数 $f^{(k)}(x)$ 的傅立叶級数的第 m 項; 引用这个級数的部分和 $\sigma_m = \sigma_m(x)$, 則可用 $\sigma_m - \sigma_{m-1}$ 来代替此項:

$$R_n = (-1)^k \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^k} (\sigma_m - \sigma_{m-1}).$$

除去括弧并換一种方式集合諸項[参考 371], 我們得到級数

$$(-1)^k R_n = -\frac{\sigma_n}{(n+1)^k} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{m^k} - \frac{1}{(m+1)^k} \right) \sigma_m. \quad (5)$$

可以这样变换的理由, 是

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sigma_m}{m^k} = 0;$$

这是由不等式

$$|\sigma_m| \leqslant A M_k \log m \quad (6)$$

推出的, 而这个不等式則是将不等式(2)应用于函数 $f^{(k)}(x)$ 而求得的。由(5)及(6)推得估值

$$\frac{|R_n|}{M_k} \leqslant \frac{A \log n}{(n+1)^k} + A \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{m^k} - \frac{1}{(m+1)^k} \right) \log m.$$

* 在已作的假定下, 傅立叶級数处处收敛于函数 $f(x)$ [658]。

最后和式重新变换为下列形式[参考 371]:

$$\frac{\log(n+1)}{(n+1)^k} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^k} [\log(m+1) - \log m].$$

如果利用不等式

$$\log(m+1) - \log m = \log\left(1 + \frac{1}{m}\right) < \frac{1}{m}$$

及

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{k+1}} < \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n^k}$$

[参考 364, a)], 则逐步求得它的估值:

$$\begin{aligned} \frac{\log(n+1)}{(n+1)^k} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)^k} &< \frac{\log(n+1)}{(n+1)^k} + \\ &+ \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{k+1}} < \frac{\log n}{n^k} + \frac{1}{n^{k+1}} + \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n^k} < \frac{\log n + 2}{n^k}. \end{aligned}$$

回到 $|R_n|$, 关于它的大小我们得到这样一个估值:

$$|R_n| < M_k \frac{2A \log n + 2A}{n^k} \quad (n \geq 2),$$

当然, 适当改变 A , 由此容易推出(4)。

2° 现假定 $k=2h+1$ 。依靠公式(16), 我们改写 R_n 为:

$$R_n = (-1)^h \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^k} (\alpha_m^{(k)} \sin mx - b_m^{(k)} \cos mx).$$

这次我们看出在括号内的表示式是与函数 $f^{(k)}(x)$ 的傅立叶级数共轭的级数的第 m 项[670]。因为我们有它的部分和 $\tilde{\sigma}_m = \tilde{\sigma}_m(x)$ 的估值

$$|\tilde{\sigma}_m| \leq AM_k \log m$$

[参考(3)], 所以其余的推理与上面已说过的没有什么不同。

681. 函数有有界变差的 k 级导数的情形 首先考虑以 2π 为周

期且在区間 $[-\pi, \pi]$ 上其本身有有界变差的函数 $f(x)$ 。轉用斯底尔吉斯积分并应用分部积分的公式[552], 我們將函数 $f(x)$ 的系数 a_n 表成下列形式:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} (S) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d \frac{\sin nx}{n} = \\ &= f(x) \frac{\sin nx}{n\pi} \bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} (S) \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx df(x). \end{aligned} \quad (7)$$

积分号外的一项为零, 至于最后一个积分, 則用通常对斯底尔吉斯积分所应用的方法[557, 2°]来估值, 我們得到

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx df(x) \right| \leq \max |\sin nx| \cdot \overset{\pi}{V} f(x)$$

这样, 如果用 V 表示函数 $f(x)$ 在区間 $[-\pi, \pi]$ 上的总变差, 最后得

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi} V \cdot \frac{1}{n}.$$

系数 b_n 的估值也是这样。

如果与同一变量有关的两变量 α 及 β 具有下述性质, 即它們的比值保持有界:

$$\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \leq M \quad (M = \text{常数}),$$

則用下列方式写出这个事实:

$$\beta = O(\alpha). *$$

应用这符号, 我們能表示出有界变差函数的傅立叶系数 a_n, b_n 的已证明的性质如下:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

現在对于以 2π 为周期的函数 $f(x)$, 設其 k 級($k \geq 1$)导数 $f^{(k)}(x)$

* 比較这个符号与我們在第60款中所引用的符号 $o(\alpha)$ 。

存在并在区間 $[-\pi, \pi]$ 上有有界变差; 則对于函数 $f(x)$ 的傅立叶系数, 估值

$$|a_n|, |b_n| \leq \frac{V_k}{\pi} \cdot \frac{1}{n^{k+1}} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

为真, 其中 V_k 是函数 $f^{(k)}(x)$ 在区間 $[-\pi, \pi]$ 上的总变差。

比較剛才所证明的結果与第 678 款中的公式(1a)及(1b)立得上述命题。

因此, 这一次,

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right). \quad (8)$$

知道了傅立叶系数的阶次, 現在就不难估值傅立叶級数的余部: 在同样的假定下, 对于函数 $f(x)$ 的傅立叶級数的余部 $R_n(x)$, 我們有不等式

$$|R_n(x)| < \frac{V_k}{n^k}.$$

事实上,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} (|a_m| + |b_m|) \leq \\ &\leq \frac{2V_k}{\pi} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{k+1}} < \frac{2V_k}{k\pi} \cdot \frac{1}{n^k} < \frac{V_k}{n^k}. \end{aligned}$$

这样, 对于函数的第 k 級导数加上某些較严格的条件(与上款中的条件比較), 則可引导出余部 $R_n(x)$ 的較好的估值: 在估值的分子中, $\log n$ 不再出現。

附注 我們再次強調在本款与前款的推理中, 函数 $f(x)$ 及其导数的周期性起着主要的作用。如果函数預先只是在区間 $[-\pi, \pi]$ 上被給出, 則必須有下列条件成立:

$$f(-\pi) = f(\pi), f'(-\pi) = f'(\pi), \dots, f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi).$$

在这里各导数理解为单側导数。只有这时才能保证周期地开拓出的函数, 有連續的逐級导数, 而且上面所作出的估值也才能成立。

682. 函数及其导数的不連續性对于傅立叶系数的无穷小阶的影响 我們已看到如函数有許多連續导数, 則能保证其傅立叶系数迅速减小, 并且因而能保证傅立叶級数迅速收敛。

然而在数学的应用上, 时常要遇到这种情况: 在从 $-\pi$ 到 π 的范圍中, 由若干个在各别的区間有一定个导数的函数“接連”而得一函数, 要把这函数展开为傅立叶級数。这样, 在“接連”点处, 这函数本身以及它的各級导数都有跳跃。这种不連續性降低了傅立叶系数的无穷小阶, 并且不难了解, 同时也降低了傅立叶級数的余部的无穷小阶。我們来詳細研究这个問題。

1° 設除去“接連点”

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \quad (9)$$

外, 函数 $f(x)$ 在区間 $[-\pi, \pi)$ 上連續, 而它在各“接連点”处有第一种不連續, 即具有跳跃

$$\delta_{\mu}^{(0)} = f(\xi_{\mu} + 0) - f(\xi_{\mu} - 0) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m).$$

如果差数

$$\delta_0^{(0)} = f(-\pi + 0) - f(\pi - 0)$$

不等于零, 在不連續点中, 还必须加入点 $\xi_0 = -\pi$, 因为周期地开拓函数时, 在这点出现了不連續性。

又假定只除去在所指出的各点外, 有限的导数 $f'(x)$ 处处存在, 并假定它在区間 $[-\pi, \pi]$ 上绝对可积分。对于函数 $f(x)$ 的系数 a_n 的表示式, 我們重新应用斯底尔吉斯积分与分部积分法 [参考等式(7)]。如果在最后一积分中分出与函数 $f(x)$ 的跳跃相对应的項, 則得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \\ &= -\frac{1}{n\pi} \sum_{\mu=1}^m \delta_{\mu}^{(0)} \sin n\xi_{\mu} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx \end{aligned}$$

或較簡單地

$$a_n = \frac{A_n}{n} - \frac{b'_n}{n}, \quad (10)$$

其中已令

$$A_n = -\frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^m \delta_{\mu}^{(0)} \sin n\xi_{\mu}, \quad (11)$$

并与以前相同, 用 b'_n 表示函数 $f'(x)$ 的傅立叶系数。同样能断定,

$$b_n = \frac{B_n}{n} + \frac{a'_n}{n}, \quad (12)$$

其中

$$B_n = \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=0}^m \delta_{\mu}^{(0)} \cos n\xi_{\mu}, \quad (13)$$

而 a'_n 同样也表示 $f'(x)$ 的傅立叶系数。

现在我们假定导数 $f'(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上有有界变差。因为在这个假定下, 它的傅立叶系数有阶 $O\left(\frac{1}{n}\right)$ [681], 所以也能将公式(10)与(12)写成这样:

$$a_n = \frac{A_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (14)$$

$$b_n = \frac{B_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (15)$$

这些公式明白指出: 如果函数有不连续点, 则虽然在其余一切点导数存在, 傅立叶系数的无穷小的阶仍是怎样立即降低。

反之, 现在设已知某一函数 $f(x)$ 的傅立叶系数有(14)与(15)的形式, 而且 A_n, B_n 的大小由公式(11)与(13)所确定, 其中 $\{\delta_{\mu}^{(0)}\}$ 是已给的一组 $m+1$ 个数。则函数 $f(x)$ 就在点(9)处一定有第一种不连续, 并且有跳跃, 且其跳跃分别等于 $\delta_{\mu}^{(0)}$ ($\mu=1, 2, \dots, m$); 此外, 对于这函数, 极限 $f(-\pi+0), f(\pi-0)$ 存在*, 并且它们的差是 $\delta_0^{(0)}$ 。在其余各点处,

* 在这里以及在后面。我们总是认为

$$f(\xi_{\mu}) = \frac{1}{2} [f(\xi_{\mu}+0) + f(\xi_{\mu}-0)],$$

同时

$$f(-\pi) = f(\pi) = \frac{1}{2} [f(-\pi+0) + f(\pi-0)],$$

从而一切不连续点都是正规的 [参考 658]。

函数連續。

为了要证实此点, 例如用 $(\xi_\mu, \xi_{\mu+1})$ 內的綫性函数作出補助函数 $\bar{f}(x)$, 使得它在所指定的点恰好有所指定的跳跃。与(14)及(15)类似, 对于它的傅立叶系数我們有:

$$a_n = \frac{A_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad b_n = \frac{B_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

其中 A_n 与 B_n 有前述的值。这时差数 $f(x) - \bar{f}(x)$ 有如下列形式的展开式

$$\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

其中

$$\alpha_n, \beta_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

即

$$|\alpha_n|, |\beta_n| \leq \frac{K}{n^2} \quad (K = \text{常数}).$$

这个級数以收斂級数 $2K \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 为强函数, 它处处一致收斂。由

此已可見, 差数 $f(x) - \bar{f}(x)$ 表示以 2π 为周期的連續函数, 从而 $f(x)$ 也与 $\bar{f}(x)$ 在相同的点处有相同的跳跃。

2° 除去已述过的假定以外, 现在还假定一級导数 $f'(x)$ 有极限值

$$f'(-\pi+0), f'(\xi_\mu \pm 0), f'(\pi-0)$$

而且二級导数 $f''(x)$ 处处(“接連点”除外)存在, 并在区間 $[-\pi, \pi]$ 上有有界变差。

利用已經证明的結果, 則可断言这时

$$a'_n = \frac{A'_n}{n} - \frac{b''_n}{n} = \frac{A'_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$b'_n = \frac{B'_n}{n} + \frac{a''_n}{n} = \frac{B'_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

此处用 A'_n, B'_n 表示类似于(11)及(13)的量

$$A'_n = -\frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^m \delta_{\mu}^{(1)} \sin n\xi_{\mu}, \quad (16)$$

$$(n=1, 2, 3, \dots),$$

$$B'_n = \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=0}^m \delta_{\mu}^{(1)} \cos n\xi_{\mu}, \quad (17)$$

而且

$$\delta_{\mu}^{(1)} = f'(\xi_{\mu} + 0) - f'(\xi_{\mu} - 0) \quad (\mu=1, 2, \dots, m),$$

$$\delta_0^{(1)} = f'(-\pi + 0) - f'(\pi - 0).$$

将这些 a'_n 与 b'_n 的表示式代入公式(10)及(12), 则对于所考虑的情形, 最后得到:

$$a_n = \frac{A_n}{n} + \frac{B'_n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad (18)$$

$$b_n = \frac{B_n}{n} + \frac{A'_n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \quad (19)$$

在这里同样可证明在某种意义下的逆断語。設函数 $f(x)$ 的傅立叶系数有如(18)及(19)的形式, 其中 A_n, B_n, A'_n, B'_n 的大小由公式(11), (13), (16), (17)所确定, 而 $\{\delta_{\mu}^{(0)}\}, \{\delta_{\mu}^{(1)}\}$ 則为先給出的一組数。可以断言函数 $f(x)$ 在区間 $(-\pi, \pi)$ 內除去点 ξ_{μ} 外处处連續并且有連續导数 $f'(x)$, 而在点 ξ_{μ} 处, 函数及它的导数有跳跃, 且其跳跃分別等于 $\delta_{\mu}^{(0)}$ 及 $\delta_{\mu}^{(1)}$; 此外

$$f(-\pi + 0) - f(\pi - 0) = \delta_0^{(0)}$$

并且

$$f'(-\pi + 0) - f'(\pi - 0) = \delta_0^{(1)}.$$

与上面相仿, 也要作出補助函数 $\bar{f}(x)$ 来证明这断語。在这次能用二次函数作補助函数, 使得它与它的导数就在所指定的点有所指定的跳跃。容易看出差数 $f(x) - \bar{f}(x)$ 将展开成为有 $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ 阶系数的傅立叶级数。这时不仅这个级数, 而且由它逐項微分所得的有 $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ 阶系

数的級数, 均一致收敛, 从而差数 $f(x) - \bar{f}(x)$ 与它的导数同是周期的 (以 2π 为周期) 及連續的。由此推得所需要的断語。

3° 在一般情形下, 設 $f, f', \dots, f^{(k-1)}$ 在 $[-\pi, \pi)$ 上除去点 $\xi_\mu (\mu=0, 1, \dots, m)$ 外連續, 而在点 ξ_μ 处, 这些函数有跳跃, 且其跳跃分別等于

$$\delta_\mu^{(0)}, \delta_\mu^{(1)}, \dots, \delta_\mu^{(k-1)} \quad (\mu=0, 1, \dots, m).$$

此外, 假定导数 $f^{(k)}$ 处处 (“接連点” 除外) 存在, 并且在区間 $[-\pi, \pi]$ 上有有界变差。引用符号:

$$\begin{aligned} A_n^{(i)} &= -\frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^m \delta_\mu^{(i)} \sin n\xi_\mu, \\ B_n^{(i)} &= \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=0}^m \delta_\mu^{(i)} \cos n\xi_\mu. \end{aligned} \quad (i=0, 1, \dots, k-1; \quad n=1, 2, 3, \dots)$$

則当 k 为奇数及偶数时, 下列公式分別成立:

$$a_n = \frac{A_n}{n} - \frac{B'_n}{n^2} - \frac{A''_n}{n^3} + \frac{B'''_n}{n^4} + \dots \begin{cases} + (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{A_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \\ + (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{B_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right); \end{cases} \quad (20)$$

$$b_n = \frac{B_n}{n} + \frac{A'_n}{n^2} - \frac{B''_n}{n^3} - \frac{A'''_n}{n^4} + \dots \begin{cases} + (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{B_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \\ + (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{A_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right). \end{cases} \quad (21)$$

如果已知类似的公式成立, 則反之, 关于函数本身及其 $k-1$ 个导数的不連續点与跳跃量可以(如上所述)作出結論。

683. 在区間 $[0, \pi]$ 上給出函数时的情形 如我們所知, 如果函数 $f(x)$ 只从 0 到 π 給定, 則当适当的条件成立时, 可将它在这区間上展开成余弦級数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (0 \leq x \leq \pi), \quad (22)$$

也可展开成正弦级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (0 < x < \pi) \quad (23)$$

[663]。在实用上最常遇到这种展开式。上款的结果也能应用到所考虑的情形, 如果设想将函数 $f(x)$ 用下列方式开拓到区间 $[-\pi, 0)$ 上的话: (a) 用偶的方式——为的是得到余弦级数; 或者 (b) 用奇的方式——为的是得到正弦级数。

設 $0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_m < \pi$

是在区间 $(0, \pi)$ 内的点, 函数与它的一直到 $(k-1)$ 级导数在这些点处都有跳跃, 并且与在前面一样, 用

$$\delta_{\mu}^{(0)}, \delta_{\mu}^{(1)}, \dots, \delta_{\mu}^{(k-1)} \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

表示跳跃量。

在用偶的方式开拓函数的情形下, 在点 $-\xi_{\mu}$ 处也重新产生点 ξ_{μ} 处的跳跃, 但其符号相反; 当用奇的方式开拓这个函数时, 在点 $-\xi_{\mu}$ 处产生跳跃, 而其符号不变。又对于偶函数,

$$f(+0) - f(-0) = 0, \quad f(-\pi+0) - f(\pi-0) = 0,$$

对于奇函数, 跳跃

$$f(+0) - f(-0) = 2f(+0),$$

$$f(-\pi+0) - f(\pi-0) = -2f(\pi-0)$$

一般地可能异于零。最后, 我们还注意当微分时, 偶函数变为奇函数, 而奇函数变为偶函数。如果考虑到所有这些说明, 则关于我们的函数的余弦或正弦展开式的系数 a_n 与 b_n , 分别得到形如(20)及(21)的公式, 但 $A_n^{(i)}$ 与 $B_n^{(i)}$ 则有这样的数值:

$$\left. \begin{aligned} A_n^{(i)} &= -\frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^m \delta_{\mu}^{(i)} \sin n\xi_{\mu}, \\ B_n^{(i)} &= \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{\mu=1}^m \delta_{\mu}^{(i)} \cos n\xi_{\mu} + f^{(i)}(+0) - \cos n\pi \cdot f^{(i)}(\pi-0) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

($n = 1, 2, 3, \dots$)

与这些公式相关,我们作出下一重要的说明。設在整个区间 $[0, \pi]$ 上,函数 $f(x)$ 与它的直到 $(k-1)$ 級导数連續;此外,設 k 級导数也存在,并且在这区间上有有界变差。然而一般說来,对于展开式(22)与(23)的系数 a_n 与 b_n ,不可能断定它們的阶是 $O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$ [再参考 681 公式(8);]。实际上,虽然在这种情形下一切和数 $A_n^{(i)}$ 是零,但是不可能說和数

$$B_n^{(i)} = \frac{2}{\pi} \{ f^{(i)}(0) - \cos n\pi \cdot f^{(i)}(\pi) \}$$

也是这样。用奇的方式开拓函数,在 $x=0$ 处人为地造成了不連續性,或破坏了函数与它的偶数級导数的周期性;而用偶的方式开拓函数,則使得奇数級导数也是这样:

因此,如果需要完全利用函数的可微分性,將所述函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上展开成迅速收敛的級数,則为了这个目的,用下列条件所确定的 $(2k-1)$ 次多项式 $r(x)$ 將函数延續到区间 $[-\pi, 0)$ 上:

$$\begin{aligned} r(0) &= f(0), r'(0) = f'(0), \dots, r^{(k-1)}(0) = f^{(k-1)}(0), \\ r(-\pi) &= f(\pi), r'(-\pi) = f'(\pi), \dots, r^{(k-1)}(-\pi) = f^{(k-1)}(\pi). \end{aligned}$$

[例如可用在第 245 款中所指出的方法作出这种多项式。]用这种方法,我們使函数在整个的区间 $[-\pi, \pi]$ 保持可微分性。

設对于 $0 \leq x \leq \pi$, $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$ 。为了作出这个函数的有 $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ 阶系数的展开式,我們用多项式

$$r(x) = x - \frac{\pi}{2} + x^3 \left[-\frac{12}{\pi^4}x^2 - \frac{30}{\pi^3}x - \frac{20}{\pi^2} \right] = -\frac{12}{\pi^4}x^5 - \frac{30}{\pi^3}x^4 - \frac{20}{\pi^2}x^3 + x - \frac{\pi}{2}$$

开拓它。如果对这样开拓出的函数作出通常的傅立叶級数,則对在区间 $[0, \pi]$ 上的函数 $f(x)$,就能得到所求的迅速收敛的展开式:

$$\frac{240}{\pi^3} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2\nu-1)^4} - \frac{12}{\pi^2(2\nu-1)^6} \right] \cos(2\nu-1)x + \frac{1440}{\pi^4} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu)^5} \sin 2\nu x.$$

这里叙述的是阿·斯·馬立叶夫所指出的方法。

684. 分离奇异性质法 設函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上是由 x 的倍角的余弦級数(22)或正弦級数(23)所給出*,而且这些展开式的系数有如(20)或(21)的形式,其中 $A_n^{(i)}$, $B_n^{(i)}$ 是由公式(24)所确定。这些級数收敛得較慢,并且我們知道函数与它的导数的不連續性是造成这种現

* 实际上时常遇到的情况是:展开式是在区间 $[0, l]$ 上用 $\frac{\pi x}{l}$ 的倍角的余弦或正弦作出的,这种情况可由課文所考虑的情况中簡單地将 x 換成 $\frac{\pi x}{l}$ 而得。

象的原因。对于这种情况，阿·纳·克雷洛夫院士提出了首创的分离奇异性质法，应用这种方法可以改善级数的收敛性。

实在说来，这种方法的本质已经包含在前面的叙述中。它在于用熟知的三角展开式作出（逐段为多项式的）辅助函数 $\bar{f}(x)$ ，使其好似吸收了已给函数 $f(x)$ 的展开式中所明白表出的奇异性质。从函数 $f(x)$ 中减去这个辅助函数，并且相应地从已给函数的展开式中减去辅助函数的展开式，这样我们就分离了已给展开式的收敛得较慢的一部分，从而余下的级数已经迅速收敛。

然而，如果利用已知的展开式，知道能直接求收敛得较快的部分的和，则可最简捷地获得上述结果。

1° 设已给余弦级数(22)，并且

$$a_n = \frac{A_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

其中

$$A_n = -\frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^m c_{\mu} \sin n\xi_{\mu}. \quad (25)$$

给出点

$$0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m < \pi$$

并且给出一组数 $\{c_{\mu}\}$ 。直接确定级数的和

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \cos nx.$$

用简单的变换可引导出下面的结果：

$$g(x) = \sum_{\mu=1}^m \frac{c_{\mu}}{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x - \xi_{\mu})}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x + \xi_{\mu})}{n} \right] = \sum_{\mu=1}^m \frac{c_{\mu}}{\pi} \varphi_{\mu}(x),$$

其中和式

$$\varphi_{\mu}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x - \xi_{\mu})}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x + \xi_{\mu})}{n}$$

是容易算出的，如果我们回忆到熟知的[664, 2)]展开式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n}$$

的话。这展开式的和当 $0 < z < 2\pi$ 时是 $\frac{\pi - z}{2}$, 而且当 $-2\pi < z < 0$ 时显然是 $-\frac{\pi + z}{2}$ 。这样,

$$\varphi_\mu(x) = \begin{cases} -\frac{\pi + x - \xi_\mu}{2} - \frac{\pi - x - \xi_\mu}{2} = -\pi + \xi_\mu & \text{对于 } x < \xi_\mu, \\ \frac{\pi - x + \xi_\mu}{2} - \frac{\pi - x - \xi_\mu}{2} = \xi_\mu & \text{对于 } x > \xi_\mu. \end{cases}$$

于是在每一区间 $(\xi_\mu, \xi_{\mu+1})$ ($\mu = 0, 1, \dots, m$) 的内部*, $g(x) = \text{常数} = \gamma_\mu$, 而在点 ξ_μ ($\mu = 1, 2, \dots, m$) 处, 它有恰等于 c_μ 的跳跃。因此我们有 $\gamma_\mu - \gamma_{\mu-1} = c_\mu$, 从而

$$\gamma_\mu = \gamma_0 + \sum_{\lambda=1}^{\mu} c_\lambda, \quad (26)$$

又因为 $\varphi_\mu(0) = -\pi + \xi_\mu$, 所以

$$\gamma_0 = g(0) = \sum_{\mu=1}^m \frac{c_\mu}{\pi} (-\pi + \xi_\mu) = \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^m c_\mu \xi_\mu - \sum_{\mu=1}^m c_\mu. \quad (27)$$

这样, 函数 $g(x)$ 便完全确定了。

例如, 设我们有展开式

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n} \cos nx.$$

在这里

$$A_n = -\frac{2}{\pi} c_1 \sin n \frac{\pi}{2},$$

而且 $c_1 = -\frac{\pi}{2}$, $\xi_1 = \frac{\pi}{2}$ 。这时

$$\gamma_0 = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4},$$

或者直接有

$$\gamma_0 = g(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{2v-1} = \frac{\pi}{4}.$$

然后

$$\gamma_1 = \gamma_0 + c_1 = -\frac{\pi}{4}.$$

因此, 最后求得函数 $g(x)$ 当 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 时等于 $\frac{\pi}{4}$, 当 $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ 时等于 $-\frac{\pi}{4}$ 。

2° 现在考虑余弦级数(23), 而且

$$b_n = \frac{B_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

其中

* 为方便计, 我们令 $\xi_0 = 0$, $\xi_{m+1} = \pi$ 。

$$B_n = \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{\mu=1}^m c_\mu \cos n\xi_\mu + c_0 - c_{m+1} \cos n\pi \right\}. \quad (28)$$

但在这次我们的目的是直接求级数

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n} \sin nx$$

的和。我们有

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{\mu=1}^m \frac{c_\mu}{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x+\xi_\mu)}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x-\xi_\mu)}{n} \right] + \\ &+ \frac{2c_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - \frac{c_{m+1}}{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x+\pi)}{n} + \frac{\sin n(x-\pi)}{n} \right] = \\ &= \sum_{\mu=1}^m \frac{c_\mu}{\pi} \varphi_\mu(x) + \frac{c_0}{\pi} (\pi - x) - \frac{c_{m+1}}{\pi} \varphi(x), \end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{\pi - (x+\pi)}{2} - \frac{\pi + (x-\pi)}{2} = -x \quad \text{关于一切 } x, \\ \varphi_\mu(x) &= \begin{cases} \frac{\pi - (x+\xi_\mu)}{2} - \frac{\pi + (x-\xi_\mu)}{2} = -x & \text{关于 } x < \xi_\mu, \\ \frac{\pi - (x+\xi_\mu)}{2} + \frac{\pi - (x-\xi_\mu)}{2} = \pi - x & \text{关于 } x > \xi_\mu. \end{cases} \end{aligned}$$

显然

$$h(+0) = c_0, \quad h(\pi-0) = c_{m+1}$$

$$h(\xi_\mu+0) - h(\xi_\mu-0) = c_\mu \quad (\mu = 1, 2, \dots, m).$$

同时导数 $h'(x) = \text{常数} = \gamma$ 处处(除去不连续点外)存在, 其中

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \left(c_{m+1} - c_0 - \sum_{\mu=1}^m c_\mu \right). \quad (29)$$

函数 $h(x)$ 在每一区间 $(\xi_\mu, \xi_{\mu+1})$ 内都是 x 的线性函数, 其中 x 的系数是 γ :

$$\text{当 } x_\mu < x < x_{\mu+1} \text{ 时, } h(x) = \gamma x + \delta_\mu$$

$$(\mu = 0, 1, \dots, m),$$

而且

$$\delta_0 = c_0, \quad \delta_1 = c_0 + c_1, \dots, \quad \delta_m = c_0 + c_1 + \dots + c_m. \quad (30)$$

容易作出函数 $h(x)$ 的图解(图 136)。联结点

$$(0, c_0) \text{ 及 } \left(\pi, c_{m+1} - \sum_{\mu=1}^m c_\mu \right)$$

的直线显然有角系数 γ , 余下的作法可以从图上看出来。

例如, 設

$$h(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \frac{\pi}{2}}{n} \sin nx,$$

因此

$$B_n = -\frac{2}{\pi} \cos n \frac{\pi}{2}, \quad c_0 = c_2 = 0, \quad c_1 = -1, \quad \xi_1 = \frac{\pi}{2}.$$

对于所給的情形, 由前面的作法得到圖在圖 137 上的圖解。

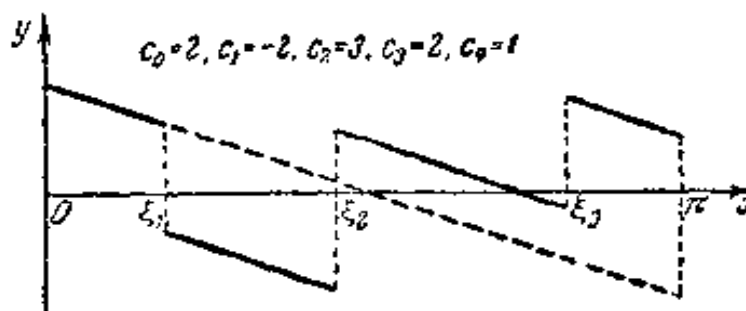


圖 136.

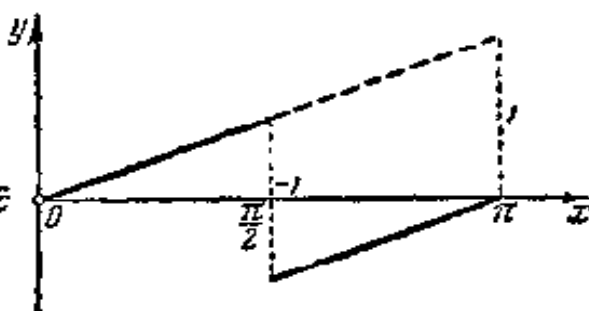


圖 137.

因此, 在这里

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x & \text{当 } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ 时,} \\ \frac{1}{\pi}x - 1 = \frac{1}{\pi}(x - \pi) & \text{当 } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \text{ 时.} \end{cases}$$

为了改善級数

$$f(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} \cos n \frac{\pi}{2} \sin nx \quad (31)$$

的收斂性, 我們要应用这一結果。因为

$$\frac{n}{n^2-1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n^2-1)},$$

所以在所給的情形下,

$$b_n = -\frac{2}{\pi} \frac{\cos n \frac{\pi}{2}}{n} - \frac{2}{\pi} \cos n \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n(n^2-1)}$$

如果从函数 $f(x)$ 中减去剛才求得的函数 $h(x)$, 則得差数 $f(x) - h(x)$ 的展开式

$$-\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \frac{\pi}{2}}{n(n^2-1)} \sin nx,$$

它的系数已經是 $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ 阶!

3° 回到余弦級数(22), 我們現在假定

$$a_n = \frac{A_n}{n} - \frac{B'_n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

其中 A_n 是由公式(25)表出, 而 B'_n 则由(28)中将常数 $c_0, c_1, \dots, c_{m+1}$ 换成其他常数 $c'_0, c'_1, \dots, c'_{m+1}$ 而得。因为我们会[参考 1°]分离三角级数中与系数展开式的第一阶诸项相关的部分, 所以我们转到第二阶诸项。

设(为了简化符号, 用 B_n 代替 B'_n)

$$g_1(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n^2} \cos nx.$$

显然, $g_1(x)$ 是 x 的连续函数。逐项微分这级数, 得到新级数

$$g'_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n} \sin nx,$$

我们已会求这级数的和[2°]。因为在区间 $[0, \pi]$ 的任何一个不含区间端点及不连续点的闭合部分上, 新级数一致收敛*, 所以(除去这些点外)实际上它的和表示函数 $g_1(x)$ 的导数。因此, 由 2°,

$$g'_1(x) = \gamma x + \delta_\mu \text{ 关于 } \xi_\mu < x < \xi_{\mu+1}, \\ (\mu = 0, 1, \dots, m)$$

其中 γ 及 δ_μ 是由公式(29)及(30)确定的。积分后, 求得(考虑到连续性):

$$g_1(x) = \frac{1}{2} \gamma x^2 + \delta_\mu x + \varepsilon_\mu \text{ 关于 } \xi_\mu \leq x \leq \xi_{\mu+1}, \\ (\mu = 0, 1, \dots, m)$$

函数 $g_1(x)$ 在分点 $\xi_{\mu+1}$ 处的值可同时由两个公式求得, 所以

$$\frac{1}{2} \gamma \xi_{\mu+1}^2 + \delta_\mu \xi_{\mu+1} + \varepsilon_\mu = \frac{1}{2} \gamma \xi_{\mu+1}^2 + \delta_{\mu+1} \xi_{\mu+1} + \varepsilon_{\mu+1}.$$

因此(如果回忆到 $\delta_{\mu+1} = \delta_\mu + c_{\mu+1}$):

$$\varepsilon_{\mu+1} = \varepsilon_\mu - c_{\mu+1} \xi_{\mu+1}.$$

如果已知 ε_0 , 则由这公式可逐步得到 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ 。至于 ε_0 , 则由等式

$$\varepsilon_0 = g_1(0) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n^2}$$

确定。这级数的和也能求出为有限的形状, 只要回忆到 B_n 的表示式, 并且利用已知的 [664, 9)] 展开式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$$

例如, 如果已给

* 这是由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 的熟知的性质推出的。

$$g_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n \frac{\pi}{3}}{n^2} \cos nx,$$

则在这里

$$B_n = -1 + \cos n \frac{\pi}{3}, \quad c_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad c_1 = \frac{\pi}{2}, \quad c_2 = 0, \quad \xi_1 = \frac{\pi}{3},$$

$$\gamma = 0, \quad \delta_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad \delta_1 = 0.$$

为了确定

$$\varepsilon_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \frac{\pi}{3}}{n^2},$$

我们在上述展开式中先令 $x=0$, 然后令 $x=\frac{\pi}{3}$; 结果求得 $\varepsilon_0 = \frac{5\pi^2}{36}$ 。这时 $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - c_1 \xi_1 = -\frac{\pi^2}{36}$ 。最后得

$$g_1(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi^2}{36}, & \text{如果 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \\ -\frac{\pi^2}{36}, & \text{如果 } \frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

4° 现在在正弦级数(23)中, 令

$$b_n = \frac{B_n}{n} + \frac{A'_n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

其中 B_n 与前面一样, 是由公式(28)所表出, 而 A'_n 则按照(25)的形式作出——但将 c 换成 c' 。在这里, 只讨论第二阶的项就够了。

考虑级数 (又用 A_n 代替 A'_n)

$$h_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n^2} \sin nx,$$

它显然表示连续函数。微分:

$$h'_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \cos nx = g(x)$$

[参考 1°]。与以上同样, 不难证实 (除在区间的端点及点 ξ_μ 外) $g(x)$ 实际上是 $h_1(x)$ 的导数。由 1°,

$$h'_1(x) = \gamma_\mu \text{ 关于 } \xi_\mu < x < \xi_{\mu+1} \quad (\mu = 0, 1, \dots, m),$$

其中 γ_μ 是由公式(26)及(27)所确定。因此

$$h_1(x) = \gamma_\mu x + \delta_\mu \text{ 关于 } \xi_\mu \leq x \leq \xi_{\mu+1}.$$

而且 $\delta_0 = 0$ [因为 $h_1(0) = 0$], 其余的 δ_μ 则由函数 $h_1(x)$ 在点 $\xi_{\mu+1}$ 处的连续性的条件所逐步确定:

$$\gamma_\mu \xi_{\mu+1} + \delta_\mu = \gamma_{\mu+1} \xi_{\mu+1} + \delta_{\mu+1} \quad (\mu = 0, 1, \dots, m-1),$$

由此得

$$\delta_{\mu+1} = \delta_{\mu} - c_{\mu+1}k_{\mu+1}.$$

例如, 设已给级数

$$h_1(x) = \sin x - \frac{1}{9} \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5x - \dots,$$

它可表成下列形式:

$$h_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n^2} \sin nx.$$

在这里

$$\xi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad c_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad \gamma_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \gamma_1 = -\frac{\pi}{4}, \quad \delta_0 = 0, \quad \delta_1 = \frac{\pi^2}{4}.$$

[参考 1° 中的例], 因此

$$h_1(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}x, & \text{如果 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi}{4}(\pi - x), & \text{如果 } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

5° 用适当的方式, 对于三角级数, 也能求出与其系数展开式中较高阶项相关的部分的和。现不建立一般的方法, 而在所给的每个具体情形下, 进行在上面考虑一般形式的级数时所做过的手续, 更为实际。

为了举例, 我们重新回到级数(31); 在这次令

$$\frac{n}{n^2-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^3(n^2-1)},$$

将 b_n 表成下列形式:

$$b_n = -\frac{2}{\pi} \cos n \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n} - \frac{2}{\pi} \cos n \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^3} - \frac{2}{\pi} \cos n \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^3(n^2-1)},$$

与此相应, 将函数 $f(x)$ 分成三部分。其中第一部分是在 2° 中已经计算过的函数。考虑第二部分

$$g(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \frac{\pi}{2}}{n^3} \sin nx.$$

微分两次, 我们得到

$$g'(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \frac{\pi}{2}}{n^2} \cos nx,$$

$$g''(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \frac{\pi}{2}}{n} \sin nx.$$

最后的函数只与 $h(x)$ 相差一符号:

$$g''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi}x, & \text{如果 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{1}{\pi}(x-\pi), & \text{如果 } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

由此积分,得

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}x^2 + \gamma_0 & \text{关于 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{1}{2\pi}(x-\pi)^2 + \gamma_1 & \text{关于 } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

令此处所得的 $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 的两个值相等, 得 $\gamma_1 = \gamma_0$. 在 $g'(x)$ 的展开式中直接令 $x=0$, 容易确定 γ_0 的值: $\gamma_0 = \frac{\pi}{24}$. 再积分一次, 并且注意 $g(0) = g(2\pi) = 0$, 我們得到

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6\pi}x^3 + \gamma_0 x & \text{关于 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{1}{6\pi}(x-\pi)^3 + \gamma_0(x-\pi) & \text{关于 } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

这样, 函数 $g(x)$ 就完全确定了, 并且我們最后有

$$f(x) = h(x) + g(x) + \varphi(x),$$

其中函数 $\varphi(x)$, 虽然其有限形式我們不知道, 但是能由展开式

$$\varphi(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n \frac{\pi}{2}}{n^3(n^2-1)} \sin nx$$

給出, 其中系数已是 $O\left(\frac{1}{n^5}\right)$ 阶, 并且显然迅速减小。

§ 6. 傅立叶积分

685. 傅立叶积分作为傅立叶級数的极限情形 在这里我們要在实质上作出傅立叶对于他的积分公式所作的討論, 这种討論虽然不严格, 可是因其簡洁所以值得加以注意**。

如果在有限区間 $[-l, l]$ 上給出函数 $f(x)$, 則在确定的条件下(我們在这里不研究这些条件), 可在这区間上将它用三角級数表示出来:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi x}{l} + b_m \sin \frac{m\pi x}{l},$$

* 取此处所得 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 的两值相等, 又得到 $\gamma_0 = \frac{\pi}{24}$ 。

** 科西也曾經不依賴傅立叶而独立推出过这公式。

其中

$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{m\pi u}{l} du, \quad b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \sin \frac{m\pi u}{l} du$$

(m=0, 1, 2, ...) (m=1, 2, ...)

[参考 662]。将 a_m 与 b_m 用它们的表示式来代替，则级数可改写成下列形式：

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(u) du + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{m\pi}{l} (u-x) du. \quad (1)$$

现设函数 $f(x)$ 被定义在整个无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 上。在这种情形下，不论 x 是怎样，对于任意的 $l > |x|$ ，相应的值 $f(x)$ 由展开式(1)表出。在这里取 $l \rightarrow +\infty$ 时的极限，我们设法求出这展开式的“极限形式”。

关于等式右端的第一项，自然可设它趋近于零*。回到无穷级数，我们能将余弦符号后的因子 $\frac{m\pi}{l}$ 看作某一（从 0 连续变到 $+\infty$ 的）参数 z 所取的间断的数值

$$z_1 = \frac{\pi}{l}, \quad z_2 = \frac{2\pi}{l}, \quad \dots, \quad z_m = \frac{m\pi}{l}, \quad \dots;$$

并且当 $l \rightarrow +\infty$ 时，增量

$$\Delta z_m = z_{m+1} - z_m = \frac{\pi}{l}$$

显然趋近于零。用这种符号，级数可改写成：

$$\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \Delta z_{m-1} \int_{-l}^l f(u) \cos z_m (u-x) du.$$

它好像是区间 $[0, +\infty]$ 上的 z 的函数

* 例如如果假定积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du$ 收敛，则这结果就成为明显的了。

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x) du$$

的积分和。取 $l \rightarrow +\infty$ 时的极限, 我們得到的是积分而不是級数; 用这种方法就得到傅立叶积分公式:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x) du.$$

展开差角余弦的表示式, 可表这公式成下列形式:

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(z) \cos zx + b(z) \sin zx] dz,$$

其中

$$a(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos zu du, \quad b(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin zu du.$$

在这里显然发现与三角展开式相似之点: 在这里只要将取自然数值的参数 m 换成連續变化的参数 z , 而将无穷級数换成积分。系数 $a(z)$ 与 $b(z)$ 的构成也与傅立叶系数相像。

当然, 所有这些討論都只有导入法的性质; 还需說明傅立叶公式成立的实际条件。但是当作出严格的推理时, 我們將要依照对傅立叶級数推理的基本步驟。

686. 預先的說明 現假定函数 $f(x)$ 在无穷区間 $[-\infty, +\infty]$ 上絕對可积分。在这个假定下, 考虑积分

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^A dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x_0) du,$$

其中 A 是任意的有限正数, 而 x_0 是 x 的任一固定的值。这个积分与傅立叶級数的部分和相似: 对它取 $A \rightarrow +\infty$ 时的极限, 則得到傅立叶积

分:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x_0) du. \quad (2)$$

因为对于任一有限的 $B > 0$, 函数 $f(u)$ 在区间 $[-B, B]$ 上也绝对可积分, 故由第 472 款的定理 IV*, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^A dz \int_{-B}^B f(u) \cos z(u-x_0) du &= \int_{-B}^B f(u) du \int_0^A \cos z(u-x_0) dz = \\ &= \int_{-B}^B f(u) \frac{\sin A(u-x_0)}{u-x_0} du. \end{aligned} \quad (3)$$

但积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x_0) du \quad (4)$$

以根据假定为收敛的积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)| du$$

为强函数, 所以积分(4)在它的值的任一区间上对于 z (当 $u = +\infty$ 及

$u = -\infty$ 时) 一致收敛。这样, 积分 $\int_{-B}^B f(u) \cos z(u-x_0) du$ 当 $B \rightarrow +\infty$

时 一致趋近于极限 (4)。因此, 在等式(3)中取 $B \rightarrow +\infty$ 时的极限, 则在左端的积分中可 在积分号下取极限 [第 468 款的定理 I]*。由此, 关于 $J(A)$ 得到形如积分

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{\sin A(u-x_0)}{u-x_0} du$$

* 参考第 483 款的定理 IV, 在那里我们假定被积分函数是 连续的。在这里我们不作这样的假定。

的表示式, 它与第里希莱积分相像[655], 而且实际上也正是起着同样的作用。应用初等变换, 容易将它化成下形:

$$\begin{aligned} J(A) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0+t) \frac{\sin At}{t} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [f(x_0+t) + f(x_0-t)] \frac{\sin At}{t} dt. \end{aligned} \quad (5)$$

为了以后的叙述起见, 对于第 656 款的基本预备定理, 必须作显而易见的补充如下:

如果函数 $g(t)$ 在无穷区间 $[a, +\infty]$ 上绝对可积分, 则

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} g(t) \sin pt \, dt = 0$$

(同样

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} g(t) \cos pt \, dt = 0).$$

证明可仿照第 656 款中的预备定理(在函数 $f(x)$ 有奇异点的情形下)的证明。

687. 充分判別法 用常数 S_0 [积分(2)的假定值] 乘等式

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin At}{t} dt \quad (A > 0)$$

的两端, 从等式(5)的两端减去这个结果。如果也与第 658 款中一样, 为了简便起见, 令

$$\varphi(t) = f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S_0,$$

我們便得到

$$J(A) - S_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(t) \frac{\sin At}{t} dt. \quad (6)$$

在这里, 我們也只限于两种情形: (a) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处連續, 或 (6) 在这点兩側只可能有第一种不連續。而且我們假定

在情形 (a) $S_0 = f(x_0)$,

在情形 (6) $S_0 = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$.

在这种假定下, 我們現有

狄尼判別法 如果对于某一 $h > 0$, 积分

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t} dt$$

收敛, 則函数 $f(x)$ 的傅立叶积分在点 x_0 处收敛, 并且有值 S_0 。

把积分(6)表成两积分的和:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} = \frac{1}{\pi} \int_0^h + \frac{1}{\pi} \int_h^{\infty}.$$

由第 656 款中的基本预备定理, 两积分中的第一个当 $A \rightarrow +\infty$ 时趋近于零。至于第二个积分, 則將 $\varphi(t)$ 的展开式代入, 我們又分解这积分为两项:

$$\frac{1}{\pi} \int_h^{\infty} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{t} \sin At dt - \frac{2}{\pi} S_0 \int_h^{\infty} \frac{\sin At}{t} dt.$$

由于假定函数 f 绝对可积分, 函数

$$\frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{t}$$

也绝对可积分。由上款末对于基本预备定理所作的补充說明, 前式第一项当 $A \rightarrow +\infty$ 时趋近于零。最后, 直接根据广义积分的定义, 积分

$$\int_h^{\infty} \frac{\sin At}{t} dt = \int_{Ah}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz$$

显然趋近于零。

于是,与第 658 款中一样,可得一些較简单的特殊判别法。作为一例,我們提出:函数在点 x_0 处有有限的导数或至少有两个有限的单侧导数,就足够了。

对于傅立叶积分,我們也可应用

第里希莱-霞当判别法 如果在以 x_0 为中点的某一区間 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上,函数 $f(x)$ 有有界变差,則函数 $f(x)$ 的傅立叶积分在点 x_0 处收敛,并且有值 S_0 。

如果把积分

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(x_0 + t) + f(x_0 - t)] \frac{\sin At}{t} dt$$

表成两积分的和:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^h + \frac{1}{\pi} \int_h^{\infty},$$

則剛才已证实第二个积分当 $A \rightarrow \infty$ 时趋近于零。而第一个积分趋近于

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} [f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)] = S_0$$

——这次是根据第 659 款的基本预备定理。实际上,函数 $f(x_0 + t) + f(x_0 - t)$ 在值 t 的区間 $[0, h]$ 上有有界变差,从而可表示为两个增函数之差的形式,对于每个增函数可分别应用预备定理。

688. 基本假設的变形 直到現在为止,我們的推理建立在第 686 款开始所作的假定上:函数 $f(x)$ 在从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的整个无穷区間上绝对可积分。然后在所討論的点 x_0 的近邻,对函数的性质加以各种补充的条件,我們得到了函数在这点可用傅立叶积分表出的若干充分判别法。

然而在实用与有时嫌上面所指出的基本假定过于狹隘,而只假定:

1° 函数 $f(x)$ 在每个有限区間上绝对可积分,

至于无穷大的条件則换成下面的条件:

2° 对于 $|x| \geq H$, 函数 $f(x)$ 是单调的*, 而且

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \quad (7)$$

我們記得在第 686 款的推理中, 积分(4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x_0) du$$

当 $u = +\infty$ 及 $u = -\infty$ 时对于 z 的一致收敛性起着实质上的作用。因为关于 $z \geq a > 0$

$$\left| \int_1^u \cos z(u-x_0) du \right| \leq \frac{2}{z} \leq \frac{2}{a},$$

所以由第 477 款 2° 的判别法, 我們現在就能断定这个积分对于 z 一致收敛, 但是如我們就要看到的, 在这次只有对于值 $z \geq a$ 的一致收敛性, 其中 a 是任意的, 但是固定的正数。这样使我們不得不考虑积分

$$J(A, a) = \frac{1}{\pi} \int_a^A dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x_0) du \quad (A > a > 0),$$

而不考虑积分 $J(A)$, 取这积分当 $A \rightarrow +\infty$ 及 $a \rightarrow 0$ 时的二重极限, 即得傅立叶积分。完全与在第 686 款中所做的一样, 已可得积分 $J(A, a)$ 的表示式

$$\begin{aligned} J(A, a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(x_0+t) + f(x_0-t)] \frac{\sin At}{t} dt - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(x_0+t) + f(x_0-t)] \frac{\sin at}{t} dt, \end{aligned} \quad (8)$$

因此

$$J(A, a) - S_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(t) \frac{\sin At}{t} dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(x_0+t) + f(x_0-t)] \frac{\sin at}{t} dt, \quad (9)$$

首先我們要证明

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} [f(x_0+t) + f(x_0-t)] \frac{\sin at}{t} dt = 0. \quad (10)$$

把我們的积分表成下列形式:

$$\int_0^A + \int_A^{\infty},$$

* 正确地說来, 对于 $x \geq H$ 与 $x \leq -H$ 它分别是单调的。

其中 Δ 在任一情形下都假定是充分大, 使得 $x_0 - \Delta < -H, x_0 + \Delta > H$. 现在立刻显而易见

$$\left| \int_0^{\Delta} [f(x_0+t) + f(x_0-t)] dt \right| \leq \alpha \int_0^{\Delta} [f(x_0+t) + f(x_0-t)] dt,$$

因此不论 Δ 是怎样, 积分 $\int_0^{\Delta}$ 当 $\alpha \rightarrow 0$ 时趋近于零。

转到第二个积分, 根据第二中值定理[450], 并考虑到关系式(7), 我们有

$$\int_{\Delta}^{\infty} f(x_0 \pm t) \frac{\sin at}{t} dt = f(x_0 \pm \Delta) \int_{\Delta}^{\Delta'} \frac{\sin at}{t} dt = f(x_0 \pm \Delta) \int_{\alpha \Delta}^{\alpha \Delta'} \frac{\sin z}{z} dz \quad (\Delta' > \Delta).$$

因为在这里第二个因子是有界量(我們已經不只一次提到此点); 而由(7), 增大 Δ 时能使第一个因子任意小, 所以整个表示式也是如此。这样证明了关系式(10), 并且与从前一样, 表示式(8)或(9)的性质也只与含 A 的积分有关。

从前我們依靠函数 f 在无穷区间上的绝对可积分性, 证明了极限等式

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_h^{\infty} [f(x_0+t) + f(x_0-t)] \frac{\sin At}{t} dt = 0$$

(其中 h 是某一固定的正数)。利用我們的新假定也能证明此点。事实上, 取 $\Delta > h$, 我們有

$$\int_h^{\infty} = \int_h^{\Delta} + \int_{\Delta}^{\infty}.$$

我們能与处理含参变数 α 的类似的积分一样来处理右端第二个积分; 由第 656 款的基本预备定理, 第一个积分当 $A \rightarrow +\infty$ 时趋近于 0。

现在已经显然, 在对于函数 $f(x)$ 所作的新假定下, 狄尼及第里希莱-魏当判别法[687] 还是成立。

由整个以上所述, 特别, 得到这样一个应用傅立叶公式的条件: 如果函数 $f(x)$ 在整个无穷区间 $[-\infty, +\infty]$ 上有有界变差, 而且极限等式(7)成立, 则在每点 x_0 处, 傅立叶积分收敛并且有值 S_0 。

实际上, 在所作假定下, 可表示函数 $f(x)$ 成两个有界增函数之差的形式, 并且这两函数当 $x \rightarrow +\infty$ 及 $x \rightarrow -\infty$ 时有相等的[由(7)]极限:

$$f_1(+\infty) = f_2(+\infty) = c', \quad f_1(-\infty) = f_2(-\infty) = c''.$$

现引用函数

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} f_1(x) - c' & \text{关于 } x \geq 0, \\ f_1(x) - c'' & \text{关于 } x < 0, \end{cases} \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} f_2(x) - c' & \text{关于 } x \geq 0, \\ f_2(x) - c'' & \text{关于 } x < 0 \end{cases}$$

来代替 f_1 及 f_2 ，则与从前一样，

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x),$$

但是在这次

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi_1(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi_2(x) = 0,$$

因此对于函数 φ_1, φ_2 中每一个，条件 1) 及 2) 成立；此外显然在任一点对这两函数可应用第里希莱-魏当判别法。

689. 傅立叶公式的各种形式 假定可应用傅立叶公式的充分条件成立，为了简单起见，我们设函数 $f(x)$ 在所考虑的点 x 处连续，如果不连续，则设条件

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

成立，即设所考虑的点 是正规的 [658]。在任一情形下，得

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x) du. \quad (11)$$

由于内层积分显然是 z 的偶函数，所以也可将这公式换写为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x) du. \quad (12)$$

又容易证明在第 686 款 [或第 688 款] 对于函数 $f(x)$ 所作的一般假定下，积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin z(u-x) du$$

也存在。而且，这积分是 z 的连续函数*，并且显然是奇函数。虽然不可能保证这函数从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的广义积分存在，但是它在主值的意义下 [448] 一定存在，而且

$$\text{V. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin z(u-x) du = 0.$$

* 如果以第 688 款中的假定为基础，则只有在 $z=0$ 处可能有例外。

用 $\frac{i}{2\pi}$ 乘这等式, 并且再与 (12) 相加, 便得关系式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{i z(u-x)} du, \quad (13)$$

其中外层积分是被了解为在主值意义下的积分。科西首先将公式表示为这种形状。

回到公式 (11), 我們将它写作下列形式:

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos zx \, dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos zu \, du + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin zx \, dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin zu \, du. \end{aligned}$$

如果 $f(u)$ 是偶函数, 則

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos zu \, du = 2 \int_0^{\infty} f(u) \cos zu \, du, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin zu \, du = 0,$$

而我們得到只含余弦的簡化了的公式

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos zx \, dz \int_0^{\infty} f(u) \cos zu \, du. \quad (14)$$

同样, 在 $f(x)$ 为奇函数的情形下, 我們得到只含正弦的公式:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin zx \, dz \int_0^{\infty} f(u) \sin zu \, du. \quad (15)$$

現在設函数 $f(x)$ 只是在区間 $[0, +\infty)$ 上被給出, 并且在这区間上滿足的条件与以前对于整个区間 $(-\infty, +\infty)$ 所加的条件相类似。利用等式 ($x > 0$):

$$f(-x) = f(x) \quad \text{或} \quad f(-x) = -f(x)$$

推广函数到区間 $(-\infty, 0)$, 則在第一种情形下, 我們得到在区間 $(-\infty,$

$+\infty$)上的偶函数, 在第二种情形下, 得到奇函数。因此, 对于正值 x (当相应的充分条件成立时), 我們既能应用公式(14), 又能应用公式(15)。

如果假定函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处連續, 則在这点也能应用公式(14), 因为用偶的方式开拓出的函数在这点保持連續性。一般地在点 $x=0$ 处不能应用公式(15): 只有在 $f(0)$ 是零的情形下, 它才能給出这个值。

这些討論完全与第 663 款中对于傅立叶级数所述的相类似。

690. 傅立叶变换 我們假定傅立叶公式(12)可能除去在有限个点外, 关于 x 在区間 $(-\infty, +\infty)$ 上的一切值成立。可設想这公式是由下列两公式叠加而得:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{iz u} du, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) e^{-i x z} dz^* \quad (16)$$

函数 $F(z)$ 根据第一个公式与函数 $f(x)$ 对照, 称为后者的傅立叶变换。而根据第二个公式, 函数 $f(x)$ 是函数 $F(z)$ 的傅立叶(逆)变换(区别在 i 的符号)。我們注意, 一般說来, 即使当 f 取实数值时, 函数 F 取复数值, 然而在这里可假定原始函数 f 也取复数值。

当函数 $f(x)$ 已給时, 等式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) e^{-i x z} dz,$$

可当作对于(在积分符号后的)未知函数 $F(z)$ 的积分方程。方程的解由公式

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{iz u} du$$

* 如果只对函数 $f(x)$ 作上面所說到的假定, 則最后的积分被了解为主值意义下的积分。

給出。自然,我們也可更換这两个等式的次序。

現在回到公式(14);如果除去前述的例外值外,它对于一切正值 x 成立,則能表示它为下列两个(在这次是实值的并且是完全对称的)公式的叠加:

$$\left. \begin{aligned} F_o(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u) \cos zu \, du, \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_o(z) \cos xz \, dz. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

同样,公式(15)也能分解为两个公式:

$$\left. \begin{aligned} F_s(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u) \sin zu \, du, \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(z) \sin xz \, dz. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

函数 $F_o(z)$ 及 $F_s(z)$ 分別称为函数 $f(x)$ 的傅立叶余弦变换或正弦变换。如我們所看到,由 F_o (或 F_s) 求得函数 f 与由 f 求得 F_o (F_s) 完全一样。換句話說,函数 f 与 F_o (F_s) 互为余弦(正弦)变换。科西将函数对 f 与 F_o 或 f 与 F_s 分別称为第一种或第二种共軛函数。在这里, (17) [或(18)] 中的每个等式又可当作为积分方程,其中积分以外的函数是已給的,而积分号后的函数是要求的;方程的解由另一等式給出。

比較函数 F , F_o 及 F_s , 可叙述如下。在 $f(x)$ 是偶函数的情形下,我們有

$$F(z) = F_o(z)$$

(用偶的方式推广函数 $F_o(z)$ 到值 $z < 0$), 而在 $f(x)$ 是奇函数的情形下:

$$F(z) = i F_s(z)$$

(用奇的方式推广函数 $F_s(z)$ 到值 $z < 0$)。在一般情形下,将函数 $f(x)$

分解为偶函数与奇函数

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

的和。因而

$$F(z) = G_o(z) + iH_s(z)^*.$$

由于这种情况, 我们只举出余弦及正弦变换的例子就够了。

1) 设函数 $f(x) = e^{-ax} (a > 0, x \geq 0)$; 则函数

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-az} \cos zx \, dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + x^2}$$

是它的余弦变换, 而函数

$$F_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-az} \sin zx \, dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{a^2 + x^2}$$

是正弦变换。

因为 e^{-ax} 在区间 $[0, +\infty]$ 上可积分, 所以下列相互的关系式一定成立:

$$\frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos zx}{a^2 + z^2} dz = e^{-ax} \quad (x \geq 0)$$

与

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{z \sin zx}{a^2 + z^2} dz = e^{-ax} \quad (x > 0),$$

或

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos zx}{a^2 + z^2} dz = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}, \quad \int_0^{\infty} \frac{z \sin zx}{a^2 + z^2} dz = \frac{\pi}{2} e^{-ax}.$$

在这些积分中我们可看出已知的拉普拉斯积分[484, 4°]。

因此, 在下列函数对的形式下:

$$e^{-ax}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + x^2} \text{ 及 } e^{-ax}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{a^2 + x^2}.$$

我们在这里有(科西的)第一种与第二种共轭函数的例子。如果不知道拉普拉斯积分, 则上述的理论指出了计算它的方法。

* $G_o(z)$ 表示函数 $g(x)$ 的余弦变换, 而 $H_s(z)$ 表示函数 $h(x)$ 的正弦变换。

2) 现在考虑由下列等式所定义的函数:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{关于 } 0 \leq x < a, \\ \frac{1}{2} & \text{关于 } x = a, \\ 0 & \text{关于 } x > a \end{cases} \quad (a > 0).$$

在这种情形下,

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \cos zx \, dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x}.$$

如果为了要在这个例子上证实傅立叶公式, 求出所得函数的余弦变换, 则得到第里希莱的“不连续乘数”[460, 9)]

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin az}{z} \cos zx \, dz,$$

实际上它的值与原始函数 $f(x)$ 一致; 同样,

$$F_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \sin zx \, dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos ax}{x},$$

等等。

读者将在第 692 款中找到傅立叶变换的许多例子。

691. 傅立叶变换的若干性质 从对函数 $f(x)$ 的种种假定出发, 研究它的傅立叶变换 $F(x)$ 的性质。

首先, 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[-\infty, +\infty]$ 上绝对可积分, 则函数

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{ixu} du \quad (19)$$

在整个区间上连续, 并且当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时趋近于零。

函数的连续性是由于所写出的积分以不含参数 x 的收敛积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)| \, du$$

为强函数, 从而当 $u = \pm\infty$ 时, 它关于 x 一致收敛。证明仿照第 480 款的定理 I 与第 482 款的定理 II, 并参照第 472 款的定理 I (代替第 468

款的定理 I)。至于函数 F 在无穷大的性质，则建立在第 686 款最后说明的基础上。

现在假定 $x^n f(x)$ 也在区间 $[-\infty, +\infty]$ 上绝对可积分，其中 n 是自然数。则函数 $F(x)$ 有 n 个逐级导数

$$F'(x), \dots, F^{(n)}(x),$$

它们当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时都趋近于零。

在积分号下逐次对参数 x 求积分 (19) 的微分，我们得到

$$F^{(k)}(x) = \frac{i^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) u^k e^{ixu} du, \\ (k=1, 2, \dots, n)$$

这个积分关于 x 一致收敛，因为有强积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u) u^k| du$$

存在，于是我们可应用莱布尼兹规则。证明仿照第 482 款定理 III 的证明，并参照第 472 款的定理 III* (代替第 469 款的定理 III)。在这里，导数在无穷大的性质是借第 686 款最后的说明来建立的。

因此，函数 $F(x)$ 的微分性质主要是由函数 $f(x)$ 在无穷大的性质所确定。反过来说，由函数 $f(x)$ 的微分性质能在某种程度上判断函数 $F(x)$ 在无穷大的性质。这就是说：如果函数 $f(x)$ 与它的前 $n-1$ 个导数当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时趋近于零，而 n 级导数 $f^{(n)}(x)$ 在区间 $[-\infty, +\infty]$ 上绝对可积分，则

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n F(x) = 0.$$

这点可直接由 $F(x)$ 的表示式

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{i}{x} \right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n)}(u) e^{ixu} du$$

推出,而这表示式是逐步用分部积分法求得的。

692. 例题与补充 1) 证明函数 $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 的余弦变换与这函数本身相同。

实际上,由第 481 款 6), (a) 的公式:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} \cos zx \, dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2} = e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

对于 x 微分这等式, 我們得到另一結論: 函数 $xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ 的正弦变换与这函数本身恒等。

2) 证明公式

$$(a) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 z}{z^2} \cos 2zx \, dz = \begin{cases} 1-x, & \text{如果 } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{如果 } x \geq 1. \end{cases}$$

$$(6) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \log \frac{\sqrt{1+z^2}}{z} \cos xz \, dz = \frac{1-e^{-x}}{x} (x \geq 0).$$

提示, 計算右端所列出的 x 的函数的余弦变换, 并利用两函数的共軛性(适用傅立叶公式的条件成立:)。

3) 关于下列两种情形:

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x & \text{关于 } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{关于 } x \geq \pi, \end{cases}$$

或

$$(6) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x & \text{关于 } 0 \leq x < \pi \\ -\frac{\pi}{4} & \text{关于 } x = \pi \\ 0 & \text{关于 } x > \pi. \end{cases}$$

解积分方程

$$\int_0^{\infty} g(z) \sin zx \, dz = f(x).$$

提示 函数 $\sqrt{\frac{2}{\pi}} f(x)$ 的正弦变换是它的解。

$$\text{答 } (a) \quad \frac{\sin \pi x}{1-x^2}; \quad (6) \quad \frac{x \sin \pi x}{1-x^2}.$$

4) 证明函数 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 同时是它本身的余弦变换及正弦变换。

例如, 我們有

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sin xz}{\sqrt{z}} \, dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt = \frac{1}{\sqrt{x}} [484, 5^{\circ}].$$

5) 利用函数

$$\frac{1}{e^{\frac{x}{2}} + 1}$$

的正弦变换求新的积分。

根据第 481 款 8)(6) 的公式, 所述的变换是

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} \right).$$

因为原始函数满足于适用傅立叶公式的条件, 所以它是刚才所引的函数的正弦变换。

注意积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin xz}{z} dz = \frac{\pi}{2} \quad (x > 0)$$

的值, 由此容易得到

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin xz}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}} dz = \frac{\pi}{2} \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}},$$

或最后用另外的记号,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{a}{2} \quad (a > 0).$$

6) 证明函数

$$\frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}x} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}$$

的正弦变换恒等于这函数本身。

提示 利用第 481 款 8)(a) 的公式。

7) 关于函数 $\cos \frac{1}{2}x^2$ 及 $\sin \frac{1}{2}x^2$, 证实傅立叶公式 (14)。(顺便指出, 这两函数不适合我们推演傅立叶公式时所假定的条件!)

我们有

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos \frac{1}{2}z^2 \cos xz dz &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^{\infty} \cos \left(\frac{1}{2}z^2 - xz \right) dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} \cos \left(\frac{1}{2}z^2 + xz \right) dz \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \left(\frac{1}{2}z^2 - xz \right) dz. \end{aligned}$$

或者令 $z = x + u$, 并且考虑到已知的弗烈内尔积分的值 [484, 5°]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \frac{1}{2}(u^2 - x^2) du &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \cos \frac{1}{2}x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \frac{1}{2}u^2 du + \right. \\ &\quad \left. + \sin \frac{1}{2}x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \frac{1}{2}u^2 du \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{1}{2}x^2 + \sin \frac{1}{2}x^2 \right). \end{aligned}$$

同样,

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin \frac{1}{2} z^2 \cos xz dz = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{1}{2} x^2 - \sin \frac{1}{2} x^2 \right).$$

现在已经显而易见所得函数的余弦变换就是原始函数, 而这点与傅立叶公式的正确性等价。

8) 证实(a)关于函数

$$f(x) = \text{ci } x = - \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

(积分余弦)的傅立叶公式(14)成立,

(6) 关于函数

$$g(x) = \text{si } x = - \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

(积分正弦)的公式(15)成立。

对于这些公式是否适用, 我们所建立的条件没有讨论到。

(a) 解 根据第 460 款, 19)(a) 公式:

$$F_c(x) = - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos xu du \int_u^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \begin{cases} -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} & \text{关于 } x > 1, \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{关于 } x = 1, \\ 0 & \text{关于 } x < 1. \end{cases}$$

其次

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(z) \cos xz dz = - \int_1^{\infty} \frac{\cos xz}{z} dz = - \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \text{ci } x.$$

(6) 提示 利用 460, 19)(6)。

9) 关于函数 $\frac{1}{x^s}$, 证实两个傅立叶公式(14)及(15), 其中 $0 < s < 1$,

由 500, 3),

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\cos zx}{z^s} dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{s-1}}{\Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}},$$

然后

$$\frac{1}{\Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\cos zx}{z^{1-s}} dz = \frac{1}{\Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^{-s}}{\Gamma(1-s) \cos \frac{\pi(1-s)}{2}}$$

这就等于 $\frac{1}{x^s}$ [如果考虑到关于 Γ 函数的补充公式 493, 3°]。

同样可证实公式(15)。

10) 关于有零指标的贝塞尔函数 $J_0(x)$, 证实傅立叶公式(14)。

在 486, 5) 中, 我們有过

$$\int_0^{\infty} J_0(z) \cos zx dz = \begin{cases} 0 & \text{当 } x > 1 \text{ 时,} \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{当 } x < 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

因此

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos ux du \int_0^{\infty} J_0(z) \cos zx dz = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos ux}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \varphi) d\varphi,$$

这实际上等于 $J_0(x)$ [参考 669]。

11) 考虑由等式

$$f(x) = \begin{cases} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} & \text{关于 } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{关于 } x > 1 \end{cases}$$

所确定的函数 $f(x)$ ($n=0, 1, 2, \dots$)。它的余弦变换等于

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 (1-z^2)^{n-\frac{1}{2}} \cos zx dz,$$

或者展开余弦为级数并且逐项积分:

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{x^{2v}}{2^v v!} \int_0^1 z^{2v} (1-z^2)^{n-\frac{1}{2}} dz.$$

但由 495, 1),

$$\int_0^1 z^{2v} (1-z^2)^{n-\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu + n + 1)} = \frac{(2\nu-1)!! (2n-1)!!}{2^{\nu+n+1} (\nu+n)!} \pi.$$

因此, 回忆到有指标 n 的贝塞尔函数的展开式 [383, 6)], 最后得

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2n-1)!! \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v! (\nu+n)!} \frac{x^{2v}}{2^{\nu+2v}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n-1)!!}{x^n} J_n(x).$$

因为关于原始函数, 适用傅立叶公式的条件成立, 所以函数 $F_c(x)$ 的余弦变换一定就是原始函数。这样引出了有趣的积分:

$$\int_0^{\infty} \frac{J_n(z)}{z^n} \cos zx dz = \begin{cases} \frac{1}{(2n-1)!!} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} & \text{当 } 0 \leq x < 1 \text{ 时,} \\ 0 & \text{当 } x > 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

当 $n=0$ 时, 由此得到已知的公式 [486, 5)]。

12) 在积分对数的表示式

$$\operatorname{li} z = \int_0^z \frac{dt}{\log t} \quad (0 < z < 1)$$

中, 令 $z = e^{-x}$ ($x > 0$), 及 $t = e^{-u}$, 我們得到

$$\operatorname{li} e^{-x} = - \int_x^{\infty} \frac{du}{ue^u}.$$

因为当 $x > 1$ 时,

$$\int_x^{\infty} \frac{du}{ue^u} < e^{-x},$$

而当 $0 < x < 1$ 时,

$$\int_x^1 \frac{du}{ue^u} < |\log x|.$$

所以 $|\operatorname{li} e^{-x}|$ 从 0 到 $+\infty$ 可积分, 并且显然适用傅立叶公式(14)及(15)。

现在求函数 $\operatorname{li} e^{-x}$ 的余弦变换:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \operatorname{li} e^{-z} \cos zx \, dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos zx \, dz \int_z^{\infty} \frac{du}{ue^u}.$$

分部积分, 将它化成下列形式:

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-z} \frac{\sin zx}{z} \, dz = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x}.$$

[484, 2°]。于是, 其逆为

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} z}{z} \cos zx \, dz = -\frac{\pi}{2} \operatorname{li} e^{-x} \quad (x > 0)$$

这样就求得了新积分的值。

用类似的方法, 利用正弦变换, 求得另一积分:

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(1+z^2)}{z} \sin zx \, dz = -\pi \operatorname{li} e^{-x^2} \quad (x > 0).$$

13) 证明在傅立叶公式

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x) du$$

中, 当前面所指出的任意的充分条件成立时, 可将里面的积分换成在任意有限区间上的积分

$$\int_a^b f(u) \cos z(u-x) du,$$

* 对参变数 x 求微分, 容易算出中间积分

$$\int_0^{\infty} e^{-z} \frac{\cos xz - 1}{z} dz$$

只要点 x 在 a 与 b 之间就可以了。

提示 不取 $f(u)$, 我们考虑当 $a < u < b$ 时等于 $f(u)$, 而对于其余的 u 值等于零的新函数。

14) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内 (在广义下) 单调减, 并且当 $x \rightarrow +\infty$ 时趋近于零; 我们假定这函数在点 $x=0$ 的邻域内可积分*。证明这时它的正弦变换 $F_s(x)$ 关于 $x > 0$ 是非负的函数。

由所作假定, 首先推得积分

$$F_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(z) \sin xz \, dz$$

存在 [441, 446]。我们能将它表示成级数和的形状:

$$F_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{n\pi}{x}}^{\frac{(n+1)\pi}{x}} f(z) \sin xz \, dz,$$

这级数的各项正负相间, 而且它们的绝对值递减 (“莱布尼兹型”的级数, 369)。由此得到所要求的结论。

15) 设 $f(x)$ 是在区间 $[0, +\infty]$ 上的有界单调减函数, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时趋近于零。此外, 我们还假定当 $x > 0$ 时, 这函数有负的 (在广义下) 单调增加的导数 $f'(x)$ 。证明这时余弦变换 $F_c(x)$ 是在区间 $[0, +\infty]$ 上的非负的可积分函数。

如果 $0 < a < A < +\infty$, 我们有

$$\int_a^A |f'(x)| \, dx = - \int_a^A f'(x) \, dx = f(a) - f(A),$$

因此由于函数 $f(x)$ 有界, 导数 $f'(x)$ 在区间 $[0, +\infty]$ 上可积分。从而推得

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f'(x) \rightarrow 0$ 。

分部积分, 我们得到

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(z) \cos xz \, dz = - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{x} \int_0^{\infty} f'(z) \sin xz \, dz,$$

如果对最后一积分应用 14) 中所证明的结果, 则有 $F_c(x) \geq 0$ 。

因为关于函数 $f(x)$, 可应用傅立叶公式的条件成立, 所以当 $x=0$ 时, 我们得到

$$f(+0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dz \int_0^{\infty} f(u) \cos zu \, du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(z) \, dz,$$

* 如果函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 变为无穷大, 则它可能在广义下可积分。

在这里已包含了关于函数 $F'_c(z)$ 的可积分性的断言。

附注 我们强调这两个定理中的任何一个对于其他型的变换都不是真实的。关于第 693 款的例 2) 中所考察的函数 $f(x)$, 相应的余弦变换

$$F'_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x}$$

改变符号。如果取 $f(x) = e^{-ax}$ [同款的例 1)], 则正弦变换

$$F'_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{a^2 + x^2}$$

虽然关于 $x > 0$ 保持正号, 但在区间 $[0, +\infty]$ 上不可积分。

693. 二元函数的情形 傅立叶公式也能推广到多元函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的情形。我们较详细地研究二元函数 $f(x_1, x_2)$, 并且假定这函数确定在整个平面 $(-\infty, +\infty; -\infty, +\infty)$ 上, 而且分别对每一变数可微分。

又设当任意固定 x_2 时, 函数 $f(x_1, x_2)$ 对于 x_1 在区间 $[-\infty, +\infty]$ 上绝对可积分; 同样, 当任意固定 x_1 时, 它对于 x_2 在同一区间上绝对可积分。当 x_2 固定时, 对于单变数 x_1 的函数 $f(x_1, x_2)$ 应用已知的傅立叶公式*(11), 便得到

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, x_2) \cos z_1(u_1 - x_1) du_1.$$

同样, 当 u_1 固定时, 变数 x_2 的函数 $f(u_1, x_2)$ 也能用下一公式表示:

$$f(u_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2) \cos z_2(u_2 - x_2) du_2.$$

代入前式, 我们就得到所求的公式:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos z_1(u_1 - x_1) du_1 \int_0^{\infty} dz_2 \times$$

* 根据所作假定, 在这里适用这公式的条件成立。当然我们也能改变这些假定的形状。

$$\begin{aligned} & \times \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2) \cos z_2(u_2 - x_2) du_2 = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_0^{\infty} dz_2 \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2) \cos z_1(u_1 - x_1) \cos z_2(u_2 - x_2) du_2. \end{aligned}$$

与 689 中所做的一样, 在这里也能转换到含指数函数的公式:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dz_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2) e^{i[z_1(u_1 - x_1) + z_2(u_2 - x_2)]} du_2, \end{aligned} \quad (20)$$

只要将对 z_1 及对 z_2 的积分了解为主值意义下的积分。

如果函数 $f(x_1, x_2)$ 对于 x_1 及对于 x_2 都是偶函数, 则能将整个积分区间化成区间 $[0, +\infty]$, 而且只保留着余弦:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \cos z_1 x_1 dz_1 \int_0^{\infty} \cos z_1 u_1 du_1 \int_0^{\infty} \cos z_2 x_2 dz_2 \times \\ & \times \int_0^{\infty} f(u_1, u_2) \cos z_2 u_2 du_2. \end{aligned} \quad (21)$$

在奇函数情形下, 在这里必须处处用正弦代替余弦。

对于只在第一象限 $[0, +\infty; 0, +\infty]$ 上给出的函数 $f(x_1, x_2)$, 这两公式也成立, 因为能随意用偶的或奇的方式将函数开拓到整个平面上。(关于含正弦的公式, 坐标轴上的点除外)

在所有这些公式中, 积分的次序必须如所指出的那样(只可能交换指标 1 与 2)。如果我们有理由交换两个中间积分的次序, 则公式(20)可取特别对称的形式。在这种情形下, 公式(20)与下列两个公式等价:

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2) e^{i(z_1 u_1 + z_2 u_2)} du_2,$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} F(z_1, z_2) e^{-i(z_1 x_1 + z_2 x_2)} dz_2;$$

函数 $F(z_1, z_2)$ 称为函数 $f(x_1, x_2)$ 的傅立叶变换。

与这相仿, 公式(21)也可分解为两个公式, 在这次, 两公式的形状完全相同:

$$F_c(z_1, z_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} du_1 \int_0^{\infty} f(u_1, u_2) \cos z_1 u_1 \cos z_2 u_2 du_2,$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dz_1 \int_0^{\infty} F_c(z_1, z_2) \cos z_1 x_1 \cos z_2 x_2 dz_2.$$

在这里 $F_c(z_1, z_2)$ 是函数 $f(x_1, x_2)$ 的余弦变换; 显然, $f(x_1, x_2)$ 也是函数 $F_c(z_1, z_2)$ 的余弦变换。

請讀者將以上所講的推到正弦变换。

§ 7. 应用

894. 用行星的平近点角所作出的它的偏近点角的表示式 函数的傅立叶级数展开式引导出函数的一种便利的分析表示法, 它对于计算往往是有帮助的。在下面, 我們从理論天文学中取出这种类型的一个重要的例子。

我們已經遇到过表示行星的偏近点角 E 与平近点角 M 之间的关系的开普勒方程 [82: 425, 2]:

$$E = M + \varepsilon \sin E \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

根据这个方程, E 是 M 的单值可微分函数, 而且是奇函数。将 M 增大 2π 时, 則显然 E 也增大 2π 。由此可知 $\sin E$ 是 M 的(以 2π 为周期的)周期函数, 并且可用 M 的倍弧的正弦展开成为级数:

$$\sin E = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nM.$$

現在要确定系数 b_n 。

由第 663 款的公式(21)

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}b_n &= \int_0^\pi \sin E \sin nM \, dM = \\ &= -\sin E \cdot \frac{\cos nM}{n} \Big|_{M=0}^{M=\pi} + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nM \frac{d \sin E}{dM} dM.\end{aligned}$$

因为当 $M=0$ (或 π) 时, $E=0$ (或 π), 所以积分外面的项等于零。在后面的积分中用变数 E 代替变数 M (像这样, 变化的区间没有改变), 并且考虑到开普勒方程, 我們得到:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}b_n &= \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nM \cos E \, dE = \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos(nE - nE \sin E) \cos E \, dE = \\ &= \frac{1}{2n} \left[\int_0^\pi \cos(n+1)E - nE \sin E \, dE + \int_0^\pi \cos(n-1)E - nE \sin E \, dE \right].\end{aligned}$$

由已知的貝塞尔函数 $J_n(x)$ 的积分公式,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nE - x \sin E) dE = J_n(x)$$

[例如, 可参考第 669 款]。因此

$$b_n = \frac{1}{n} [J_{n+1}(n\varepsilon) + J_{n-1}(n\varepsilon)].$$

在另一方面, 不难证明恒等式

$$\frac{x}{2n} [J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x)] = J_n(x)^*,$$

因此

$$b_n = \frac{2}{n\varepsilon} J_n(n\varepsilon),$$

故

$$\sin E = \frac{2}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(n\varepsilon) \sin nM.$$

最后得

$$E = M + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(n\varepsilon) \sin nM.$$

所得到的用平近点角 M 表示偏近点角 E 的表示式在天体力学中起着重要的作用。从前我們已經將 E 展开为含离心率 ε 的乘幂的展开式, 它的系数与 M 有关[425, 2]。但是这展开

* 例如, 可以用函数 J_{n-1} , J_n 与 J_{n+1} 的幂级数展开式[383, 6]来证明这个恒等式。

式只有当 $\varepsilon < 0.6627\dots$ 时适用, 譬如关于离心率较大的彗星轨道就不适用; 在这里所建立的公式没有这种缺点。

695. θ 函数的函数方程 现在举出函数的三角展开式的另外一种应用的例子。在这次, 我们所关心的不是在于计算, 而是必须用傅立叶级数来更完全地揭露所研究的函数的性质。

考虑由等式

$$\theta(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 \pi x} \quad (\text{关于正值 } x)$$

所确定的“ θ 函数”, 我们将证明它满足函数方程

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \theta\left(\frac{1}{x}\right). \quad (1)$$

以 y 为变数, 作出在整个实数轴上的辅助函数(当 x 固定时):

$$\varphi(y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-(k+y)^2 \pi x}.$$

这是以 1 为周期的可微分函数, 而且是偶函数。如果考虑到可在一般项中用 k 的符号变化来补偿 y 的符号变化, 则容易证实这个函数是偶函数。

函数 $\varphi(y)$ 可被展开成为只含余弦的傅立叶级数:

$$\varphi(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2n\pi y.$$

逐步应用变换, 可确定系数 a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 \varphi(y) \cos 2n\pi y \, dy = 2 \int_0^1 \cos 2n\pi y \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-(k+y)^2 \pi x} \, dy = \\ &= 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 e^{-(k+y)^2 \pi x} \cos 2n\pi y \, dy = 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} e^{-t^2 \pi x} \cos 2n\pi t \, dt = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 \pi x} \cos 2n\pi t \, dt = 4 \int_0^{+\infty} e^{-t^2 \pi x} \cos 2n\pi t \, dt = \frac{2}{\sqrt{x}} e^{-\frac{n^2 \pi}{x}} \end{aligned}$$

[481, 6)(a)]. 因此

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{x}} \cos 2n\pi y \right\}.$$

在这里, 令 $y=0$, 我们得到

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{x}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2 \pi}{x}}.$$

因为根据 θ 函数的定义, 右端的和数恰好是 $\theta\left(\frac{1}{x}\right)$, 所以等式(1)就被证明了。

696. 弦振动的問題 傅立叶级数(与积分)的最重要的应用是在数学物理方面。想用例子说明这类应用, 我们从古典的弦振动的問題开始。它对于函数可否有三角展开式这一問題的提出起了重要的作用。

我們所謂弦就是指能自由弯曲的很輕的綫。設有长度是 l 的弦, 它的端点固定在 x 軸上 $x=0$ 及 $x=l$ 两点, 并且在張力



图 138.

H 的作用下, 弦沿着 x 軸平衡(图 138)。設在 $t=0$ 时, 弦离开了平衡位置, 而且它的各点具有某些在鉛直方向的速度。于是弦上各点开始在这鉛直的平面上振动*。如果假定弦上的每点 M (有横坐标 x) 严格鉛直地振动, 則在時間 $t \geq 0$, 它与平衡位置的偏差 y 是两变数 x 与 t 的函数:

$$y = y(x, t).$$

現在的問題就是要确定这函数。

我們只討論弦的小振动, 这时量 y 与 $\frac{\partial y}{\partial x}$ 都很小(从而弦离开平衡位置不远并且弯曲不大); 因此我們能省略这些小量的二次項。

取在時間 t 的弦元素 $ds = M'N'$ (见图); 由以上所述, 我們可将它的长度算作与它在开始时的原长 $dx = MN$ 相等, 这是因为

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx = dx.$$

既然我們將长度的改变略去不計, 就可將弦的張力也算作沒有改变。

在所取的弦元素上, 張力 H 作用于点 M' , 它的方向是沿着在这点的切綫向左; 同样大小的張力作用于点 N' , 它的方向是沿着切綫向右。如果用 α 与 $\bar{\alpha}$ 分别表示切綫的斜角, 則这两張力在鉛直方向的分力的和是

$$H(\sin \bar{\alpha} - \sin \alpha) = H \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{N'} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{M'} \right] = H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

在这里, 我們又已省略了小量的二次項(例如, 我們已經令

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial y}{\partial x},$$

然后用函数 $\frac{\partial y}{\partial x}$ 的微分代替它的增量。

如果用 ρ 表示弦的“綫性”密度, 則弦元素的质量是

$$\rho ds = \rho dx.$$

* 我們假定图 138 所在的平面是鉛直的。

于是由牛顿运动定律, 弦元素的质量 ρdx 与加速度 $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ 的乘积必须等于上面所求得的作用于这段元素上的力:

$$\rho dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

令

$$a^2 = \frac{H}{\rho},$$

最后我们得到描述所研究的现象的偏微分方程:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (2)$$

除了这个方程以外, 未知函数 $y = y(x, t)$ 还必须还要满足一系列条件, 首先就要满足表示弦端点固定不变的所谓极限或边界条件:

$$y(0, t) = 0, \quad y(l, t) = 0. \quad (3)$$

其次, 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ ($0 \leq x \leq l$) 表示弦上的点在 $t = 0$ 时的偏差与速度, 则初值条件

$$y(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = g(x) \quad (4)$$

必须成立。

因此, 问题化为求满足方程(2)及条件(3)与(4)的函数 $y(x, t)$ 。

依照傅立叶所指出的方法, 先求方程(2)的特解, 而且使它满足极限条件(3), 并与零解不同(我们暂不考虑初值条件)。我们开始求形状为两函数的积的特解, 并且这两函数中的一个只与 x 有关, 另一个只与 t 有关:

$$y = X(x)T(t),$$

在这种情形下, 方程(2)有下列形式:

$$XT'' = a^2 X'' T,$$

或

$$\frac{T''}{T} = a^2 \frac{X''}{X}, \quad (5)$$

其中撇号表示对于各函数的变数的导数。因为等式(5)的左端与 x 无关, 右端与 t 无关, 所以它们的共同的值必须与 x 及 t 都无关, 于是为一常数, 将它取为 $-a^2 \lambda^2 (\lambda > 0)$ 之形式。这时方程(5)分解为两个方程:

$$T'' + a^2 \lambda^2 T = 0, \quad X'' + \lambda^2 X = 0, \quad (6)$$

它们的解(“一般积分”)的形状是:

$$T = A \cos a\lambda t + B \sin a\lambda t,$$

$$X = C \cos \lambda x + D \sin \lambda x.$$

为了要使得函数 $y = XT$ 满足极限条件(3), 函数 X 必须满足这些条件。令 $x = 0$, 我们立刻

* 当 $x = 0$ 或 $x = l$ 时, 两函数显然必须为零。

看到 $C=0$, 又令 $x=l$, 并且考虑到 D 不可能为零, 就得到条件

$$\sin \lambda l = 0,$$

从而, 当 n 是自然数时, $\lambda l = n\pi$. 因此 λ 可取下列各值中的一个值:

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{l}, \lambda_2 = 2\frac{\pi}{l}, \dots, \lambda_n = n\frac{\pi}{l}, \dots^* \quad (7)$$

当 $\lambda = \lambda_n$ 时, 令

$$AD = a_n, \quad BD = b_n,$$

我們得到一系列特解:

$$y_n = (a_n \cos \alpha \lambda_n t + b_n \sin \alpha \lambda_n t) \sin \lambda_n x. \\ (n = 1, 2, 3, \dots)$$

不难看出任意个这些解的和也满足上面所提出的条件。因此推想到考虑所有这些解构成的无穷级数, 并且令

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \alpha \lambda_n t + b_n \sin \alpha \lambda_n t) \sin \lambda_n x. \quad (8)$$

我們暫且假定这个级数收敛, 并且它的和满足方程(2); 条件(3)显然成立。现在轮到来讨论初值条件(4), 我們設法定出常数 a_n, b_n , 使得这些条件成立。假定可以将级数(8)对于 t 逐项微分, 从而

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n \alpha \lambda_n \sin \alpha \lambda_n t + b_n \alpha \lambda_n \cos \alpha \lambda_n t) \sin \lambda_n x. \quad (9)$$

在(8)与(9)中, 令 $t=0$, 我們得到条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \lambda_n x = f(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \lambda_n b_n \sin \lambda_n x = g(x). \quad (10)$$

因此只要 f 与 g 满足可展开为傅立叶级数的条件, 则由第 663 页的公式(25)最后确定出所求的系数:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \lambda_n x dx, \quad b_n = \frac{2}{\alpha \lambda_n l} \int_0^l g(x) \sin \lambda_n x dx. \quad (11)$$

这样, 我們至少在形式上求得了所提出的问题的全解, 其形状为级数(8), 而级数的系数则由公式(11)所定出。

的确, 它实际上是否是解的问题暂时还没有解决。为了要回答这个问题, 对于函数 f 与 g 还要加上一些条件, 就是要設函数 g 可微分, 函数 f 二次可微分, 而且假定导数 f' 与 g' 在

* 如果我们取比值(5)的常数值为 $a^2 \lambda^2$ 的形式, 则只有恒等于零的函数 X 可能满足极限条件。

区间 $[0, l]$ 上有有界变差。这时下列估计值成立:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \lambda_n b_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)^*.$$

两展开式(10)实际上在整个区间 $[0, l]$ 上成立, 展开式(8)也收敛, 而且由它所确定的函数既满足极限条件, 也满足初值条件[由于级数(9)一致收敛, 现在我们知道可以对 t 逐项微分¹], 证实这函数满足微分方程要比较复杂些**。

我们注意级数(10)在区间 $[0, l]$ 的范围内也收敛, 与从前的样, 用 $f(x)$ 及 $g(x)$ 表示它们的和, 由此得到这两函数在整个无穷区间上的开拓, 而且只可能除去在 kl 形的点处外(k 为整数), 它们保持着可微分性。我们可逐项积分(在任一有限区间上一致收敛的) $g(x)$ 的级数, 从而

$$-\sum_1^{\infty} b_n \cos \lambda_n x = \frac{1}{a} g_1(x),$$

其中 $g_1(x)$ 是函数 $g(x)$ 的一个原函数。解除(8)中的括号, 可将这表示式换写为下列形式

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{2} \left\{ \sum_1^{\infty} a_n \sin \lambda_n (x+at) + \sum_1^{\infty} a_n \sin \lambda_n (x-at) - \right. \\ \left. - \sum_1^{\infty} b_n \cos \lambda_n (x+at) + \sum_1^{\infty} b_n \cos \lambda_n (x-at) \right\} = \\ = \frac{1}{2} \left\{ f(x+at) + f(x-at) + \frac{1}{a} g_1(x+at) - \frac{1}{a} g_1(x-at) \right\}. \end{aligned}$$

对 t 并对 x 微分两次, 不难证实这函数满足方程(2)!

对于在这里所考虑的问题, 也可直接求得上面的形式的解答。但是三角级数(8)形的解答有些优点, 因为它揭露出所研究的现象的重要物理特性。合并(8)中在括号内的两项, 将展开式换写为:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \left(\frac{n\pi}{l} t + \alpha_n \right).$$

我们看到弦的全振动是由一系列各别的振动

$$y_n = A_n \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \left(\frac{n\pi}{l} t + \alpha_n \right)$$

* 这是由第682款的一般公式(21)与第683款的说明推得的, 在这里用区间 $[0, l]$ 代替 $[0, \pi]$ 当然不关重要。这时, 从与弦端点固定这一性质相关的自然的条件

$$f(0) = f(l) = 0, \quad g(0) = g(l) = 0$$

出发, 恰好能推出上述各款中用 B_n 所表示的数值是零

** 只有当对函数 f 与 g 加上特别强的限制以致于系数 a_n 与 b_n 的无穷小阶增高, 才能用逐项微分法证实此点。

所组成的。在这个振动元素中，弦上各点振动的频率相同，如果愿意的话，也可说振动的周期相同，而与一定高度的音相应。每点振动的振幅与它的位置有关，并且等于

$$A_n \left| \sin \frac{n\pi}{l} x \right|.$$

将整个弦分为 n 个相等的部分。在同一部分上的点恒有相同的相，而在相邻的部分上的点有恰好相反的相。在图 139 上，画出了当 $n=1, 2, 3, 4$ 时的弦的位置。每两部分的分界点静止不动，这就是所谓“波节”。各部分的中点（“波腹”）则有最大的振幅。这种现象称为驻波，因此通常称傅立叶法为驻波法。

基音是由第一个分音 y_1 所确定；频率 $\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{H}{\rho}}$ 及周期 $T_1 = 2l \sqrt{\frac{\rho}{H}}$ 则与它相应。与基音同时，弦所发出的其余的音（或称泛音）表征出确定的声音的“色”或音色。如果用手指压住弦的中点，则基音以及奇泛音立受阻碍；对于这种音，弦的中点是波腹。但偶泛音则都保持不变；对于这种音，弦的中点是波节。这时，在偶泛音中，以 $T_2 = \frac{1}{2} T_1$ 为周期的第二泛音起着基本的作用，并且弦开始发出原音的八度。所有这些结果都能从所得问题的解答推演出来。

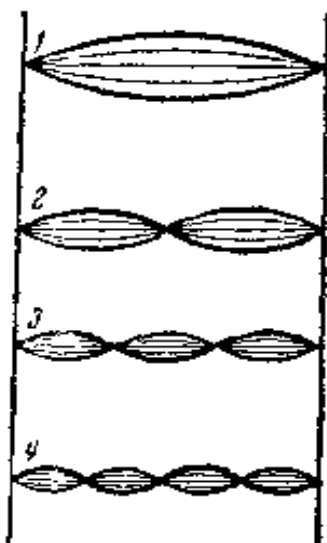


图 139.

697. 在有限长杆上的热传导问题 设有一长度为 l 的均

匀细杆放在 x 轴上的点 $x=0$ 与 $x=l$ 之间。设杆的断面的面积 σ 是充分小，以致于在每一瞬时断面的一切点都可算作有相同的温度。假定杆的侧面对周围的介质绝缘*，设已给出在开始时刻 $t=0$ 时，温度 u 的沿着杆的分布，并用函数 $f(x)$ ($0 \leq x \leq l$) 来表示它，此外，又已给出在杆的端点处的热的状况。我们的问题就是要确定杆上的点的温度为点的横坐标 x 与时间 t 的函数：

$$u = u(x, t).$$

我们考虑在断面 x 与 $x+dx$ 之间的杆元素。在无穷小的时间区间 dt 内，经过左方的断面传入元素内的热量可表示为[参考 641, 2)]：

$$-k\sigma \frac{\partial u}{\partial x} dt$$

其中 k 是杆的“内导热系数”；取负号是由于热从高温传到低温的地方。同样，在同一时间区间内，热量

$$-k\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) dt$$

经过右方的断面传出；改变这里的符号后，我们得到从右向左经过这个断面的热量，即传入

* 我们也能用平面 $x=0$ 与 $x=l$ 之间的无限巨壁来代替细杆，但须假定在每个与 x 轴垂直的平面上热的状况保持不变。

元素的热量。因此,在时间区间 dt 内,在这段元素内积蓄起来的总热量是

$$k\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dt.$$

从温度的增高 $\frac{\partial u}{\partial t} dt$ 是由热量所制约这一事实出发,我们可用另一种方法算出这热量。如果用 c 及 ρ 分别表示构成杆的物质的热容量与密度,则在此消耗的热可表示为:

$$c\rho\sigma dx \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

令两个表示式相等,我们得到基本的导热微分方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (12)$$

其中为简单起见,已令

$$a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}.$$

[然而,从第 644 款,3° 中对于空间所导出的一般方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

出发,也能导出这个方程,不过要将 u 算作与 y 及 z 都无关,]

(a) 首先假定在杆的两端点处,温度保持为常数,譬如为 0。这样就导出了极限条件:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (t \geq 0).$$

在上面我们已经提到过初值条件:

$$u(x, 0) = f(x) \quad (0 \leq x \leq l), \quad (13)$$

并且由于极限条件,必须假定 $f(0) = f(l) = 0$ 。为了求满足方程(12)以及所有提出来的条件的函数 $u(x, t)$,我们应用傅立叶的方法。

与前面一样,令 $u = XT$, 因而方程成为下列形式:

$$XT' = a^2 X''T \text{ 或 } \frac{T'}{T} = a^2 \frac{X''}{X},$$

如果令这两个比的常数值为 $-a^2\lambda^2$ ($\lambda > 0$), 则这方程可分解为两个方程

$$T' + a^2\lambda^2 T = 0, \text{ 从而 } T = Ce^{-a^2\lambda^2 t} \quad (14)$$

与

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \text{ 从而 } X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x. \quad (15)$$

为了要使得函数 XT 满足极限条件,必须有

$$A = 0, \lambda l = n\pi \text{ (其中 } n = 1, 2, 3, \dots)$$

因此与在前面的问题中一样, λ 只可能有值(7)*。令 $BC = b_n$, 我们得到一系列特解:

$$u_n = b_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x, \\ (n = 1, 2, 3, \dots)$$

* 参考第 569 页上的底注。

取通解为级数的形状:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha^2 \lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x. \quad (16)$$

要想满足初值条件, 必须令

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x) \quad (0 \leq x \leq l).$$

如果函数 $f(x)$ 连续并且有有界变差, 则要使这展开式成立, 必须取

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

这时, 证明形式上的解就是实际的解没有困难, 既然有因子

$$e^{-\alpha^2 \lambda_n^2 t} = e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t}$$

的出现. 于是我们可将级数(16)对于 t 逐项微分, 并且对于 x 两次微分; 因为所得的级数对于 $x(0 \leq x \leq l)$ 与 $t(t \geq \alpha > 0)$ 一致收敛.

(6) 现在设在端点 $x=l$ 处温度 u_0 保持不变, 而另一端点 $x=0$ 对外不传热, 因此经过它完全没有热的运动. 下列极限条件与这些假定相对应:

$$u(l, t) = u_0, \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0. \quad (17)$$

初值条件还是保持从前的形状.

为方便计, 引用新的未知函数 v 来代替 u , 令 $u = u_0 + v$. 对于 v , 我们显然有这样的方程:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

极限条件则被换为较简单的条件:

$$v(l, t) = 0, \quad \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0.$$

最后, 初值条件变换为

$$v(x, 0) = f(x) - u_0.$$

与通常一样, 令 $v = XT$, 我们对于 T 与 X 得到前面的表示式(14)与(15). 因为

$$\frac{dX}{dx} = -\lambda A \sin \lambda x + \lambda B \cos \lambda x,$$

所以第二个极限条件给出 $B=0$, 而由第一个条件推得

$$\cos \lambda l = 0,$$

因此这时 λ 可取下列的值

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{2l}, \lambda_2 = 3\frac{\pi}{2l}, \dots, \lambda_n = (2n-1)\frac{\pi}{2l}, \dots$$

最后我們得到特解如下:

$$v_n = a_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x, \\ (n = 1, 2, 3, \dots)$$

由此就可作出通解

$$v = \sum_1^{\infty} a_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x.$$

在这种情形下, 初值条件化为非标准形状的展开式:

$$\sum_1^{\infty} a_n \cos(2n-1) \frac{\pi x}{2l} = f(x) - u_0$$

【参考第 664 款的问题 25】。但不难证明当函数 $f(x)$ 适合通常的条件时, 如果

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos(2n-1) \frac{\pi x}{2l} dx - \frac{4}{\pi} u_0 \cdot \frac{1}{2n-1},$$

则这展开式实际成立。

因此, 用刚才所指出的系数值, 最后我們得到

$$u = u_0 + \sum_1^{\infty} a_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x,$$

证实它是实际的解的方法, 也与情形(a)相同。

特别, 如果 $f(x) = 0$, 则有展开式

$$u = u_0 - \frac{4u_0}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x.$$

在这公式中, 当 $u_0 = 300$, $a^2 = 0.139$ 时*, 对于不同的 t 与 x , 已经算出了 u 的值, 并且由此在图 140 上作出了表示在不同时刻杆上温度分布的图解。

698. 无穷长杆的情形 我們現在对于两端无穷长的杆要解决热传导的问题, 譬如說这杆是放在 x 軸上(或者可对于整个空间解决这个问题, 只要每个垂直于 x 軸的平面上的各点温度相同), 这时微分方程还是与从前的一样; 初值条件

$$u(x, 0) = f(x)$$

則必須在整個区间 $(-\infty, +\infty)$ 上成立, 而自然沒有任何极限条件。

* 設有一根 5 公分长的生铁杆, 則在这种情形下

$$\rho = 0.0072 \frac{\text{公斤}}{\text{公分}^3}, c = 0.13 \frac{\text{大卡}}{\text{公斤} \cdot ^\circ\text{C}}, k = 0.00013 \frac{\text{大卡}}{\text{公分} \cdot ^\circ\text{C} \cdot \text{秒}},$$

因此 $a^2 = 0.139$ 。

与在前面的情形一样，我們得到如下列形式的特解：

$$u = (a \cos \lambda x + b \sin \lambda x) e^{-a^2 \lambda^2 t},$$

但是在这里沒有理由从参数 λ 的一切正值中挑选某些值。因此，考虑到常数 a 及 b 与 λ 有关：

$$a = a(\lambda), \quad b = b(\lambda),$$

則要得到通解自然是不用和式而用积分

$$u = \int_0^{\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda. \quad (18)$$

为了使得这个——暫且还是形式上的——解满足初值条件，必須选择函数 $a(\lambda)$ 与 $b(\lambda)$ 使得对于一切 x ,

$$\int_0^{\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda = f(x).$$

現在假定函数 $f(x)$ 滿足可应用傅立叶公式的条件，則这公式可写成下列形式：

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \cos \lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cos \lambda z dz + \sin \lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \sin \lambda z dz \right\} d\lambda$$

由此函数 $a(\lambda)$ 及 $b(\lambda)$ 显然可由公式

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cos \lambda z dz, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \sin \lambda z dz$$

确定。在这种情形下，解(18)有下列形式：

$$u = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cos \lambda(z-x) dz.$$

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[-\infty, +\infty]$ 上绝对可积分，則[483, 定理 V] 在这里可交換对 λ 及对 z 积分的次序：

$$u = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz \int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(z-x) d\lambda.$$

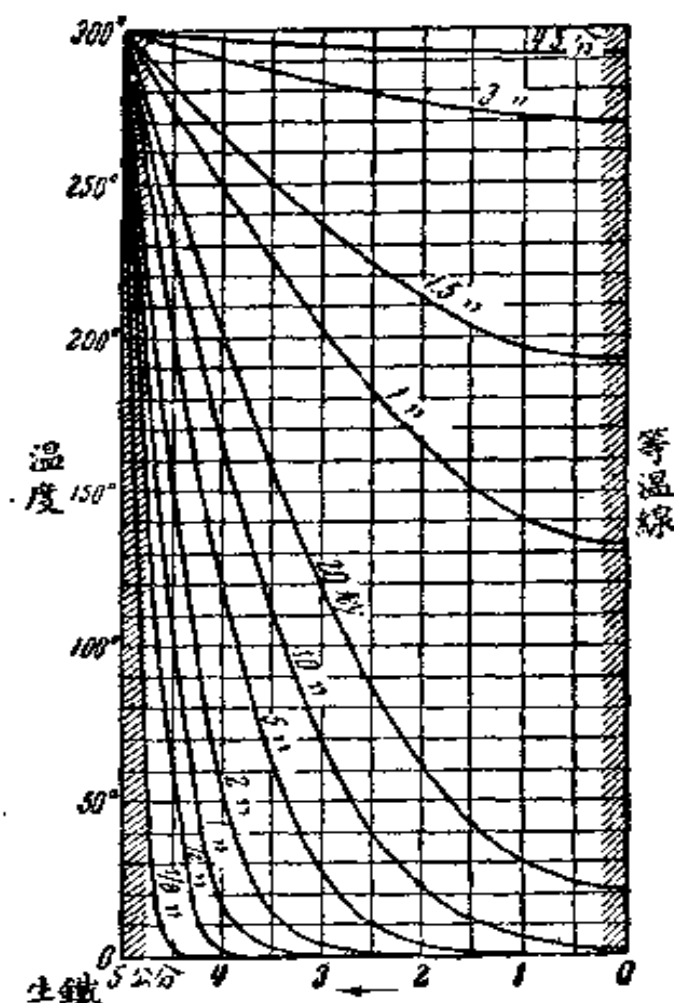


圖 140.

我們可依照第 481 款的 6)(a) 直接計算內层积分; 它等于

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}};$$

因此, 最后可将問題的解表示为簡單积分的形式:

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}} dz. \quad (19)$$

在积分号下对 t 并对 x 微分 (对 x 微分二次), 不难证实这确乎是一个解。

我們还要考虑“半无穷大”的情形, 即杆的一端为无穷长的情形, 例如設这杆是放在 x 轴的 正的部分上 (如果願意的話, 或者考虑半空間 $x \geq 0$ 的情形)。設在端点 $x=0$ 处, 溫度保持为 0。对于这种情形, 我們可应用前面的解 (19), 不过只要将函数 $f(x)$ (在这里, 它只是对于 0 与 $+\infty$ 之間的值給出的), 开拓到 x 的負值上, 使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{-\frac{z^2}{4a^2t}} dz = 0.$$

因为指数因子是偶的, 所以显然只須用奇的方式开拓函数 $f(x)$ 。这时新問題的解可写作:

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(z) \left[e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(z+x)^2}{4a^2t}} \right] dz.$$

如果当 $x=0$ 时, 需要有 $u=u_0$, 則引用新未知函数 $v=u-u_0$, 不难得到

$$u = u_0 + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} [f(z) - u_0] \cdot \left[e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(z+x)^2}{4a^2t}} \right] dz.$$

在这里我們注意 $f(x)=0$ 时的特殊情形; 这时解有如下的形式:

$$u = u_0 \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi \right\}.$$

当 $u_0=300$, $a^2=0.139$ 时*, 对于不同的 x 与 t , 用这公式計算 u 的值, 并且由此作出在不同时刻杆上溫度分布的图解。这些图解画在图 141 上, 把它与图 140 上的图解相比較是有趣的。

693. 极限条件的变形 我們回到 (697 中所討論的) 在有限长杆上的热傳导問題, 但是要改变极限条件。这就是說, 与从前一样, 假定端点 $x=0$ 处的溫度保持为零, 但設在端点

* 这与生铁杆的情形相应, 参考第 574 頁上的底注。

$x=l$ 处, 到 (温度为 0 的) 周围介质中有自由辐射。在时间区间 dt 中, 传到这个端点的热量是 [参考 697]

$$-k\sigma \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} dt,$$

又根据牛顿定律 [参考 850, 3)], 辐射出的热量等于

$$h\sigma u(l, t) dt,$$

其中 h 是“外导热系数”。因此, 在端点 $x=l$ 处, 下列条件必须成立:

$$-k \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = hu(l, t).$$

如果考虑形如 $u = XT$ 的特解, 则与在第 697 款中一样, 我们得到

$$T = Ce^{-a^2 \lambda^2 t},$$

$$X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x.$$

由在端点 $x=0$ 处的极限条件得到 $A=0$;

由在端点 $x=l$ 处的极限条件导出等式

$$-k\lambda \cos \lambda l = h \sin \lambda l,$$

或

$$\operatorname{tg} \lambda l = -\frac{k}{hl} \lambda l.$$

因此, 我们得到一系列 λ 的值:

$$\lambda_n = \frac{\xi_n}{l},$$

其中 $\xi_n (n=1, 2, 3, \dots)$ 是超越方程

$$\operatorname{tg} \xi = -\frac{k}{hl} \xi$$

的正根 [参考 653, 4)]。通解的形状则为

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x,$$

而与 (16) 相似, 但是 (我们强调指出这是重要的) 在这里数 λ_n 的性质要复杂得多。

由初值条件导出展开式

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\xi_n x}{l} = f(x); \quad (20)$$

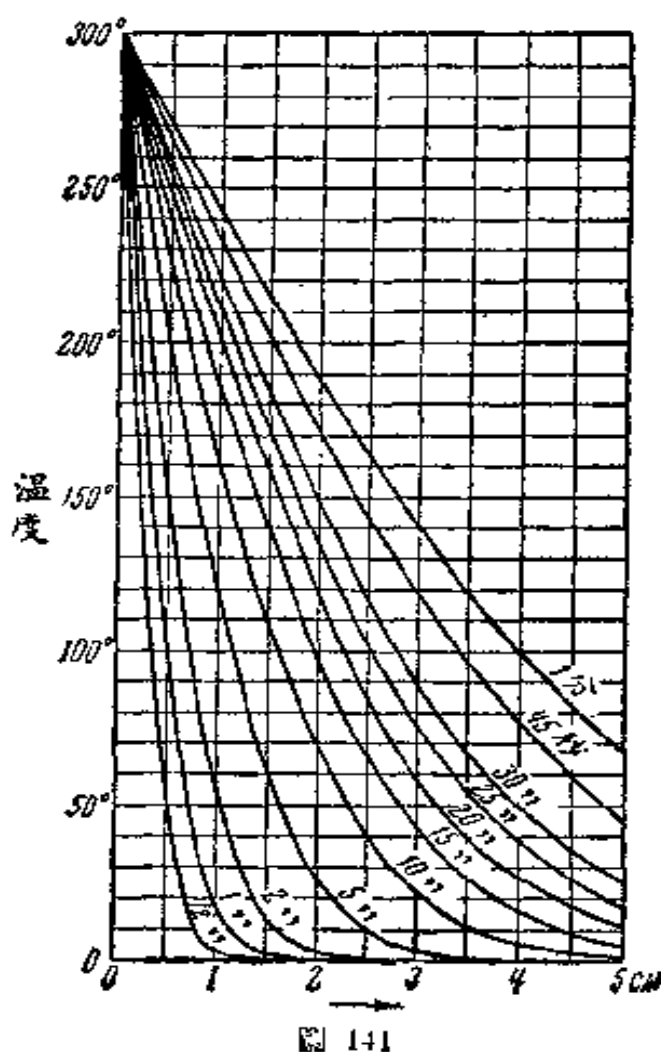


图 141

我們可將它看作函數 $f(x)$ 在區間 $[0, l]$ 上的廣義傅立葉級數，並且利用函數

$$\sin \frac{\xi_n x}{l}$$

的直交性[653, 4)]可用通常的方法確定係數 b_n :

$$b_n = \frac{\int_0^l f(x) \sin \frac{\xi_n x}{l} dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{\xi_n x}{l} dx}.$$

應當加什麼條件在函數 $f(x)$ 上就能使等式(20)成立，這一問題還是沒有解決，我們只討論了所提出的問題的形式解。

700. 在圓盤上的熱傳導 我們還對於一種情形——以 R 為半徑，以坐標原點為中心的圓盤的情形——考慮熱的問題。假定圓盤是這樣薄，以致於它的溫度不因高度而有所變更，並設它的上下表面都是絕緣的。而且我們限于研究溫度 u 只與極動徑向量 r 有關（而與極角 θ 無關）的情形；為了進行研究，只須假定初值與極限條件是怎樣的。[在這裡，也可考慮用上下兩方無窮長的圓柱來代替表面絕緣的圓盤。]

取一般的導熱微分方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

[644, 3°]，首先由於 u 與 z 無關，我們將它換寫為

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

在 xy 平面上換用極坐標，則必須改變括弧中的表示式如下：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}.$$

[參考 212, 1)]。最後，考慮到 u 與 θ 無關，我們得到這樣的方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (21)$$

設給出溫度的初值分布如下：

$$u(r, 0) = \varphi(r) \quad (0 \leq r \leq R),$$

而極限條件化為

$$u(R, t) = 0.$$

在這裡也採用傅立葉的方法。我們先求方程(21)如下列形式的特解：

$$u = R(r)T(t);$$

這時我們得到確定這兩函數的方程

$$T'' + a^2 \lambda^2 T = 0 \quad \text{及} \quad R'' + \frac{1}{r} R' + \lambda^2 R = 0.$$

由其中第一个方程, $T = Ce^{-a^2 \lambda^2 t}$. 如果令 $\rho = \frac{1}{\lambda} z$ 及 $R\left(\frac{1}{\lambda} z\right) = J(z)$, 则第二个方程变为贝塞尔方程:

$$J'' + \frac{1}{z} J' + J = 0.$$

将 J 看作有零指标的贝塞尔函数, 亦即令 $R(r) = J_0(\lambda r)$, 则由极限条件得

$$J_0(\lambda R) = 0.$$

在 653, 6) 中, 我們已經提到函数 $J_0(x)$ 有无穷个正根 $\xi_n (n=1, 2, 3, \dots)$; 因此, λ 可能有一系列的值如下:

$$\lambda_n = \frac{\xi_n}{R} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

下面的特解与这些值相对应:

$$u_n = c_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r),$$

与通常一样, 由此作出通解:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r).$$

再只要确定系数 c_n . 在这种情形下, 从沒有应用过的初值条件可推出

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0\left(\frac{\xi_n r}{R}\right) = \varphi(r) \quad (0 \leq r \leq R).$$

在 653, 6) 中, 我們已看到, 函数系 $\{J_0(\xi_n x)\}$ 在区间 $[0, 1]$ 上“加权” x 广义正交*; 显然, 函数系 $\left\{J_0\left(\frac{\xi_n r}{R}\right)\right\}$ 在区间 $[0, R]$ 上“加权” r 正交. 用通常的方法确定这个广义傅立叶级数的系数, 我們得到

$$c_n = \frac{\int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\xi_n r}{R}\right) dr}{\int_0^R r J_0^2\left(\frac{\xi_n r}{R}\right) dr}.$$

在这里我們也只满足于求得形式的解。

讀者看出最后的两例已經越出了通常的傅立叶级数的范围。現在举出它們是为了使讀者明了傅立叶级数的应用問題在数学物理中的正确地位。它們在那里起着重要的作用, 可是还远不能滿足数学物理上的需要: 只要問題的条件略有变更, 則必須应用另一种展开式。因为傅立叶级数永远是“正交展开式”的最重要且最簡單的实例, 所以上述情况絲毫不能减低傅立叶级数及其理論上发展的价值; 其他一切类似的展开式都是以它为典范而作出的, 它們的理論与傅立叶级数的理論有着最密切的連系。

* 参考在第 434 頁上的底注。

701. 实用調和分析·十二个纵坐标的方法 在机械及电机工程等許多純粹实用的問題中,函数的傅立叶級数展开式或調和分析是不可缺少的。但在这些情形下,很少要直接利用欧勒-傅立叶公式来计算展开式的系数:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, & a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$(n=1, 2, 3, \dots)$$

我們要对給出的函数应用調和分析,但是問題在于这些函数通常是用数值表或图解給出的。因此,我們沒有函数的分析表示式;有时应用調和分析就是为了用这种方法求得函数的分析表示式(即令是近似的也好)。在这些条件下,必須用近似法计算傅立叶系数。当然,在实用上只需要用到三角展开式的前若干項。在多数情况下,傅立叶級数的系数迅速减小,而較远各調和素的影响也随着迅速减小。

通常先給出(或用图解画出)一系列等距离的纵坐标,即函数 y 的一系列数值(与变数 x 的等距离的各值相对应)。应用第九章 (§5) 中所述的方法,可由这些纵坐标近似地計算出 (22) 中各值。但是在这里,計算十分复杂,为了使計算簡化,或如所謂使其自动化,已經得到了許多不同的方法,現在我們說明其中一种方法。

譬如設將 0 到 2π 的区间分成 k 个相等的部分,并且已知与分点

$$0, \frac{2\pi}{k}, 2 \cdot \frac{2\pi}{k}, \dots, (k-1) \frac{2\pi}{k}, 2\pi$$

相对应的纵坐标是

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k = y_0.$$

这时由梯形公式[309],我們有(当然只是近似地!)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{k} \left[\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{k-1} + \frac{1}{2} y_k \right],$$

由于函数的周期性, $y_k = y_0$, 就可将 a_0 的值写作:

$$ka_0 = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{k-1}. \quad (23)$$

同样,对于(22)中其他的积分应用梯形公式,求得

$$a_m = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{k} \left[y_0 + y_1 \cos m \frac{2\pi}{k} + y_2 \cos m \frac{4\pi}{k} + \dots + y_{k-1} \cos m \frac{2(k-1)\pi}{k} \right]$$

或

$$\frac{k}{2} a_m = y_0 + y_1 \cos m \frac{2\pi}{k} + y_2 \cos m \frac{4\pi}{k} + \dots + y_{k-1} \cos m \frac{2(k-1)\pi}{k}, \quad (24)$$

* 在这里,我們回到用 a_0 (而不用 $\frac{a_0}{2}$) 来表示三角展开式中的常数項。

同样得到

$$\frac{k}{2}b_m = y_1 \sin m \frac{2\pi}{k} + y_2 \sin m \frac{4\pi}{k} + \cdots + y_{k-1} \sin m \frac{2(k-1)\pi}{k}. \quad (25)$$

首先令 $k=12$, 并且从十二个纵坐标

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{11}$$

出发, 与之相当的有等间隔的变数数值:

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6},$$

或用度数表示, 则有

$$0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 330^\circ.$$

根据公式, 需要用来乘这些纵坐标的所有因子不外乎下列几个:

$$\pm 1, \pm \sin 30^\circ = \pm 0.5, \pm \sin 60^\circ = \pm 0.866.$$

亦即容易证实

$$\left. \begin{aligned} 12a_0 &= y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} \\ 6a_1 &= (y_2 + y_{10} - y_4 - y_8) \sin 30^\circ + (y_1 + y_{11} - y_5 - y_7) \sin 60^\circ + (y_0 - y_6) \\ 6a_2 &= (y_1 + y_5 + y_7 + y_{11} - y_2 - y_4 - y_8 - y_{10}) \sin 30^\circ + (y_0 + y_6 - y_3 - y_9) \\ 6a_3 &= y_0 + y_4 + y_8 - y_2 - y_6 - y_{10} \\ 6b_1 &= (y_1 + y_5 - y_7 - y_{11}) \sin 30^\circ + (y_2 + y_4 - y_8 - y_{10}) \sin 60^\circ + (y_3 - y_9) \\ 6b_2 &= (y_1 - y_2 + y_7 + y_8 - y_4 - y_5 - y_{10} - y_{11}) \sin 60^\circ \\ 6b_3 &= y_1 + y_5 + y_9 - y_3 - y_7 - y_{11}, \text{ 等等。} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

例如

$$\begin{aligned} 6a_1 &= y_6 + y_1 \cos 30^\circ + y_2 \cos 60^\circ + y_3 \cos 90^\circ + y_4 \cos 120^\circ + y_5 \cos 150^\circ + \\ &+ y_6 \cos 180^\circ + y_7 \cos 210^\circ + y_8 \cos 240^\circ + y_9 \cos 270^\circ + \\ &+ y_{10} \cos 300^\circ + y_{11} \cos 330^\circ = y_0 + y_1 \sin 60^\circ + y_2 \sin 30^\circ - y_4 \sin 30^\circ - \\ &- y_5 \sin 60^\circ - y_6 - y_7 \sin 60^\circ - y_8 \sin 30^\circ + y_{10} \sin 30^\circ + y_{11} \sin 60^\circ, \end{aligned}$$

即与上面所写出的表示式相符合。

为了使计算 (特别是乘法) 减少到最低限度, 可用隆格 (C. Runge) 所提出的方法来计算。

先依下面所指出的次序写出纵坐标, 并且对每一组上下成对的纵坐标作加法与减法:

	纵坐标					
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	
和	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
差		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5

然后同样抄下这些和与差,并且再对它们作加法与减法:

和				差				
u_0	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3		
u_6	u_5	u_4		v_5	v_4			
和	s_0	s_1	s_2	s_3	和	σ_1	σ_2	σ_3
差	d_0	d_1	d_2		差	δ_1	δ_2	

作了所有这些加法与减法后,就得到了一系列数值 s, d, σ, δ , 我们可用它们表示出未知系数如下:

$$\left. \begin{aligned} 12a_0 &= s_0 + s_1 + s_2 + s_3, \\ 6a_1 &= d_0 + 0.866d_1 + 0.5d_2, \\ 6a_2 &= (s_0 - s_3) + 0.5(s_1 - s_2), \\ 6a_3 &= d_0 - d_2, \\ 6b_1 &= 0.5\sigma_1 + 0.866\sigma_2 + \sigma_3, \\ 6b_2 &= 0.866(\delta_1 + \delta_2), \\ 6b_3 &= \sigma_1 - \sigma_3 \text{ 等等.} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

不难证实这些公式恰与公式(26)相对应。

702. 例 1) 在图 142 上, 繪出了某蒸汽机(在曲柄梢处)的切缝力的图*. 由于曲柄轴的扭转振动的問題, 选定切缝力 T 的調和素作为曲柄轉角 φ 的函数是有趣的. 从图上取出十二个等距离的纵坐标, 并且用上面所指出的方式进行調和分析:

T	$\left\{ \begin{array}{ccccccc} -7200 & -300 & 7000 & 4300 & 0 & -5200 & -7400 \\ & 250 & 4500 & 7600 & 3850 & -2250 & - \end{array} \right.$						
u	$\left\{ \begin{array}{ccccccc} -7200 & -50 & 11500 & 11900 & 3850 & -7450 & -7400 \\ & -550 & 2500 & -3300 & -3850 & -2950 & \end{array} \right.$						
v							
u	$\left\{ \begin{array}{cccc} -7200 & -50 & 11500 & 11900 \\ -7400 & -7450 & 3850 & \end{array} \right.$				v	$\left\{ \begin{array}{ccc} -550 & -2500 & -3300 \\ -2950 & -3850 & \end{array} \right.$	
s	$\left\{ \begin{array}{cccc} -14600 & -7500 & 15350 & 11900 \end{array} \right.$				σ	$\left\{ \begin{array}{ccc} -3500 & -1350 & -3300 \end{array} \right.$	
d	$\left\{ \begin{array}{ccc} 200 & 7400 & 7650 \end{array} \right.$				δ	$\left\{ \begin{array}{cc} 2400 & 6350 \end{array} \right.$	

現由公式(27):

$$\begin{aligned} 12a_0 &= -14600 - 7500 + 15350 + 11900 = 5150; & a_0 &= 429, \\ 6a_1 &= 200 + 7400 \times 0.866 + 7650 \times 0.5 = 10433; & a_1 &= 1739, \\ 6a_2 &= (-14600 - 11900) + (-7500 - 15350) \times 0.5 = -37925; & a_2 &= -6321 \end{aligned}$$

* 考虑到慣性力, 可由指标图(индикаторные диаграммы)作出类似的图,

$$6a_3 = 200 - 7650 = -7450;$$

$$a_3 = -1242,$$

$$6b_1 = -3500 \times 0.5 - 1350 \times 0.866 - 3300 = -6219;$$

$$b_1 = -1037,$$

$$6b_2 = (2400 + 6350) \times 0.866 = 7578;$$

$$b_2 = 1263,$$

$$6b_3 = -3500 + 3300 = -200;$$

$$b_3 = -33.$$

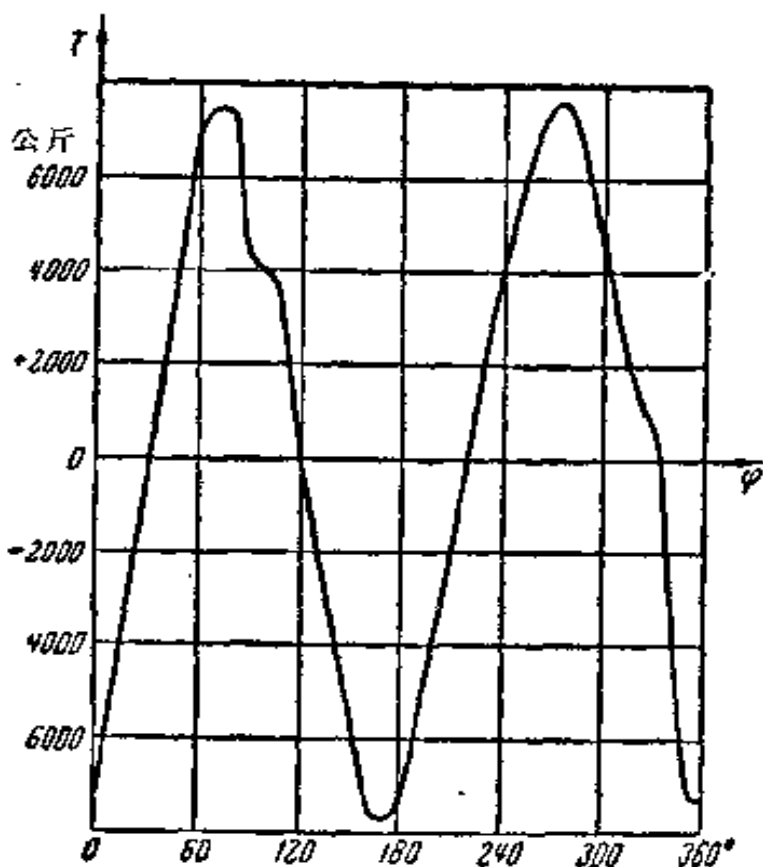


图 142

因此

$$T = 429 + 1739 \cos \varphi - 1037 \sin \varphi - 6321 \cos 2\varphi + 1263 \sin 2\varphi - \\ - 1242 \cos 3\varphi - 33 \sin 3\varphi + \dots$$

集合含同一角的正弦与余弦的各项:

$$T = 430 + 2020 \sin(\varphi + 121^\circ) + 6440 \sin(2\varphi + 281^\circ) + \\ + 1240 \sin(3\varphi + 266^\circ) + \dots$$

我們可看到: 在这里, 第二調和素的影响最大。

2) 用函数的图解上的十二个纵坐标, 可以求得傅立叶系数。为了要知道这种方法的精确度是怎样, 我們將它应用到若干有分析式的函数, 并且将近似的与精确的结果加以比較。

先考虑函数 $f(x)$, 它在区间 $[0, 2\pi]$ 上是由下一公式给定:

$$y = f(x) = \frac{1}{2\pi^2} (x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x),$$

而对于其余的值 x , 则由周期规律所确定:

$$f(x+2\pi) = f(x)$$

这函数的图解画在图 143 上。

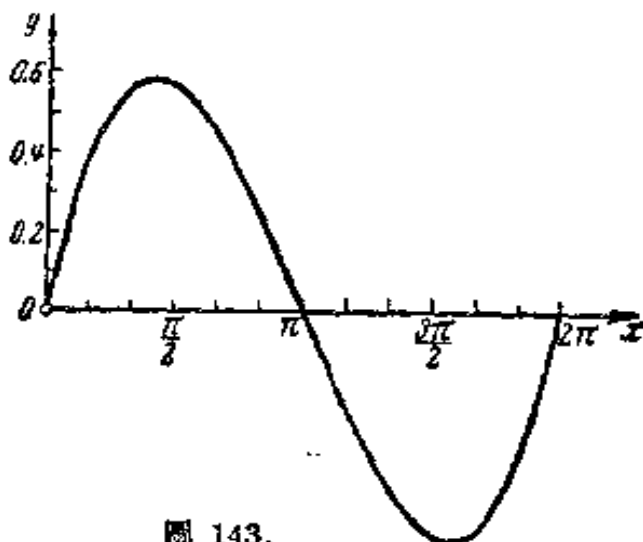


图 143.

用计算得出下表:

$x =$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y =$	0	0.400	0.582	0.589	0.465	0.255	0	-0.255	-0.465	-0.589	-0.582	-0.400	0

在这里可应用不难证实的恒等式:

$$f(2\pi - x) = -f(x).$$

用隆格的方法, 由这些 y 的值求得

$$b_1 = 0.608, \quad b_2 = 0.076, \quad b_3 = 0.022;$$

一切数 a_n 都是零, 从而一切系数 a_n 也都是零[664, (22)]。

同时, 由公式(22)直接推出(应用分部积分三次):

$$b_m = \frac{1}{2\pi^3} \int_0^{2\pi} (x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x) \sin mx \, dx = \frac{6}{m^3 \pi^2}.$$

因此

$$b_1 = \frac{6}{\pi^2} = 0.6079, \quad b_2 = \frac{3}{4\pi^2} = 0.0760, \quad b_3 = \frac{2}{9\pi^2} = 0.0225.$$

与上面的结果相符合!

3) 但是并不是永远可以得到这样精确的结果。

作为第二个例子, 我们取一以 2π 为周期的函数, 它在区间 $[0, 2\pi]$ 上定义如下:

$$y = f(x) = \frac{1}{\pi^2} (x - \pi)^2.$$

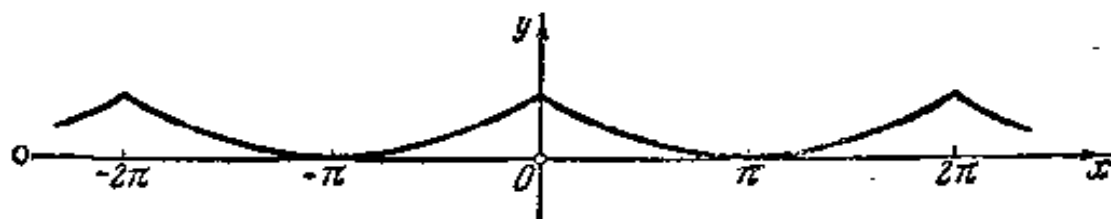


圖 144.

它的图解画在图 144 上。

利用显而易见的恒等式:

$$f(2\pi - x) = f(x),$$

作出下表:

$x =$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y =$	1	0.694	0.444	0.250	0.111	0.028	0	0.028	0.111	0.250	0.444	0.694	1

这时由隆格的方法,求得

$$a_0 = 0.338; \quad a_1 = 0.414; \quad a_2 = 0.111; \quad a_3 = 0.056;$$

在这次,数 b_n 与系数 b_m 都是零[664, 22]。系数的正确的值是:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi^3} \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 dx = \frac{1}{3} \doteq 0.333,$$

$$a_{mn} = \frac{1}{\pi^3} \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \cos mx dx = \frac{4}{m^2\pi^2} \quad (m \geq 1).$$

特别,

$$a_1 = \frac{4}{\pi^2} \doteq 0.405; \quad a_2 = \frac{1}{\pi^2} \doteq 0.101; \quad a_3 = \frac{4}{9\pi^2} \doteq 0.045.$$

这样,即令前两个系数的相对误差不超过 1.5—2%,而后面的系数的误差则达到 10% (a_2) 甚至 20% (a_3)! 以后 [705] 我们还要研究求得的近似公式的精确性的问题。但是现在已经可以看出要提高精确性,必须取较多的纵坐标。

703. 二十四个纵坐标的方法 假定已经给出或已经从图解取出与幅角的值

$$0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \dots, \frac{23\pi}{12},$$

或

$$0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, \dots, 345^\circ$$

相对应的二十四个纵坐标

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{23}.$$

在这次,近似计算傅立叶系数时所必须与纵坐标相乘的因子不外乎下列几个:

$$\pm 1, \pm \sin 30^\circ, \pm \sin 45^\circ, \pm \sin 60^\circ, \pm \sin 75^\circ.$$

我們現不詳細討論 (因为与前面的討論完全相仿), 而立即引入还是由隆格所提出的計
算方法。在讀者有了經驗后, 不必加以說明, 这种方法也是很明显的。它就是,

	纵 坐 标													
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	
	y_{23}	y_{22}	y_{21}	y_{20}	y_{19}	y_{18}	y_{17}	y_{16}	y_{15}	y_{14}	y_{13}			
和	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	
差	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}			
	和						差							
	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	
	u_{12}	u_{11}	u_{10}	u_9	u_8	u_7		v_{11}	v_{10}	v_9	v_8	v_7		
和	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	和	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
差	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5		差	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	
	和						差							
	p_0	p_1	p_2	p_3				s_1	s_2	s_3				
	p_6	p_5	p_4					s_5	s_4					
和	k_0	k_1	k_2	k_3	和	m_1	m_2	m_3						
差	l_0	l_1	l_2		差	n_1	n_2							

我們注意不要对于 q 与 r 各数量作加法及减法。

由所指出的方法求得数量 k, l, m, n, p, q , 及 r 后, 用它們将傅立叶系数表示如下:

$$\begin{aligned}
 24a_0 &= k_3 + k_1 + k_2 + k_3, \\
 12a_1 &= [q_0 + 0.5q_4 + 0.6124(q_1 + q_5)] + [0.8660q_2 + 0.7071q_3 + 0.3536(q_1 - q_5)], \\
 12a_2 &= l_0 + 0.8660l_1 + 0.5l_2, \\
 12a_3 &= (q_0 - q_4) + 0.7071(q_1 - q_3 - q_5), \\
 12a_4 &= (k_0 - k_3) + 0.5(k_1 - k_2), \\
 12a_5 &= [q_0 + 0.5q_4 + 0.6124(q_1 + q_5)] - [0.8660q_2 + 0.7071q_3 + 0.3536(q_1 - q_5)], \\
 12a_6 &= l_0 - l_2, \\
 12b_1 &= [0.5r_2 + r_6 + 0.6124(r_1 + r_5)] + [0.7071r_3 + 0.8660r_4 - 0.3536(r_1 - r_5)], \\
 12b_2 &= 0.5m_1 + 0.8660m_2 + m_3, \\
 12b_3 &= (r_2 - r_6) + 0.7071(r_1 + r_3 - r_5), \\
 12b_4 &= 0.8660(m_1 + m_2), \\
 12b_5 &= [0.5r_2 + r_6 + 0.6124(r_1 + r_5)] - [0.7071r_3 + 0.8660r_4 - 0.3536(r_1 - r_5)], \\
 12b_6 &= m_1 - m_3, \text{ 等等。}
 \end{aligned} \tag{28}$$

用二十四个纵坐标, 求其余的系数, 则其精确度逐渐减低。

請讀者注意一个细节的問題。为了得到系数 a_1 与 a_5 必須先分別計算在方括弧中的表示式, 然后将它們相加(在求 a_1 时)及相减(在求 a_5 时)。計算系数 b_1 与 b_5 也与此相仿。

704. 例 1) 再回到图 142 上所作出的切綫力的图, 从其中取出二十四个纵坐标, 应用新的方法重新进行調和分析:

T	{	-7200	-4150	-300	3250	7000	7450	4300	2750	0	-2650	-5200	-7700	-7400
			-5150	250	2300	4500	6800	7600	6400	3450	650	-2250	-4850	
u	{	-7200	-9300	-50	5550	11500	14250	11900	9150	3850	-2000	-7450	-12550	-7400
v	{		1000	-550	950	2500	650	-3300	-3650	-3850	-3300	-2950	-2850	
u	{	-7200	-9300	-50	5550	11500	14250	11900						
		-7400	-12550	-7450	-2000	3850	9150							
p	{	-14600	-21850	-7500	3550	15350	23400	11900						
q	{		200	3250	7400	7550	7650	5100						
v	{		1000	-550	950	2500	650	-3300						
		-2850	-2950	-3300	-3850	-3650								
r	{	-1850	-3500	-2350	-1350	-3000	-3300							
s	{		3850	2400	4250	6350	4300							
p	{	-14600	-21850	-7500	3550									
		11900	23400	15350										
k	{	-2700	1550	7850	3550									
l	{	-26500	-45250	-22850										
s	{	3850	2400	4250										
m	{		8150	8750	4250									
n	{		-450	-3950										

于是按照公式(28)

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 427, & a_1 &= 1685, & a_2 &= -6426, & a_3 &= -1175, & a_4 &= -783, \\
 a_5 &= -163, & a_6 &= -304, & b_1 &= -938, & b_2 &= 1325, & b_3 &= -87, \\
 b_4 &= -318, & b_5 &= -398, & b_6 &= 325.
 \end{aligned}$$

故求得展开式:

$$\begin{aligned}
 T &= 427 + 1685 \cos \varphi - 938 \sin \varphi - 6426 \cos 2\varphi - 1325 \sin 2\varphi - 1175 \cos 3\varphi - 87 \sin 3\varphi - \\
 &\quad - 783 \cos 4\varphi - 318 \sin 4\varphi - 163 \cos 5\varphi - 398 \sin 5\varphi - 304 \cos 6\varphi + 325 \sin 6\varphi + \dots
 \end{aligned}$$

或者合并各项并加括弧:

$$\begin{aligned}
 T &= 430 + 1930 \sin(\varphi + 119^\circ) + 6560 \sin(2\varphi + 282^\circ) + 1180 \sin(3\varphi + 266^\circ) + \\
 &\quad + 845 \sin(4\varphi + 248^\circ) + 430 \sin(5\varphi + 202^\circ) + 445 \sin(6\varphi + 317^\circ) + \dots
 \end{aligned}$$

比較这个展开式与第 702 款, 1) 中所求出的同一量 T 的展开式, 我們看到对于前三个项和素, 其符合程度多少令人满意。

2) 請讀者計算第 702 款, 3) 中所提出的曲綫

$$y = \frac{1}{\pi^2}(x-\pi)^2$$

的二十四个纵坐标, 并且利用已指出的方法, 求出系数 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ 的近似值。

答 $\alpha_0 \doteq 0.334; \alpha_1 \doteq 0.407; \alpha_2 \doteq 0.104; \alpha_3 \doteq 0.047; \alpha_4 \doteq 0.028; \alpha_5 \doteq 0.019;$

$\alpha_6 \doteq 0.014$, 而这时正确的数值是:

$$\alpha_0 \doteq 0.333; \alpha_1 \doteq 0.405; \alpha_2 \doteq 0.101; \alpha_3 \doteq 0.045; \alpha_4 \doteq 0.025; \alpha_5 \doteq 0.016;$$

$$\alpha_6 \doteq 0.011.$$

为了近似計算函数三角展开式的系数, 除了上面的方法以外, 还有其他的方法: 例如十六个或三十二个纵坐标法(在航海中, 当研究罗盘的偏差时, 通常要用到这种方法), 三十六个纵坐标法(在电机工程上采用), 等等。也还有自动安排計算的各种方法。在所有这些情形下, 当实际計算傅立叶系数时用来简化計算的方法, 其实质与上面的方法相同。

705. 傅立叶系数的近似值与精确值的比较 如果函数 $y=f(x)$ 是在区間 $[0, 2\pi]$ 上用分析式給出的并且是二級可微分的, 則可与通常一样 [313], 对于上面所得到的傅立叶系数的近似公式, 求出誤差。在这里, 我們还有另一目的, 就是要作出已給系数的近似值与这系数及其他系数的精确值之間的关系式。虽然从这些关系式不能导出誤差的估計值, 但是还是闡明了整个問題, 并且指出了問題应有的方向。

我們假定所考虑的函数 $y=f(x)$ 的区間 $[0, 2\pi]$ 上有傅立叶展开式:

$$y = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx.$$

在这里, 我們故意用大写字母表示傅立叶系数, 使得它們与小写字母所表示的近似值有所区别。在所写出的等式中, 令 $x = \frac{2i\pi}{k}$ ($i=0, 1, \dots, k-1$), 我們計算出函数的各特別值 y_i :

$$y_i = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{2in\pi}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{2in\pi}{k}.$$

它們是要在系数近似值的公式(23), (24)与(25)中出現的。

将 y_i 代入上述第一个公式; 交换求和的次序, 我們求得:

$$\alpha_c = \frac{1}{k} \left\{ kA_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_{i=0}^{k-1} \cos \frac{2in\pi}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sum_{i=0}^{k-1} \sin \frac{2in\pi}{k} \right\}.$$

可是不难看出和式

$$\sum_{i=0}^{k-1} \cos \frac{2i n \pi}{k}, \quad \sum_{i=0}^{k-1} \sin \frac{2i n \pi}{k}$$

除去 n 是 k 的倍数的情形外, 都等于零; 而在 n 是 k 的倍数时, 第一个和式的恒是 k (这时第二个和式等于零)。由此立刻得到

$$a_0 = A_0 + A_k + A_{2k} + A_{3k} + \cdots \quad (29)$$

将 y_i 的表示式代入公式(24), 并且重新交换求和的次序, 我们得到:

$$\begin{aligned} a_m = \frac{2}{k} \left\{ A_0 \sum_{i=0}^{k-1} \cos i \frac{2m\pi}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_{i=0}^{k-1} \cos i \frac{2m\pi}{k} \cos i \frac{2n\pi}{k} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sum_{i=0}^{k-1} \cos i \frac{2m\pi}{k} \sin i \frac{2n\pi}{k} \right\} = \frac{1}{k} \left\{ 2A_0 \sum_{i=0}^{k-1} \cos i \frac{2m\pi}{k} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\sum_{i=0}^{k-1} \cos i \frac{2(n+m)\pi}{k} + \sum_{i=0}^{k-1} \cos i \frac{2(n-m)\pi}{k} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[\sum_{i=0}^{k-1} \sin i \frac{2(n+m)\pi}{k} + \sum_{i=0}^{k-1} \sin i \frac{2(n-m)\pi}{k} \right] \right\}. \end{aligned}$$

在这里, 也只有当余弦和式所含的因子 $n \pm m$ 是 k 的倍数时 (也就是当 n 的值具有 $pk \pm m$ 的形式时, 其中 p 是整数), 这些和式才不等于零 (而等于 k)。如果为了明确起见, 设 $2m \leq k$, 则对于 a_m , 得到级数如下:

$$a_m = A_m + A_{k-m} + A_{k+m} + A_{2k-m} + \cdots \quad (30)$$

与这完全相仿, 可得

$$b_m = B_m - B_{k-m} + B_{k+m} - B_{2k-m} + \cdots \quad (31)$$

这就是我们所想要建立的公式。

由此我们就看出: 譬如说, 只要 k 大而 m 并不太大, a_m 与 A_m 的差是若干个有较大的附标的系数 A 的和式。显然在近似值的精确性的问题中, 傅立叶系数减小的速度起着重要的作用, 而我们知道[680—682]这种速度又与开拓在整个区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数的可微分性相关。第 702 款的例 2) 与 3) 很好地表明了这种情况: 请读者注意例 3) 的图解上的尖点!

令 $k=12$, 我们特别有 (限于取余弦的系数为例):

$$a_0 = A_0 + A_{12} + \cdots, \quad a_1 = A_1 + A_{11} + \cdots,$$

$$a_2 = A_2 + A_{10} + \cdots, \quad a_3 = A_3 + A_9 + \cdots$$

并且同时有

$$a_5 = A_5 + A_7 + \cdots, \quad a_6 = 2A_6 + \cdots (!)$$

等等。由此可見：超出了前面两、三个調和素的范围以外，不可能期望有多少令人滿意的精确性

当轉到 $k=24$ 时，就立刻改善了这些結果：

$$\alpha_0 = A_0 + A_{24} + \cdots, \quad \alpha_1 = A_1 + A_{25} + \cdots, \quad \cdots,$$

$$\alpha_6 = A_6 + A_{18} + \cdots, \quad \text{等等。}$$

在这里，一般說来，对于前面七、八个調和素，可期望有較好的精确性。

第二十章 傅立叶級数(續)*

§ 1. 傅立叶級数的运算・完全性与閉合性

706. 傅立叶級数的逐項积分法 与通常一样, 假定函数 $f(x)$ 在区間 $[-\pi, \pi]$ 上絕對可积分。設它的傅立叶級数是

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \quad (1)$$

考虑关于 $-\pi \leq x \leq \pi$ 的函数

$$F(x) = \int_0^x \left[f(x) - \frac{a_0}{2} \right] dx, \quad (2)$$

显然它是連續的, 并且有有界变差[449, 7°; 543, 4°]; 而且因为

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - \pi a_0 = 0, \quad (3)$$

所以它有周期 2π 。在这种情形下, 由第 660 款的定理, 可将这个函数在整个区間上展开为傅立叶級数:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx \quad (4)$$

(而且根据 673, 这級数一致收敛于这个函数)。

級数(1)及(4)的系数之間存在着简单的联系。实际上, 如果利用

* 第十九章主要是討論函数的傅立叶收敛級数展开式; 在那章中, 这些級数是作为計算的工具而研究的。在本章中, 我們要从較一般的观点出发, 并且叙述一系列主要在理論上有意义的重要問題。

第 555 款, 9) 中所推广了的分部积分公式, 则有 (对 $n \geq 1$)

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} F(x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \end{aligned}$$

即

$$A_n = -\frac{b_n}{n}.$$

同样, 在这次考虑等式(3), 我們得到

$$B_n = \frac{a_n}{n}.$$

为了求出 A_0 , 在(4)中令 $x=0$:

$$\frac{A_0}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}. \quad (5)$$

在展开式(4)中, 代入所求得各系数的值, 则能将它改写为下列形式:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx + b_n(1 - \cos nx)}{n}.$$

由此, 如果考虑等式(2), 我們有

$$\int_0^x f(x) dx = \int_0^x \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x [a_n \cos nx + b_n \sin nx] dx. \quad (6)$$

显然, 对于任意区间 $[x', x'']$ (其中 $-\pi \leq x' < x'' \leq \pi$), 相似的关系式成立:

$$\int_{x'}^{x''} f(x) dx = \int_{x'}^{x''} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x'}^{x''} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] dx.$$

因此, 函数 $f(x)$ 的积分可将与它相应的傅立叶级数逐项积分而

求得。我們已經证明：即令不假定傅立叶级数 (1) 本身收敛于函数 $f(x)$ ，还恒可将它逐项积分，这个事实很值得注意。

显然可选取另外任一个长为 2π 的区間来代替 $[-\pi, \pi]$ 作为基本区間。关于在区間 $[0, \pi]$ 上且只含余弦或正弦的级数，这里所讲到的一切也还是完全一样。

积分已知的三角展开式，可得到另外一些展开式。如果还是要得到三角展开式，则应将 (6) 中的 $\frac{a_0 x}{2}$ 这一項移到等式的另一端。需要注意常数項 $\frac{A_0}{2}$ ：直接由级数 (5) 求和，或者按照下一公式求积分：

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \int_0^x [f(t) - \frac{a_0}{2}] dt,$$

就能得到 $\frac{A_0}{2}$ 的有限形状。

我們举例說明此点。如果从 0 到 x 积分下一展开式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi)$$

[参考 664, 2)], 則得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos nx}{n^2} = \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{4}x^2.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + c \quad (0 \leq x \leq 2\pi),$$

其中 c 或为级数之和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

所确定，或为积分

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{4}x^2 \right) dx = \frac{\pi^2}{6}$$

所确定。这样，我們得到了 664, 9) 中已經独立求得的展开式。同样，7)(a) 中的展开式可由 7)(b) 中的展开式求得，等等。

附注 我們着重指出已作的討論順便证明了这个事实：不論区間 $[-\pi, \pi]$ 上的绝对可积分函数 $f(x)$ 是怎样，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \quad (5^*)$$

必收敛，其中 b_n 是 $f(x)$ 的傅立叶级数的正弦項的系数[参考 666, 2°]。在下面 733 中，我們

要用到这个附注。

707. 傅立叶级数的逐项微分法 設在区間 $[-\pi, \pi]$ 上給出一連續函数 $f(x)$, 它滿足条件 $f(-\pi) = f(\pi)$, 并且有(只可能除了在有限个孤立点处外)导数 $f'(x)$; 又設这个导数在所述的区間上絕對可积分。这时

$$f(x) = \int_0^x f'(x) dx + f(0)$$

[298, 445], 并且如我們剛才已看出, 函数 $f(x)$ 的傅立叶級数(1)可由函数 $f'(x)$ 的傅立叶級数

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos nx + b'_n \sin nx \quad (7)$$

逐項积分而得, 因为根据对 $f(x)$ 所加的条件, 上一展开式中沒有常数項:

$$a'_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] = 0.$$

在这种情形下, 显然反过来——导数 $f'(x)$ 的級数(7)可由函数 $f(x)$ 的級数(1)逐項微分而得。

我們請讀者特別注意函数 $f(x)$ 的周期性这一假定在这里所起的作用。当这个条件不成立时, $f'(x)$ 的傅立叶級数的常数項 $\frac{a'_0}{2}$ 不等于零, 因此这个級数不能由級数(1)逐項微分而得! 例如在展开式(a 不是整数)

$$\frac{\pi}{2} \frac{\sin ax}{\sin \alpha x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\alpha^2 - n^2} \sin nx$$

[664, 7)(6)]的情形下, 逐項微分后得到級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{\alpha^2 - n^2} \cos nx,$$

它显然不可能是傅立叶級数, 因为它的系数甚至不趋近于零[656].

附注 直到現在为止, 我們已讲过: 将原有函数 $f(x)$ 的傅立叶級数逐項微分, 可能求得导数 $f'(x)$ 的傅立叶級数(7)。我們完全沒有說到級数(7)收敛于 $f'(x)$; 应当利用若干充分判別法, 来特別判断这种收敛性[658, 660]。

必須注意: 由于在微分 $\cos nx$ 与 $\sin nx$ 时有自然数因子 n 出現, 所以系数的无穷小阶降低, 并且收敛的机会也減少了。然而在利用傅立叶級数解决数学物理中的問題时, 往往必須微分这些級数, 而且甚至于要重复微分。为了保证所得的級数收敛, 依照阿·恩·克雷洛夫[684]的方法, 預先分出收敛得較慢的部分有时是有用的。这时, 已知分出了的部分的和的有限形式, 从而可以直接微分, 而余下的級数的系数必須达到的这样的无穷小阶, 使得微分后还是得到一致收敛級数。

708. 三角函数系的完全性 如果在区間 $[-\pi, \pi]$ 上的連續函数 $f(x)$ 有全等于零的傅立叶系数, 則这函数本身恒等于零。实际上, 在这种情形下, 由等式(6)显然可知: 对于一切 x ,

$$\int_0^x f(x) dx = 0; \quad (8)$$

由此对 x 微分, 根据被积函数的連續性[293, 12°], 我們就得到恒等式

$$f(x) = 0.$$

換句話說, 除了恒等于零的函数外, 在区間 $[-\pi, \pi]^*$ 上沒有連續函数与三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (9)$$

中的一切函数正交[653]。这个事实可說是表明: 三角函数系在連續函数类中是完全的。

* 或在另外任一长为 2π 的区間上。

如果两連續函数有相同的傅立叶系数, 則它們必恒等, 因為它們的差 $f_1(x) - f_2(x)$ 有完全等于零的傅立叶系数。因此, 連續函数由它的傅立叶系数唯一地确定。这只是三角函数系的完全性的另外一种表述法。

如果轉而考虑不連續函数, 則情况可能不同。譬如說, 只在有限个点处不等于零的函数已不“恒”等于零, 但显然这时它与(9)中任一函数正交, 而且也与每个(常义或广义)可积分函数正交。我們可作出一个在无穷点集上不等于零的函数, 但仍具有上述性质。例如下函数 $f(x)$ [70, 8), 288, 1)] 就是这样: 如果 x 是形如 $\pm \frac{p}{q}$ ($\frac{p}{q} < \pi$) 的既約分数, 則 $f(x)$ 等于 $\frac{1}{q}$; 而在区間 $[-\pi, \pi]$ 上的其余各点, $f(x)$ 等于零。

然而在所考虑的区間上, 与每个一般可积分函数正交的函数“在实质上”与零沒有区别, 我們称这种函数与零等价。

現在可证明: 如果在区間 $[-\pi, \pi]$ 上绝对可积分函数 $f(x)$ 的傅立叶系数都等于零, 則这函数必与零等价。

实际上, 如果 $g(x)$ 是常义可积分的任一函数, 則由 554, 1°,

$$(R) \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = (S) \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dF(x),$$

其中 $F(x) = \int_0^x f(x)dx$ 。在所作的假定下, $F'(x) = 0$ [参考(8)], 因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 正交。

由此不难轉到 $g(x)$ 是广义可积分的情形。例如設点 π 是它的唯一的奇异点。則在 $[-\pi, \pi - \varepsilon]$ 上 ($\varepsilon > 0$), 令 $g^*(x) = g(x)$, 在 $(\pi - \varepsilon, \pi]$ 上, 令 $g^*(x) = 0$, 由前证可知:

$$\int_{-\pi}^{\pi-\varepsilon} f \cdot g dx = \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot g^* dx = 0.$$

現在只要取 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时的极限。

推广“完全性”的概念, 我們可断定: 三角函数系(9)在绝对可积分函数类中是完全的。这个断語的意义是: 除了与零等价的函数外, 在区間 $[-\pi, \pi]$ 上没有绝对可积分函数与(9)中一切函数正交。

最后, 如果两个绝对可积分函数有相同的傅立叶系数, 則它們的差与零等价。如果不认为这种函数“在实质上”有区别, 我們在某种意义上也可說绝对可积分函数是由它的傅立叶系数所唯一确定的。

附注 关于只在区間 $[0, \pi]$ 上的函数系

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots$$

或

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots,$$

以上所述的一切还是成立。

709. 函数的一致近似法·维尔斯特拉斯定理 如果用函数 $g(x)$ “接近”^{*}在区間 $[a, b]$ 上的某一函数 $f(x)$, 則能根据各种情况, 分別估計这种近似法的性质。但是当然在所有的情形下, 基本上还是要考虑差式

$$r(x) = f(x) - g(x).$$

如果我们同样注意一个函数与另一函数在一切分別取出的点处的小偏差, 則可取它們的最大偏差, 即数

$$\delta = \sup_{a \leq x \leq b} |r(x)|$$

作为近似的尺度。在这种情形下, 我們說这是函数 $f(x)$ 借助于函数 $g(x)$ 的一致近似法。

我們將导出关于連續函数一致近似法的两个基本的维尔斯特拉斯定理, 在第一个定理中用到三角多項式, 在第二个定理中用到通常的(代数)多項式。

定理 I. 如果函数 $f(x)$ 在区間 $[-\pi, \pi]$ 上連續并且滿足条件

$$f(-\pi) = f(\pi),$$

則無論数 $\varepsilon > 0$ 是怎样, 可找到三角多項式

$$T(x) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^n (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx),$$

使得对于在上述区間上的一切值 x , 不等式

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon \quad (10)$$

一致成立。

首先作出逐段綫性的函数 $\varphi(x)$, 使得在 $[-\pi, \pi]$ 上不等式

$$|f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (11)$$

* 这就是近似地表示的意思。

处处成立。

为了要达到这个目的, 用点

$$-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_k = \pi$$

将区间 $[-\pi, \pi]$ 分成这样小的部分, 使得在每一个部分上, 函数 f 的振幅 $< \frac{\delta}{2}$ 。我们在区间 $[-\pi, \pi]$ 上确定函数 $\varphi(x)$, 令它在每个个别的区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上等于线性函数

$$f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i),$$

则它在区间的端点与 $f(x)$ 符合。在实质上, 这就是在由方程 $y = f(x)$ 所表示的曲线上作内接折线。如果用 m_i 及 M_i 表示函数 f 在第 i 个区间上的最小值与最大值, 则根据条件, $M_i - m_i < \frac{\delta}{2}$, 又因为在这个区间上, 函数 f 与 φ 的值均包含在 m_i 与 M_i 之间, 所以不等式(11)在整个区间 $[-\pi, \pi]$ 上成立。

与 $f(x)$ 一样, 函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上连续, 并且满足条件

$$\varphi(-\pi) = \varphi(\pi);$$

而且作为逐段单调的函数, 它在这区间上有有界变差[543, 1°]。在这些条件下, 根据第里希莱-馥当判别法[673], 可将 $\varphi(x)$ 展开为一致收敛的傅立叶级数:

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx.$$

因此当 n 充分大时, 如果取这级数的第 n 个部分和作为多项式 $T(x)$, 则它与 $\varphi(x)$ 的差小于 $\frac{\delta}{2}$; 即关于所考虑的 x 的一切值,

$$|\varphi(x) - T(x)| < \frac{\delta}{2}. \quad (12)$$

从(11)与(12)就得到(10)。

我们现在取递减到零的正数序列 $\{\varepsilon_k\}$, 并且对于每个数 $\varepsilon = \varepsilon_k$, 作

出在已证的定理中所指出的多項式 $T = T_k(x)$; 这样得到一个三角多項式的序列 $\{T_k(x)\}$, 它在区間 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$ 。用通常的方式 [400] 从序列轉到无穷級数, 我們得到这定理的另一种表述法, 它与前面的表述法显然是同等的: 在定理 I 中所指出的条件下, 可将函数 $f(x)$ 展开为一致收敛的級数, 其中各項是三角多項式。

由定理 I 就不难导出

定理 II. 如果函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上連續, 則無論數 $\varepsilon > 0$ 是怎样, 可找到这样的整代数多項式

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n,$$

使得关于在 $[a, b]$ 上 x 的一切值, 不等式

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad (13)$$

一致成立。

通过简单的代換

$$x = a + \frac{x'}{\pi}(b - a),$$

我們能够在区間 $[0, \pi]$ 上討論这个問題, 因为 x' 的整多項式显然也是 x 的整多項式。为了不要使符号复杂, 认为原来給出的区間就是 $[0, \pi]$ 。

現在将函数 $f(x)$ 推广到整个区間 $[-\pi, \pi]$ 上, 令

$$f(-x) = f(x) \quad (0 < x \leq \pi).$$

这样函数还是保持着連續性, 并且显然滿足条件 $f(-\pi) = f(\pi)$ 。在这种情形下, 根据定理 I, 可以找到这样的三角多項式 $T(x)$, 使得关于在 $-\pi$ 与 π 之間的一切值 x , 我們有

$$|f(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (14)$$

如果将 T 中的每个三角函数用它的 x 的幂級数展开式 [392] 来代替, 則也可将函数 T 表示为处处收敛的幂級数:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

这个级数在区间 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛[409, 1°]; 因此当 n 充分大时, 如果令这级数的第 n 个部分和就是多项式 $P(x)$, 则关于在区间 $[-\pi, \pi]$ 上 x 的一切值, 我们有

$$|T(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (15)$$

现在只要比较(14)与(15), 即得(13)。

与前面相仿, 我们能给出这个定理的另一种表述法: 我们可将区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 展开为一致收敛的级数, 其中各项是整代数多项式。

710. 函数的平均近似法 · 傅立叶级数的部分和的极端性质 当用函数 $g(x)$ 接近在区间 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$ 时, 我们可不用一致近似法, 而在另外一种观点上, 要求两函数只是“平均”近似。在这种情形下, 可取它们的平均偏差

$$\delta' = \frac{1}{b-a} \int_a^b |r(x)| dx$$

或均方偏差(在下面, 我们总是用这种偏差)

$$\delta'' = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b r^2(x) dx}$$

作为近似的尺度。而且不考虑这一表示式, 而考虑比较简单的数量:

$$\Delta = \int_a^b r^2(x) dx = (b-a) \delta''^2,$$

则更为便利。

我们重新考虑区间 $[a, b]$ 上平方可积分函数的任一正交系 $\{\varphi_m(x)\} (m=0, 1, 2, \dots)$ [653]。设 $f(x)$ 是在同一区间上所给出的一个平方可积分函数, 并且 n 是一个固定的自然数。我们提出这样的问题: 当任意选取系数 $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ 时, 从前面 $n+1$ 个函数 φ 的一切线

性組合

$$\sigma_n(x) = \gamma_0 \varphi_0(x) + \gamma_1 \varphi_1(x) + \cdots + \gamma_n \varphi_n(x) \quad (16)$$

中, 找出那样的函数, 在均方偏差的意义下, 最好近似于函数 $f(x)$ 。換句話說, 就是需要使数量

$$\Delta_n = \int_a^b [f(x) - \sigma_n(x)]^2 dx$$

达到最小值。

在这里, 代入 $\sigma_n(x)$ 的展开式, 我們得到

$$\begin{aligned} \Delta_n = & \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{m=0}^n \gamma_m \int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx + \\ & + \sum_{m=0}^n \gamma_m^2 \int_a^b \varphi_m^2(x) dx + 2 \sum_{k < m} \gamma_k \gamma_m \int_a^b \varphi_k(x) \varphi_m(x) dx. \end{aligned}$$

由于函数系的正交性, 最后一个和式等于零。引入常数

$$\lambda_m = \int_a^b \varphi_m^2(x) dx$$

及函数 $f(x)$ 的(广义)傅立叶系数

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m} \int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx,$$

則可将 Δ_n 的表示式改写成下列形式:

$$\Delta_n = \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{m=0}^n \lambda_m c_m \gamma_m + \sum_{m=0}^n \lambda_m \gamma_m^2.$$

为了要在和式符号后得到完全平方, 必須在那里再引入 $\lambda_m c_m^2$ 諸項。对这些項附加加号及减号, 最后就得到:

$$\Delta_n = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{m=0}^n \lambda_m c_m^2 + \sum_{m=0}^n \lambda_m (\gamma_m - c_m)^2.$$

現在显然可見: 当最后一个和式等于零时, 也就是当

$$\gamma_0 = c_0, \gamma_1 = c_1, \dots, \gamma_n = c_n$$

时, Δ_n 达到它的最小值。

因此, 在一切形如(16)的多項式中, 恰好是(广义)傅立叶級数的部分和

$$s_n(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$$

使得数量 Δ_n 达到它可能取得的最小值:

$$\delta_n = \int_a^b [f(x) - s_n(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{m=0}^n \lambda_m c_m^2. \quad (17)$$

在某种意义下, 傅立叶系数作为一切可能的系数中“最好”的系数, 重新吸引了我們的注意! 重要的是在这里应当指出: 如果某些系数对于固定的 n 是“最好的”, 則它們对于較大的值 n 也还是“最好的”, 不过这时还要加上一些新的系数罢了!

等式(17)称为貝塞尔恒等式。从这恒等式可推得不等式

$$\sum_{m=0}^n \lambda_m c_m^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx$$

及(如果当 $n \rightarrow +\infty$ 时取极限)

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m c_m^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx. \quad (18)$$

这是貝塞尔不等式。巧妙的是只要函数 $f(x)$ 平方可积分, (18)中的級数永远是收敛的。

当 n 增加时, 既然 δ_n 的表示式(17)中加入了新的負数項, 所以 δ_n 减小。 n 越大, 則和式 $s_n(x)$ 越“平均”接近于所考虑的函数 $f(x)$ 。于是自然产生了这个問題: 增大 n 是否可以得到任意小的均方偏差, 即是否可以使得当 $n \rightarrow \infty$ 时 δ_n 趋近于零?

如果这点成立, 則可說和式 $s_n(x)$ “平均”收敛于函数 $f(x)$ [我們

強調指出: 这样完全不假定 $s_n(x)$ 在通常字面的意义下“点性”收敛于 $f(x)$ 。由貝塞尔恒等式, 显然可见这时(并且只在这时)等式[参考(18)]

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m c_m^2 = \int_a^b f^2(x) dx$$

成立。我們随着弗·阿·斯捷克洛夫称它是閉合性方程。但是通常称它是巴尔舍伐 (M. A. Parseval) 公式, 即由十九世紀初年考虑过(三角函数系的)类似公式的一位数学家而得名(但是他的討論是沒有根据的)。

如果閉合性方程对于每一平方可积分的函数 $f(x)$ 成立, 則函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 称为閉合的。

現在我們將整个所讲到的特別应用到三角函数系 (9)。則在进行討論时, 須用三角多項式

$$S_n(x) = A_0 + \sum_{m=1}^n A_m \cos mx + B_m \sin mx$$

来代替(16), 并且研究由它所給出而由数量

$$\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx$$

所表征的“平均”近似法。我們看到: 当 n 固定时, 傅立叶级数的相应的部分和

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n a_m \cos mx + b_m \sin mx$$

使得数量 Δ_n 达到它的最小值。这个最小值是由等式

$$\delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2) \right\} \quad (19)$$

(“貝塞尔恒等式”)所給出的。与一般情形一样, 由此可見由傅立叶系数的平方所組成的級数收敛:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

(“貝塞尔不等式”)。

关于所考虑的具体的函数系(9), 我們就可完全解决在一般情形下所提出的問題, 解見下款。

711. 三角函数系的閉合性 · 李雅普諾夫定理 下面一个值得注意的定理首先是由阿·姆·李雅普諾夫所严格证明的 (关于有界函数的情形)。

定理 無論平方可积分函数 $f(x)$ 是怎样, 永远有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0,$$

并且閉合性方程成立:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \quad (20)$$

我們將证明分成几个阶段:

1° 如果函数 $f(x)$ 在区間 $[-\pi, \pi]$ 上連續并且滿足条件 $f(-\pi) = f(\pi)$, 則根据維尔史特拉斯第一定理, 有三角多項式 $T(x)$ 存在 (我們在这里用 N 表示它的阶次), 使得

$$|f(x) - T(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}},$$

其中 ε 是預先任意給出的正数。这时

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 dx < \varepsilon.$$

既然可将 $T(x)$ 随意看作任一阶次为 $n \geq N$ 的三角多項式, 則根据傅立

叶级数的部分和的极端性质[710], 当 $n \geq N$ 时, 更应有

$$\delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx < \varepsilon,$$

因此当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\delta_n \rightarrow 0$ 。

2° 为了要推广这个结论到另外的情形, 我们先建立一个辅助的不等式。

如果将一个平方可积分函数 $f(x)$ 表示为两个平方可积分函数之和的形式: $f'(x) + f''(x)$, 则当用撇号表示与它们相对应的数量时, 我们有

$$f(x) - s_n(x) = [f'(x) - s'_n(x)] + [f''(x) - s''_n(x)],$$

从而

$$[f(x) - s_n(x)]^2 \leq 2\{[f'(x) - s'_n(x)]^2 + [f''(x) - s''_n(x)]^2\}, *$$

而且进一步有

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx &\leq 2 \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x) - s'_n(x)]^2 dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\pi}^{\pi} [f''(x) - s''_n(x)]^2 dx \right\} \end{aligned}$$

或者简单地写作:

$$\delta_n \leq 2\{\delta'_n + \delta''_n\}.$$

最后, 我们注意: 从(应用到函数 f' 的)贝塞尔恒等式[参考(19)]可推得

$$\delta''_n \leq \int_{-\pi}^{\pi} f''^2 dx.$$

因此, 结果得到

$$\delta_n \leq 2\left\{\delta'_n + \int_{-\pi}^{\pi} f''^2 dx\right\}. \quad (21)$$

* 在这里, 我们应用了初等不等式

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2).$$

这就是我們需要的不等式。

3° 現在設函数 $f(x)$ 在区間 $[-\pi, \pi]$ 上常义可积分(那么它是有界的)。我們可认为 $f(-\pi) = f(\pi)$, 因为如果需要的話, 只要改变函数在区間的一个端点上的值。与证明維尔史特拉斯第一定理 [709] 时相同, 作出輔助函数 $\phi(x)$, 但在这次我們选取区間的細分法使²¹

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4\Omega},$$

其中 ε 是預先任意取定的正数, ω_i 是函数 f 在第 i 个部分区間上的振幅, Ω 是函数 f 在 $-\pi$ 到 π 的整个区間上的完全振幅 [285]。

$$\text{令} \quad f' = \varphi, \quad f'' = f - \varphi.$$

根据 1°, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\delta'_n \rightarrow 0$, 因此从 n 的某一值开始,

$$\delta'_n < \frac{\varepsilon}{4}.$$

在另一方面, 因为在第 i 个部分区間上

$$|f''(x)| = |f(x) - \varphi(x)| \leq \omega_i,$$

所以

$$\int_{-\pi}^{\pi} f''^2 dx = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f''^2 dx \leq \sum_i \omega_i^2 \Delta x_i \leq \Omega \sum_i \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4}.$$

現在根据(21), 已經显然可見: 对于充分大的 n ,

$$\delta_n < \varepsilon,$$

等等。

4° 最后, 設函数 $f(x)$ 是广义可积分的, 但是必須是平方可积分的。为了簡單起見, 我們假定在这里 $x = \pi$ 是 f (与 f^2) 的唯一的奇异点。这时对于已給的 $\varepsilon > 0$, 可找到 $\eta > 0$, 使得

$$\int_{\pi-\eta}^{\pi} f^2 dx < \frac{\varepsilon}{4}$$

在这种情形下, 令:

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & \text{当 } -\pi \leq x < \pi - \eta \text{ 时,} \\ 0 & \text{当 } x \geq \pi - \eta \text{ 时,} \end{cases}$$

并且相反地令

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } -\pi \leq x < \pi - \eta \text{ 时,} \\ f(x) & \text{当 } x \geq \pi - \eta \text{ 时.} \end{cases}$$

显然

$$\int_{-\pi}^{\pi} f''^2 dx = \int_{\pi-\eta}^{\pi} f^2 dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

在另一方面, 把刚才所证明的结果应用到常义可积分函数 f' 。应用 (21), 我們可以断定这时也有 $\delta_n \rightarrow 0$ 。这样, 李雅普諾夫定理的证明就完成了。

利用上款中所建立的术语, 我們可以說三角函数系是閉合的。

712. 广义閉合性方程 設已經給出在区間 $[-\pi, \pi]$ 上平方可积分的两个函数 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 。如我們所知[447, 6)], 这时函数 $f + \varphi$ 与 $f - \varphi$ 也是平方可积分的。如果分別用 a_m, b_m 与 α_m, β_m 分別表示函数 f 与 φ 的傅立叶系数, 則显然 $a_m \pm \alpha_m, b_m \pm \beta_m$ 是函数 $f \pm \varphi$ 的傅立叶系数。

将閉合性方程分別应用到函数 $f + \varphi$ 与 $f - \varphi$, 我們得到

$$\frac{(a_0 + \alpha_0)^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [(a_m + \alpha_m)^2 + (b_m + \beta_m)^2] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f + \varphi]^2 dx$$

与

$$\frac{(a_0 - \alpha_0)^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [(a_m - \alpha_m)^2 + (b_m - \beta_m)^2] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f - \varphi]^2 dx.$$

如果将这两个等式两端相减, 則当注意到恒等式

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$\frac{\alpha_0 \alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \alpha_m + b_m \beta_m) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi(x) dx. \quad (22)$$

广义闭合性方程(22)与傅立叶级数的逐项积分的问题有极密切的关系。系数 α_m, β_m 用它们的积分表示式来代替:

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos mx dx, \quad \beta_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin mx dx,$$

($m=0, 1, 2, \dots$) ($m=1, 2, 3, \dots$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \varphi(x) dx + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \varphi(x) dx = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi(x) dx.$$

当然，在这里区间 $[-\pi, \pi]$ 可用它的一部分 $[x', x'']$ 来代替，因为这就归结到（譬如说）将函数 φ 用另外一函数来代替：这个函数在区间 $[x', x'']$ 上与 φ 一致，而在这区间外则等于零。当 $\varphi=1$ 时，我们回到了在 706 中所建立的论断，但是在这里有一点限制：我们还须要假定函数 f 是平方可积分的。

博士家园 流星

证明要依靠函数 $\varphi(x)$ 的傅立叶级数的部分和 $\sigma_n(x)$ 的一个性质, 一直到后面我們才证明这个性质[727, 5°]: 部分和一致有界。这就是說, 对于 $-\pi \leq x \leq \pi$ 与 $n=1, 2, 3, \dots$,

$$|\sigma_n(x)| \leq L \quad (L = \text{常数}).$$

我們暂时应用这个性质而不加证明。

不失推理的一般性, 可假定函数 $\varphi(x)$ 的不連續点都是正规的[658], 因此永远有

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x+0) + \varphi(x-0)}{2},$$

在这种情形下, 根据第里希莱-魏当定理[660], 关于 x 的一切值, 我們有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = \varphi(x),$$

并且同时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) \sigma_n(x) = f(x) \varphi(x).$$

如果 $f(x)$ 有界:

$$|f(x)| \leq M \quad (M = \text{常数}),$$

因此

$$|f(x) \sigma_n(x)| \leq ML \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

則由阿尔裁拉定理[488], 我們断定

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sigma_n(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi(x) dx. \quad (23)$$

对于无界的(但是绝对可积分的)函数的情形, 也可断定这个等式正确。設 $x=\pi$ 是 $f(x)$ 的唯一的奇异点。这时首先对于已給的 $\varepsilon > 0$, 我們选取 $\eta > 0$, 使得

$$\int_{\pi-\eta}^{\pi} |f(x)| dx < \varepsilon,$$

同时不等式

$$\left| \int_{\pi-\eta}^{\pi} f(x) \varphi(x) dx \right| < L\varepsilon, \quad \left| \int_{\pi-\eta}^{\pi} f(x) \sigma_n(x) dx \right| < L\varepsilon$$

也成立(无论 n 是怎样, 后一不等式成立)。在区间 $[-\pi, \pi-\eta]$ 上[函数 $f(x)$ 在这区间上有界]与(23)相似, 我們有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi-\eta} f(x) \sigma_n(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi-\eta} f(x) \varphi(x) dx.$$

由此就已容易得到等式(23)。

已证的等式只是公式(22)的另一种写法, 因为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sigma_n(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^n (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx) \right] dx = \\ &= \frac{\alpha_0 \alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^n (\alpha_m \alpha_m + \beta_m \beta_m). \end{aligned}$$

在与前面不同的条件下,作为与傅立叶级数的逐项积分法相关的论断,我们能够重新表述广义闭合性方程。(而且由于在这里对函数 f 与 φ 加上不对称的条件,所以有两种不同的表述法。)我们注意这次可得到第 706 款中的命题作为有完全一般的推论。

713. 傅立叶级数的乘法 设已知两个函数 f 及 φ , 与它们的傅立叶级数:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx),$$

$$\varphi(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx).$$

我们现在提出的问题是: 要将这两函数的乘积 $f\varphi$ 写成傅立叶级数:

$$f(x)\varphi(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos mx + B_m \sin mx),$$

也就是要将它的系数用已给的系数 a, b 与 α, β 表示出来。

我们假定函数 f 与 φ 平方可积分*, 于是关于它们的广义闭合性方程(22)成立。这时由它可直接导出系数 A_0 的表示式:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\varphi dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m\alpha_m + b_m\beta_m).$$

确定系数 A_k, B_k 时(当 $k=1, 2, 3, \dots$ 时), 也不难归结到应用公式(22)。 A_k 的表示式

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\varphi \cos kx dx$$

与 A_0 的表示式的区别是用 $\varphi \cos kx$ 代替了 φ 。我们设法找出 $\varphi \cos kx$

* 我们可不这样假定, 而假定函数 f 绝对可积分, φ 有有界变化。

的傅立叶系数:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos kx \cdot \cos mx \, dx &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos(m+k)x \, dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos(m-k)x \, dx \right\} = \frac{1}{2} (\alpha_{m+k} + \alpha_{m-k}), \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos kx \cdot \sin mx \, dx &= \frac{1}{2} (\beta_{m+k} + \beta_{m-k}), \end{aligned}$$

这些公式不但对于 $m \geq k$ 成立, 而且对于 $m < k$ 也成立, 如果約定令

$$\alpha_{-k} = \alpha_k, \quad \beta_{-k} = -\beta_k$$

的話。現在又根据公式(22),

$$A_k = \frac{a_0 \alpha_k}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [a_m (\alpha_{m+k} + \alpha_{m-k}) + b_m (\beta_{m+k} + \beta_{m-k})],$$

同样得到

$$B_k = \frac{a_0 \beta_k}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [a_m (\beta_{m+k} - \beta_{m-k}) - b_m (\alpha_{m+k} + \alpha_{m-k})].$$

这些公式就解决了所提出的問題。

有趣的是应指出: 系数 A, B 的这些表示式能够由函数 f 与 φ 的傅立叶级数的形式乘法求得, 如果在乘法中将余弦与正弦的乘积换成它们的和或差, 并且集合各同类項的話。我們在这里甚至于完全不假定被乘级数收敛, 那么这种情况就更加值得注意了。

714. 閉合性方程的若干应用 在傅立叶级数論本身以及在分析学的其他领域中, 閉合性方程有多种多样的应用。我們用例子来考虑几种应用。

1° 傅立叶级数的绝对收敛性 下面的定理是由施·恩·伯恩施坦院士所发现的: 如果以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 满足具有指数 $\alpha > \frac{1}{2}$ 的李雅西茨条件

$$|f(x+h) - f(x)| \leq L|h|^\alpha,$$

則級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

收斂, 其中 a_n, b_n 是函數 f 的傅立叶系数*。

我們首先注意: 如果

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx),$$

則

$$\begin{aligned} f(x \pm h) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [(a_m \cos mh \pm b_m \sin mh) \cos mx + \\ + (b_m \cos mh \mp a_m \sin mh) \sin mx] \end{aligned}$$

[684, 26)]。在这种情形下,

$$f(x+h) - f(x-h) \sim 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sin mh (b_m \cos mx - a_m \sin mx),$$

并且根据闭合性方程,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+h) - f(x-h)]^2 dx = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \rho_m^2 \sin^2 mh.$$

如果現在考慮到李漫西茨条件本身, 則可用數 $Ch^{2\alpha}$ 估計左端的积分, 其中 C 是常数。取任意的自然数 N , 令 $h = \frac{\pi}{2N}$; 則

$$\sum_{m=1}^{\infty} \rho_m^2 \sin^2 \frac{m\pi}{2N} \leq C_1 N^{-2\alpha}$$

(在这里 C_1 表示一新常数), 因此更有

$$\sum_{m > \frac{N}{2}}^N \rho_m^2 \sin^2 \frac{m\pi}{2N} \leq C_1 N^{-2\alpha}.$$

但是关于 $m > \frac{N}{2}$, 显然,

$$\sin^2 \frac{m\pi}{2N} > \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2},$$

因而可断定

$$\sum_{m > \frac{N}{2}}^N \rho_m^2 \leq 2C_1 N^{-2\alpha}.$$

* 由此可知級數 $\sum |a_n|$ 与 $\sum |b_n|$ 分別收斂, 因之对应的傅立叶級數絕對收斂。

特別, 如果选取 $N = 2^v (v = 1, 2, 3, \dots)$, 我們有

$$\sum_{m=2^{v-1}+1}^{2^v} \rho_m^2 \leq 2C_1 \cdot 2^{-2^v \alpha}.$$

但是根据熟知的不等式[第一卷, 第二分册 151 款内庭注],

$$\begin{aligned} \sum_{m=2^{v-1}+1}^{2^v} \rho_m &\leq \left\{ \sum_{m=2^{v-1}+1}^{2^v} \rho_m^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sum_{m=2^{v-1}+1}^{2^v} 1^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sqrt{2C_1} \cdot 2^{-v\alpha} \cdot 2^{\frac{1}{2}(v-1)} = \sqrt{C_1} 2^{v(\frac{1}{2}-\alpha)}. \end{aligned}$$

求 $v = 1, 2, 3, \dots$ 时所有类似的不等式的和, 我們得到

$$\sum_{m=2}^{\infty} \rho_m \leq \sqrt{C_1} \sum_{v=1}^{\infty} 2^{v(\frac{1}{2}-\alpha)} < +\infty,$$

因为当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时右端的级数收敛。这样就將定理证明了。

这里得到的结果极为准确: 我們能用例子证明, 当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, 它就不能成立。

2° 若干不等式的证明 闭合性方程可以用来证明一系列有用的不等式。

我們先研究弗·阿·斯捷克洛夫所首先指出并且成功地应用到数学物理上的不等式。

設函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上連續, 并且在这区间上(只可能有有限个例外点)有平方可积分的导数 $f'(x)$ 。这时如果条件

$$(a) \quad \int_0^\pi f(x) dx = 0$$

或

$$(b) \quad f(0) = f(\pi) = 0$$

中有一个成立, 則不等式

$$\int_0^\pi [f'(x)]^2 dx \geq \int_0^\pi [f(x)]^2 dx \quad (24)$$

成立; 而且在情形(a)下, 只有当函数有 $f(x) = A \cos x$ 的形式时才能得到等式, 在情形(b)下, 則只有当函数有 $f(x) = B \sin x$ 的形式时, 才能得到等式。

我們从情形(a)开始。在这种情形下, 函数在区间 $[0, \pi]$ 上的余弦展开式中缺常数項:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

因为对于函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, 0]$ 上的偶性开拓, 条件 $f(-\pi) = f(\pi)$ 成立, 則根据第 707 款的法則,

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin nx.$$

不难看出, 闭合性方程在区间 $[0, \pi]$ 上关于余弦级数与正弦级数都成立; 现在根据这个方程则有

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x)]^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,$$

并且同时有

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [f'(x)]^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2.$$

于是可直接推出不等式(24), 而且显然, 只有如果

$$a_n = 0 \quad (\text{当 } n \geq 2 \text{ 时}),$$

也就是如果 $f(x) = a_1 \cos x$, 则(24)中的等式才可能成立。

在情形(6)下, 我们同样考虑函数 $f(x)$ 的正弦级数:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

对于函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, 0]$ 上的奇性开拓, 根据条件(6), 在 $x=0$ 处仍有连续性, 而且也具备条件 $f(-\pi) = f(\pi)$, 因此可重新应用第 707 款的法则:

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx.$$

在这里可应用闭合性方程就能够立刻解决我们的问题。

后来, 魏尔亭格尔 (W. Wirtinger) 建立了若干较一般的不等式。假定函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上连续, 并且在这区间上 (只可能有有限个例外点) 有平方可积分的导数 $f'(x)$ 。

那么如果条件

$$f(-\pi) = f(\pi) \text{ 及 } \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

成立, 则不等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2 dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx \quad (25)$$

成立, 而且关于形如 $f(x) = A \cos x + B \sin x$ 的函数能得到等式。

与上面一样, 证明归结于应用闭合性方程到下列级数:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

与

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nx - a_n \sin nx).$$

如果特別地假設函數 $f(x)$ 是 (a) 偶函數或 (b) 奇函數, 則由 (25) 得到斯捷克洛夫不等式。

在下面, 我們要舉出建立更複雜的不等式的例子。

3° 等周問題 在具有已給長度 L 的一切可能的平面閉曲綫中, 需要找出包圍着最大面積的图形的那个曲綫。

我們已經知道解答是圓周。現在敘述胡爾維茲 (A. Hurwitz) 所得到的一个純粹分析上的証明, 而且只限于考慮光滑曲綫。

設長為 L 的光滑閉曲綫 (L) 是用參數方程給出的, 并且取从某一点开始計算的弧長 s 作为參數:

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (0 \leq s \leq L).$$

換用从 0 到 2π 之間變化的參數 $t = \frac{2\pi s}{L}$, 將這些方程寫成下列形式:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi);$$

我們特別注意下列條件成立:

$$\varphi(0) = \varphi(2\pi) \quad \text{及} \quad \psi(0) = \psi(2\pi).$$

根據 707, 顯然對函數 $\varphi(t)$ 與 $\psi(t)$ 的傅立叶級數:

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mt + b_m \sin mt,$$

$$\psi(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos mt + d_m \sin mt,$$

逐項微分, 就得到它們的導數的傅立叶級數:

$$\varphi'(t) \sim \sum_{m=1}^{\infty} m b_m \cos mt - m a_m \sin mt,$$

$$\psi'(t) \sim \sum_{m=1}^{\infty} m d_m \cos mt - m c_m \sin mt.$$

在這里應用閉合性方程, 我們得到

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi'(t)]^2 dt = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 (a_m^2 + b_m^2),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\psi'(t)]^2 dt = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 (c_m^2 + d_m^2).$$

因為

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 = (s'_t)^2 = \frac{L^2}{4\pi^2} \quad (26)$$

所以

$$L^2 = 2\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 (\alpha_m^2 + b_m^2 + c_m^2 + d_m^2). \quad (27)$$

在另一方面, 根据已知的公式 [526(9)], 可将被考虑的曲线所包围图形的面积 F 表示为:

$$F' = \int_{(L)} x dy = \int_0^{2\pi} x \frac{dy}{dt} dt = \int_0^{2\pi} \varphi(t) \psi'(t) dt^*. \quad (28)$$

在这次应用广义闭合性方程, 将面积的表示式写成下列形式:

$$F' = \pi \sum_{m=1}^{\infty} m (a_m d_m - b_m c_m). \quad (29)$$

在这种情形下, 用 4π 乘等式(29), 再从等式(27)中减去, 便得到

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi F' &= 2\pi^2 \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} m^2 (\alpha_m^2 + b_m^2 + c_m^2 + d_m^2) - \sum_{m=1}^{\infty} 2m (a_m d_m - b_m c_m) \right\} = \\ &= 2\pi^2 \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (m\alpha_m - d_m)^2 + \sum_{m=1}^{\infty} (mc_m + b_m)^2 + \sum_{m=2}^{\infty} (m^2 - 1)(b_m^2 + d_m^2) \right\}, \end{aligned}$$

并且因为在括号内和式中的一切项都不是负的, 所以“等周不等式”

$$L^2 - 4\pi F' \geq 0,$$

即

$$F \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

永远成立。

只有当和式中的一切项都是零时, 就是当

$$\begin{aligned} d_{1n} &= m\alpha_m, \quad b_m = -mc_m, \quad b_m = d_m = 0 \\ (m &= 1, 2, 3, \dots) \quad (m = 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

时, 才能在上式中取等号——并且同时面积 F 达到它所可能取得的最大值。这种条件与下列关系式等价:

$$d_1 = \alpha_1, \quad c_1 = -b_1, \quad a_m = b_m = c_m = d_m = 0 \text{ 关于 } m \geq 2.$$

但这时

$$x = \frac{1}{2} \alpha_0 + \alpha_1 \cos t + b_1 \sin t,$$

$$y = \frac{1}{2} c_0 - b_1 \cos t + \alpha_1 \sin t,$$

从而

$$\left(x - \frac{1}{2} \alpha_0\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} c_0\right)^2 = \alpha_1^2 + b_1^2,$$

* 如果假定(我们能够这样假定)当参数 t 由 0 变到 2π 时, 则依照正向描出了这曲线。

所以这曲线就是圆周！由此证明了圆周的极端性质。

此外我們注意如果应用不等式(25)*, 則不用閉合性方程已能证明等周不等式。实际上, 不失普遍性, 我們可以假定曲线的重心在 y 轴上, 这就是說

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0, \quad (30)$$

則由(26)及(28), 得到

$$\frac{L^2}{2\pi} - 2F = \int_0^{2\pi} [\varphi'^2 + \psi'^2] dt - 2 \int_0^{2\pi} \varphi \psi' dt = \int_0^{2\pi} [\varphi - \psi']^2 dt + \int_0^{2\pi} [\varphi'^2 - \psi'^2] dt \geq 0$$

——这正是根据不等式(25), 并且考虑到条件(30)而得到的。在这里只有当 $\varphi(t) = A \cos t + B \sin t$ 及 $\psi'(t) = \varphi(t)$ 时才能得到等式, 而这时 $\psi(t) = A \sin t - B \cos t + C$, 等等。

§ 2. 发散级数的求和法

715. 导言 在整个教程中, 直到现在为止, 对于已給的数值级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \quad (A)$$

我們是在部分和的极限

$$A = \lim A_n$$

存在并且有限(或者等于有确定符号的无穷大)的假定下, 取这极限作为级数的和。我們总认为“振动”发散级数沒有和, 并且一貫地不考慮它。

确实, 在研究 $\log \Gamma(\alpha)$ 按斯特霖(Stirling)公式展开时, 我們讲过一般說来是发散的所謂漸近级数[501—503]。但是我們不过是将这种级数作为求近似公式的根据; 当变数的数值愈来愈大时, 这些公式以愈来愈大的精确性表示被展开的函数; 当变数的数值固定时, 我們沒有給级数以任何的“和”!

在上一世紀的后半世紀, 由于数学分析領域中的种种事实, 例如两个收敛级数的乘积的发散性[379], 連續周期函数的傅立叶级数的发散

* 显然, 当将区间 $[-\pi, \pi]$ 換作 $[0, 2\pi]$ 时, 它亦成立。

性[677]等等,提出了在某些新的意义下(当然与通常的意义不同)发散級数求和的可能性的問題。这样“求和”的若干方法应用到傅立叶級数上特別有效;我們將比較詳細地加以研究。

必須說明:在科西建立严格的极限理論(以及与它相关的級数理論)以前,在数学的应用上已經时常遇到过发散級数。虽然对于它們在证明中的应用有过爭論,然而有时甚至于曾經有將它們賦予数值意义的企图。譬如,从萊布尼茲的时代开始,已經取数 $\frac{1}{2}$ 作为“振动”級数

$$1-1+1-1+1-1+\dots$$

的“和”。例如欧勒以为这种做法的理由是:在展开式

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\dots$$

(实际上这个展开式只对 $|x|<1$ 成立)中用1代替 x 时,恰好得到

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+\dots$$

在这里已經包含了真理的核心,不过問題的提法不够明确;这样任意选取展开式造成了各种可能,譬如說,由另一个展开式

$$-\frac{1}{1+x}=x-1+x^3-x^2+x^5-x^4+\dots$$

同时就得到

$$-\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+\dots$$

現代分析学用另一种方式提出問題。它是以級数“广义和”的某些精确表述的定义为基础,这种定义不仅是为了具体的数值級数而建立的,而且还要应用到一整类这样的級数上。这种方法的合理性不会引起怀疑:讀者必須回忆到不論通常的“級数和”概念看起来是怎样簡單而自然,它也是建立在(只是被证实为合适的)有条件地被采用的定义上;“广义和”的定义通常要适合两个条件:

第一,如果級数 $\sum a_n$ 取“广义和” A ,級数 $\sum b_n$ 取“广义和” B ,則級数 $\sum(pa_n+qb_n)$ 必須取数 $pA+qB$ 作为“广义和”。滿足这种条件的

求和法称为綫性的。

第二, 新的定义必須包含通常的定义作为特例。更精确地說, 在通常意义下收敛于和 A 的級数必須有“广义和”, 并且“广义和”同样等于 A 。具有这种性质的求和法称为承襲求和法。当然, 只有在比通常的求和法更广泛的情形下还可以求得“和式”的承襲求和法才有用处: 只有这时我們才能有充分的理由說到“广义求和”。

我們現在直接轉到討論在傅立叶級数論的观点上特殊重要的两种“广义求和”法。

716. 幂級数法 在实质上, 这种方法是普安松 (S.-D. Poisson) 所发现的, 而且他首先企图将它应用到三角級数。現叙述这种方法如下:

按照已給的数值級数 (A) , 作出幂級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots; \quad (1)$$

如果这級数关于 $0 < x < 1$ 收敛, 并且它的和在 $x \rightarrow 1-0$ 时有极限 A :

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = A,$$

則数 A 称为已給級数的“(在普安松意义下的)广义和”。

例 1) 在这里, 根据定义本身, 从欧勒所討論过的級数

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

就可导出幂級数

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots,$$

它的和 $\frac{1}{1+x}$ 当 $x \rightarrow 1-0$ 时趋近于极限 $\frac{1}{2}$ 。这就是說, 实际上, 在此处精确建立的意义下, 数

$\frac{1}{2}$ 就是所指出的級数的“广义和”。

2) 我們取更一般的例子: 三角級数

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \quad (2)$$

对于一切值 θ , $-\pi \leq \theta \leq \pi$, 是发散的。

实际上, 如果 θ 有 $\frac{p}{q}\pi$ 的形式, 其中 p 与 q 是自然数, 则对于 q 的倍数 n , 就有

$$\cos n\theta = \pm 1,$$

因此違反了級数收敛的必要条件。如果比值 $\frac{\theta}{\pi}$ 是无理数, 则将它展开为无穷连分数, 并且作出其渐近分数 $\frac{m}{n}$, 如我們所知, 应有

$$\left| \frac{\theta}{\pi} - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n^2},$$

从而

$$|n\theta - m\pi| < \frac{\pi}{n}.$$

这样, 对于无穷多个值 n ,

$$|\cos n\theta \pm 1| < \frac{\pi}{n},$$

因此

$$|\cos n\theta| > 1 - \frac{\pi}{n}.$$

由此也可見收敛的必要条件不能成立。

如果作出幂級数

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta \quad (0 < r < 1)$$

(在这里字母 r 代替了前面的字母 x), 则对于不等于 0 的值 θ , 它的和是:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} \quad (3)$$

[参考 412(4)], 并且当 $r \rightarrow 1-0$ 时趋近于 0。因此, 对于 $\theta \neq 0$, 0 是級数的“广义和”。如果 $\theta = 0$, 则級数(2)显然有和等于 $+\infty$; 而在这种情形下表示式(3)化为 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1+r}{1-r}$, 也以 $+\infty$ 为极限。

3) 同样, 从只有当 $\theta = 0$ 或 $\pm\pi$ 时收敛的級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi)$$

可导出幂級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r \sin \theta}{1-2r \cos \theta + r^2}$$

[434, 6)(a)], 因此在达次“广义和”当 $\theta \neq 0$ 时等于 $\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\theta$, 当 $\theta = 0$ 时等于零。

由此显然可見所討論的“广义求和”法是綫性的。至于这种方法的承襲性, 則可从关于幂級数的著名的亚培尔定理推出[409, 6^{*}]*。如果

* 我們不可能怀疑: “广义求和”法的一般表述就是从亚培尔(关于幂級数在收敛区间的端点的性质)的研究引导出的。普安松不过将这种表述法应用到特殊的情形。因此虽然发散級数求和法的观念与亚培尔无关, 我們还是往往称这种方法为亚培尔法。以后称它为普安松-亚培尔法。

級数(A)收敛并且有和数 A (在通常的意义下), 則在任何情形下, 幂級数(1)的收敛半径不小于 $\frac{1}{2}$, 并且它的和 $f(x)$ 当 $x=1$ 时保持連續 (至少是左連續), 这就是說

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$$

因此級数的广义和也是 A !

717. 陶伯尔定理 如果用普安松-亚培尔法求得級数(A)的和 A , 則如我們已經看到的, 这級数在通常的意义下可能沒有和。換句話說, 从极限

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A \quad (4)$$

的存在, 一般說来不就推得級数(A)收敛。因此自然地产生了下面的問題: 为了使得可由(4)断定的級数(A)收敛, 也就是断定它在通常的意义下有和, 应当对这級数各項的性质加上怎样的补充条件?

在这方面的第一个定理是陶伯尔(A. Tauber)所证明的; 这个定理說:

設級数(1)当 $0 < x < 1$ 时收敛, 并且极限等式(4)成立。如果級数(A)的各項适合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0, \quad (5)$$

則

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$$

我們將证明分成两部分。首先假定

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0 \text{ 或 } a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)^*.$$

* 根据著名的科西定理[33, 13)], 由此已可推出条件(5)成立, 但是反过来却不正确, 因此我們現在是从比(5)更特殊的假定出发。

如果令

$$\delta_n = \max_{k \geq n} |ka_k|,$$

则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 数量 δ_n 单调减小, 并趋近于零。

对于任意的自然数 N , 我们有

$$\sum_0^N a_n - A = \sum_0^N a_n (1 - x^n) - \sum_{N+1}^{\infty} a_n x^n + \left[\sum_0^{\infty} a_n x^n - A \right],$$

因此*

$$\begin{aligned} \left| \sum_0^N a_n - A \right| &\leq \sum_0^N |na_n| (1-x) + \sum_{N+1}^{\infty} \frac{|na_n|}{n} x^n + \left| \sum_0^{\infty} a_n x^n - A \right| \\ &\leq (1-x) N \delta_0 + \frac{\delta_{N+1}}{(N+1)(1-x)} + \left| \sum_0^{\infty} a_n x^n - A \right|. \end{aligned}$$

取任意小的数 $\varepsilon > 0$, 令

$$(1-x)N = \varepsilon \quad \text{或} \quad x = 1 - \frac{\varepsilon}{N},$$

因此当 $N \rightarrow \infty$ 时, $x \rightarrow 1$ 。现在设 N 选得充分大, 使得: 1) 不等式 $\delta_{N+1} < \varepsilon^2$ 成立; 并且 2) 相对应的 x 是这样接近于 1, 以致

$$\left| \sum_0^{\infty} a_n x^n - A \right| < \varepsilon.$$

这时

$$\left| \sum_0^N a_n - A \right| < (2 + \delta_0) \cdot \varepsilon,$$

这就证明了定理。

* 我们应用到显而易见的(当 $0 < x < 1$ 时)不等式

$$1 - x^n = (1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1}) < n(1-x)$$

及

$$\sum_{N+1}^{\infty} x^n = \frac{x^{N+1}}{1-x} < \frac{1}{1-x}.$$

定理的一般情形也可化到所考虑的特殊情形。令

$$v_n = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n \quad (n \geq 1), \quad v_0 = 0,$$

于是

$$a_n = \frac{1}{n}(v_n - v_{n-1}) \quad (n \geq 1),$$

然后

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} a_n x^n &= a_0 + \sum_1^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n - \sum_1^{\infty} \frac{v_{n-1}}{n} x^n = \\ &= a_0 + (1-x) \sum_1^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n + \sum_1^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} x^{n+1}. \end{aligned} \quad (6)$$

但是由定理的假定,也就是由于 $\frac{v_n}{n}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时趋近于零,我们容易得到

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_1^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n = 0. \quad (7)$$

为了要证明它,在这里只须将和式分成两部分:

$$(1-x) \sum_1^N + (1-x) \sum_{N+1}^{\infty}$$

并且选择 N 使得第二个和式中的一切因子 $\frac{v_n}{n}$ 的绝对值小于预先指定的数 $\varepsilon > 0$ ——因而无论 x 是怎样,第二个和式的绝对值小于 ε ;至于由确定的有限个项所组成的第一个和式,则当 x 接近于 1 时也是这样。

因此,由(6), (4)与(7)就有

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_1^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} x^{n+1} = A - a_0.$$

但是在这里已经能应用定理的已证明的特殊情形,因此

$$\sum_1^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} = A - a_0.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\sum_1^n \frac{v_m}{m(m+1)} &= \sum_1^n \frac{v_m}{m} - \sum_1^n \frac{v_m}{m+1} = \sum_1^n \frac{v_m}{m} - \sum_1^{n+1} \frac{v_{m-1}}{m} = \\ &= -\frac{v_n}{n+1} + \sum_1^n a_m.\end{aligned}$$

因为上式右端的第一项趋近于零, 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n a_m = A - a_0,$$

这样就完成了定理的证明。

后来, 许多数学家建立了一系列同一类型的精巧的定理(称为“陶伯尔型”的定理), 它们包含形状改变了的并且推广了的陶伯尔条件。我们对此将不加研究。

718. 算术平均法 这种方法的最简单的观念是弗洛殷尼乌斯 (G. Frobenius) 所提出的。但是通常它与齐查罗 (E. Cesàro) 的名字发生联系, 因为后者对这个方法作了进一步的发展。这种方法就是:

根据已给的数值级数(A)的部分和 A_n , 作出它们的逐步算术平均

$$\alpha_1 = A_0, \quad \alpha_2 = \frac{A_0 + A_1}{2}, \quad \dots, \quad \alpha_n = \frac{A_0 + A_1 + \dots + A_{n-1}}{n};$$

如果变量 α_n 当 $n \rightarrow \infty$ 时有极限 A , 则这数称为已给级数的“(在齐查罗的意义下的)广义和”。

例 1) 回到级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

在这里我们有

$$\alpha_{2k-1} = \frac{k}{2k-1}, \quad \alpha_{2k} = \frac{1}{2},$$

于是 $\alpha_n \rightarrow \frac{1}{2}$ 。我们所得到的和数与用普安松-亚培尔法所求得的相同[716, 1)]。

2) 级数

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi)$$

的部分和是(只要 $\theta \neq 0$ 时)

$$A_n = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}.$$

現在不难計算算术平均:

$$\begin{aligned} n\alpha_n &= \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\theta} \sum_{m=0}^{n-1} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)\theta = \frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta} \sum_{m=0}^{n-1} [\cos m\theta - \cos(m+1)\theta] = \\ &= \frac{1 - \cos n\theta}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin n\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

因此, 最后得到

$$\alpha_n = \frac{1}{2n} \left(\frac{\sin n\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \right)^2.$$

显然 $\alpha_n \rightarrow 0$: 在这里, 当 $\theta \neq 0$ 时, 0 就是“广义和”[参考 716, 2)].

3) 最后, 重新提出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi).$$

当 $\theta \neq 0$ 时, 我們有

$$A_n = \frac{\cos\frac{1}{2}\theta - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta},$$

然后

$$\begin{aligned} n\alpha_n &= \frac{n}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta} \sum_{m=1}^n [\sin(m+1)\theta - \sin m\theta] = \\ &= \frac{n}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\theta - \frac{\sin(n+1)\theta - \sin\theta}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta}. \end{aligned}$$

由此可見 $\alpha_n \rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\theta$.

在一切情形下, 根据齐查罗法所求得的“广义和”与根据普安松-亚培尔法所求得的一样。以后[719]要說明这并不是偶然的。

在这里也立即可見齐查罗法是綫性的。在极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

存在时, 由著名的科西定理[33, 13)]就可证明算术平均 α_n 也有同样的

极限。因此，齐查罗法是承襲的。

719. 普安松-亚培尔法与齐查罗法的相互关系 我們从简单的說明开始：如果用算术平均法可求得級数(A)的有限“和” A ，則必須有

$$\alpha_n = o(n).$$

实际上，由 $\alpha_n \rightarrow A$ 及 $\frac{n+1}{n}\alpha_{n+1} \rightarrow A$ ，可知

$$\frac{(n+1)\alpha_{n+1} - n\alpha_n}{n} = \frac{A_n}{n} \rightarrow 0.$$

而这时也有

$$\frac{\alpha_n}{n} = \frac{A_n}{n} - \frac{n-1}{n} \frac{A_{n-1}}{n-1} \rightarrow 0,$$

这就是所需要证明的。

下面的弗洛般尼烏斯定理可解决在本款标题上所提出的問題：

如果用算术平均法可求得級数(A)的有限“和” A ，則同时用普安松-亚培尔法也可求得相同的和。

这样，設 $\alpha_n \rightarrow A$ 。由本款开始所作的說明，显然幂級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$$

关于 $0 < x < 1$ 收敛。运用亚培尔变换两次〔参考 371，并且特别是 373, 6)〕，我們逐步得到：

$$f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \alpha_{n+1} x^{n+1}$$

* 从右端显然收敛的級数(由于 α_n 有界)出发，不难直接证实上面的恒等式正确：

$$\begin{aligned} (1-2x+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \alpha_{n+1} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) \alpha_{n+1} - 2n \alpha_n + (n-1) \alpha_{n-1}] x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \{ [(n+1) \alpha_{n+1} - n \alpha_n] - [n \alpha_n - (n-1) \alpha_{n-1}] \} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n - A_{n-1}) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n. \end{aligned}$$

〔这时我們令 $\alpha_0 = \alpha_{-1} = A_{-1} = 0$ 。〕在这里可知最后一級数收敛。

[同时应回忆到 $A_0 + A_1 + \cdots + A_n = (n+1)\alpha_{n+1}$]。已知 (对于 $0 < x < 1$)

$$(1-x)^{-2} = \sum_0^{\infty} (n+1)x^n \text{ 或}$$

$$1 = (1-x)^2 \sum_0^{\infty} (n+1)x^n.$$

用 A 乘这个恒等式的两端, 再从前一个恒等式两端减去:

$$f(x) - A = (1-x)^2 \sum_{p=0}^{\infty} (n+1)(\alpha_{n+1} - A)x^n.$$

将右端的和式分成两部分:

$$(1-x)^2 \sum_0^N 1 + (1-x)^2 \sum_N^{\infty},$$

在这里选择数 N , 使得当 $n > N$ 时,

$$|\alpha_n - A| < \varepsilon,$$

其中 ε 是预先任意给出的正数。这时第二个和式的绝对值小于 ε (与 x 无关!), 而当 x 接近于 1 时, 第一个和式也是这样。由此证明就完成了。

这样, 我們断定: 在应用齐查罗法的一切情形下, 应用普安松-亚培尔法也得到同样的结果。反过来說則不正确: 有的级数可用普安松-亚培尔法求和, 而在齐查罗的意义下无“广义和”。例如, 我們考虑级数

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots$$

因为在这里显然 (在本款开始所指出的) 用算术平均法求和的必要条件不成立, 所以不能应用这种方法。而同时级数

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$$

有 (对于 $0 < x < 1$) 和 $\frac{1}{(1+x)^2}$, 它当 $x \rightarrow 1-0$ 时趋近于极限 $\frac{1}{4}$ 。这就是用普安松-亚培尔法所求得的级数的“广义和”。

因此, 普安松-亚培尔法比齐查罗法要强些, 也就是說可应用到比較广泛的一类情形, 但是当同时可应用两种方法时, 它們彼此不相矛盾。

720. 哈第-蓝濤定理 与在普安松-亚培尔法的情形一样, 对于齐查罗法也可证明“陶伯尔”型的定理, 亦即确立級数各項的一些补充条件, 使得当那些条件成立时, 如果級数可用算术平均法求和, 則它在通常的意义下收敛。

由弗洛般尼烏斯定理, 显然从普安松-亚培尔法的每个“陶伯尔”定理都可特別引导出齐查罗法的这种定理。例如陶伯尔定理本身可以改述为: 如果 $\alpha_n \rightarrow A$, 并且条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0 \quad (8)$$

成立, 則同时也有 $A_n \rightarrow A$ 。而且在这里, 由容易证实的恒等式

$$A_n - \alpha_{n+1} = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n+1}, \quad (9)$$

可直接推出这个結果, 这个恒等式指出了: 在所考虑的情形下, 条件(8)是必要的。

哈第(G. H. Hardy)证明了: 不仅当 $\alpha_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ 时(这种情形已經包括在前面), 而且在更广泛的假定 $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ 下, 可断定由 $\alpha_n \rightarrow A$ 能推出 $A_n \rightarrow A$ 。蓝濤(E. Landau)证明了甚至于只要这种关系式“单側”成立, 也就能够得到这样的結論。

如果可用算术平均法求得級数(A)的“和”A, 而且条件

$$ma_m > -C \quad (C = \text{常数}; m = 1, 2, 3, \cdots)$$

* 我們有

$$\begin{aligned} (n+1)A_n - (n+1)\alpha_{n+1} &= (n+1)A_0 - (A_0 + A_1 + \cdots + A_n) = \\ &= (A_n - A_0) + (A_n - A_1) + \cdots + (A_n - A_{n-1}) = \\ &= (\alpha_1 + a_2 + \cdots + \alpha_n) + (\alpha_2 + \cdots + \alpha_n) + \cdots + \alpha_n = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n, \end{aligned}$$

成立,則同时也有

$$\sum_0^{\infty} a_n = A.$$

[改变级数的所有项的符号,我們看到也可只假定另一方向的不等式成立:

$$ma_m < C.$$

显然这定理可特别应用到各项符号不变的级数。]

为了证明起见,首先考虑和式

$$S = \sum_{m=n+1}^{n+k} A_m,$$

其中 n 与 k 是任意的自然数;用恒等变换的方法,容易将它化成下列形式:

$$S = \sum_{m=0}^{n+k} A_m - \sum_{m=0}^n A_m = (n+k)\alpha_{n+k} - n\alpha_n = k\alpha_{n+k} + n(\alpha_{n+k} - \alpha_n). \quad (10)$$

如果取任意的 A_m (当 $n < m \leq n+k$ 时), 则利用所假定的不等式 $a_m > -\frac{C}{m}$, 可得 A_m 的在下方的估计值:

$$A_m = A_n + (a_{n+1} + \cdots + a_m) > A_n - \frac{k}{n}C,$$

于是对于 m 求和,就得到

$$S > kA_n - \frac{k^2}{n}C.$$

由此与(10)式比较,得到这样的不等式:

$$A_n < \alpha_{n+k} + \frac{n}{k}(\alpha_{n+k} - \alpha_n) + \frac{k}{n}C. \quad (11)$$

现在令 n 任意增加到无穷大,而令 k 的变化适合下一条件:比值 $\frac{k}{n}$ 趋近于预先给出的数 $s > 0$ 。这时不等式(11)的右端趋近于极限 $A + sC$, 因此对于充分大的值 n 就有

$$A_n < A + 2sC. \quad (12)$$

完全同样, 考虑下一和式:

$$S' = \sum_{m=n-k+1}^n A_m = k\alpha_{n-k} + n(\alpha_n - \alpha_{n-k}).$$

并且作出 A_m (当 $m-k < m < n$ 时) 的在上方的估计值:

$$A_m = A_n - (\alpha_n + \cdots + \alpha_{m+1}) < A_n + \frac{k}{n-k}C,$$

我們得到不等式

$$S' < kA_n + \frac{k^2}{n-k}C.$$

由此

$$A_n > \alpha_{n-k} + \frac{n}{k}(\alpha_n - \alpha_{n-k}) - \frac{k}{n-k}C.$$

如果 $n \rightarrow \infty$, 并且与在前面一样, 同时 $\frac{k}{n} \rightarrow \varepsilon$ (但这次設 $\varepsilon < \frac{1}{2}$), 則这个

不等式的右端趋近于极限 $A - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}C > A - 2\varepsilon C$. 因此, 对于充分大的 n , 应有

$$A_n > A - 2\varepsilon C. \quad (13)$$

比較(12)与(13), 我們看到确乎

$$\lim A_n = A.$$

这样, 定理得证。

我們注意: 对于普安松-亚培尔求和法, 也建立过类似的“陶伯尔”定理——剛才所证明的定理只是这个定理的一个特别的推論。但是由于它的证明复杂, 我們在这里不能加以研究。

721. 广义求和法在級数乘法上的应用 现在討論广义求和法在級数乘法問題上的应用。設除級数(A)外, 还給出級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n + \cdots; \quad (B)$$

則級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) \quad (C)$$

[377]称为級数(A)与(B)的乘积。如果两个已給的級数收敛, 并且有通常的和 A 与 B , 則級数(C)还是可能发敛[在 379 中, 我們有过这样的例子]。

然則, 在一切情形下, 我們可用普安松-亞培尔法求級數(C)的和, 并且所得和數就是 AB 。

实际上, 对于 $0 < x < 1$, 級數(1)与級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

都絕對收斂[368]; 用 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分別表示它們的和。根据古典的科西定理[377], 这两个級數的乘积, 亦即級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) x^n$$

收斂, 并且以乘积 $f(x)g(x)$ 作为和數。当 $x \rightarrow 1-0$ 时, 这个和數趋近于 AB , 因为如我們所已經看到, 分別有

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) = B.$$

因此, 級數(C)的“广义(在普安松-亞培尔的意义下)和”的确是 AB , 这就是所需要证明的。

現在我們將算术平均法应用到級數乘法的问题上。在这里要证明: 級數(C)作为收斂級數(A)与(B)的乘积, 总是可以用齐查罗法求和; 而且所得到的和也就是兩級數(A)与(B)的兩個和的乘积 AB 。

除了級數(A)的部分和 A_n 以外, 还考虑級數(B)与(C)的部分和 B_n 与 C_n 。容易看到

$$C_m = a_0 B_m + a_1 B_{m-1} + \cdots + a_{m-1} B_1 + a_m B_0$$

并且

$$C_0 + C_1 + \cdots + C_n = A_0 B_n + A_1 B_{n-1} + \cdots + A_{n-1} B_1 + A_n B_0.$$

如果用和式 $(A_m - A)B_{n-m} + AB_{n-m}$ 代替上式右端的每一项, 并且用 $n+1$ 除等式的两端, 就得到

$$\frac{C_0 + C_1 + \cdots + C_n}{n+1} = \frac{\sum_{m=0}^n B_{n-m}(A_m - A)}{n+1} + A \frac{\sum_{m=0}^n B_{n-m}}{n+1},$$

因为 $B_n \rightarrow B$, 所以根据科西定理[第 33 款, 13)], 也有

$$\frac{\sum_{m=0}^n B_{n-m}}{n+1} = \frac{\sum_{m=0}^n B_m}{n+1} \rightarrow B.$$

在另一方面, 如果用 L 表示 $\{B_n\}$ 的上界, 則有

$$\left| \frac{\sum_{m=0}^n B_{n-m}(A_m - A)}{n+1} \right| \leq L \cdot \frac{\sum_{m=0}^n |A_m - A|}{n+1}.$$

既然 $A_n - A \rightarrow 0$, 所以上式右端的表示式(还是根据同一科西定理)也趋近于零, 最后我們得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_0 + C_1 + \cdots + C_n}{n+1} = AB,$$

这就是所需要证明的。

作为例子, 我們考虑級数

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \cdots + (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} + \cdots$$

的“平方”, 这个級数是在二项展开式

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \cdots + (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}x^m + \cdots$$

中取 $x=1$ 而得到的。将所述数值級数自乘, 就得到我們所熟悉的級数

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots^*,$$

无论根据普安松-亚培尔法或是根据齐查罗法, 它的“广义和”总是 $\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ 。

722. 一般的綫性承襲求和法类 最后, 我們举出一种极其一般的方式来构成一类綫性承襲求和法, 在这种求和法中特別包含着上面所詳細研究过的两种方法。

設已給出在参数 x 的某一变化区域 $\mathscr{R}$ 中的一个函数序列

$$\gamma_0(x), \gamma_1(x), \gamma_2(x), \cdots, \gamma_n(x), \cdots \quad (\Gamma)$$

假定区域 $\mathscr{R}$ 以有限的或广义的数 ω 作为凝聚点。根据已給的数值級数(A)作出函数級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma_n(x). \quad (14)$$

如果这个級数至少对于充分接近于 ω 的 x 是收敛的, 并且它的和 $\varphi(x)$

* 我們在这里应用数值恒等式

$$\sum_0^n \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{(2n-2m-1)!!}{(2n-2m)!!} = 1$$

(其中設 $(-1)!!$ 与 $0!!$ 表示 1)。因为将正文中所引用的幂級数自乘后, 得恒等式:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^m x^m + \cdots,$$

所以由此可以立刻推出上面的数值恒等式。

当 $x \rightarrow \omega$ 时趋近于极限 A , 則取数 A 作为已給数值級数的“广义和”。

因此, 与选取序列 (Γ) 及极限点 ω 相关, 我們得到級数的某种求和法。根据这种方法的作法, 显然可見它是綫性的。現在假定函数 $\gamma_n(x)$ 滿足下列两个条件:

$$1) \lim_{x \rightarrow \omega} \gamma_n(x) = 1 \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

2) 对于 $\mathcal{R}$ 中一切 x , 下面的不等式成立:

$$|\gamma_0(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n(x) - \gamma_{n-1}(x)| \leq K < +\infty \quad (K = \text{常数}).$$

这时求和法就是承襲的。

設序列 (Γ) 是單調的, 譬如說是遞增的:

$$\gamma_0(x) \leq \gamma_1(x) \leq \dots \leq \gamma_{n-1}(x) \leq \gamma_n(x) \leq \dots,$$

但同时是一致有界的:

$$|\gamma_n(x)| \leq C \quad (C = \text{常数}),$$

在这种特殊情况下, 证明很簡單。如果級数 (A) 收敛, 并且在通常意义下有和 A , 則根据亚培尔判別法, 級数(14)对于区域 $\mathcal{R}$ 中的 x 一致收敛。于是根据第 405 款的定理 3, 当 $x \rightarrow \omega$ 时, 可对这个級数逐項取极限, 这样就由条件 1) 引导出所希望的结果:

$$\lim_{x \rightarrow \omega} \varphi(x) = \sum_0^{\infty} a_n = A$$

——即“广义和”与通常的和一致。

現在轉到考虑一般的情形, 并且只假定条件 2) 成立。我們將证明这时有两个單調增并且一致有界的函数序列

$$\{\gamma'_n(x)\} \text{ 与 } \{\gamma''_n(x)\} \quad (15)$$

存在, 使得已給序列 (Γ) 中的函数可由上两序列中的函数相减而得:

$$\gamma_n(x) = \gamma'_n(x) - \gamma''_n(x).$$

由此推得了级数(14)一致收敛,并且可以对它逐项求极限,等等。

例如我们能够作出序列(15)如下:令

$$\gamma'_n(x) = |\gamma_0(x)| + |\gamma_1(x) - \gamma_0(x)| + \cdots + |\gamma_n(x) - \gamma_{n-1}(x)|,$$

$$\gamma''_n(x) = \gamma'_n(x) - \gamma_n(x).$$

显然,序列 $\{\gamma'_n(x)\}$ 单调递增;由 2),它以数 K 为界。还要证明 $\{\gamma''_n(x)\}$ 也是这样。我们有

$$\begin{aligned} \gamma''_n(x) - \gamma''_{n-1}(x) &= [\gamma'_n(x) - \gamma'_{n-1}(x)] - [\gamma_n(x) - \gamma_{n-1}(x)] = \\ &= |\gamma_n(x) - \gamma_{n-1}(x)| - [\gamma_n(x) - \gamma_{n-1}(x)] \geq 0, \end{aligned}$$

然后得到

$$|\gamma_n(x)| \leq \gamma'_n(x) \leq K,$$

从而

$$|\gamma''_n(x)| \leq \gamma'_n(x) + |\gamma_n(x)| \leq 2K.$$

这就是所要证明的一切。

附注 事实上,为了使得上述求和法是承襲的,条件 1)与 2)不仅是充分的,而且也是必要的。如果考虑到除去第 n 项外所有项都是零的级数,立刻可见条件 1)是必要的。证明条件 2)的必要性十分复杂,在这里我们不加研究。

现在如果回到第 716 款中所研究的普安松-亚培尔求和法,则在一般的方法中取

$$\mathcal{K} = (0, 1), \quad \omega = 1; \quad \gamma_n(x) = x^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

时,可见这种求和法也属于一般的方法。至于第 718 款中所研究的算术平均法,也可看作是从上述方法得到的,不过,在这时的特点只是取自然数附标 n 作为参数 x (且 $\omega = +\infty$)。实际上,

$$\alpha_n = \frac{A_0 + A_1 + \cdots + A_{n-1}}{n} = \frac{n\alpha_0 + (n-1)\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1}}{n} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \left(1 - \frac{m}{n}\right) \alpha_m.$$

因此,在这种情形下

$$\gamma_m(n) = \begin{cases} 1 - \frac{m}{n} & \text{关于 } m=0, 1, \dots, n-1, \\ 0 & \text{关于 } m \geq n. \end{cases}$$

容易证实在这两种情况下,条件 1) 与 2) 成立。

以后[730],我們还要遇到属于一般求和法的一种重要方法。

§ 3. 求和法在傅立叶级数上的应用

723. 基本预备定理 为了避免在以下的叙述中重复起见,我們先作若干一般的討論,这些討論是下面一系列证明的实质。考虑一般形式的含参数 λ 的积分 ($a > 0$):

$$J(\lambda) = \int_0^a g(t) \Phi(t, \lambda) dt. \quad (1)$$

設参数的变化区域是某一集合 $\Delta = \{\lambda\}$, 它有一有限或无限的聚点 ω 。假定函数 $\Phi(t, \lambda)$ 关于 t 在 $[0, a]$ 上的值及 λ 在 Δ 中的值有意义, 并且当 λ 是常数时, 这个函数对于 t 为常义可积分。此外,我們还对函数 $\Phi(t, \lambda)$ 加上下列三个条件:

1° $\Phi(t, \lambda) \geq 0$;

2° 不論 λ 是 Δ 中的那个值,

$$\int_0^a \Phi(t, \lambda) dt = 1^*;$$

3° 对于任意的 $\delta, 0 < \delta < a$, 数量

$$M(\delta, \lambda) = \sup_{t \geq \delta} \Phi(t, \lambda)$$

* 只要假定

$$\lim_{\lambda \rightarrow \omega} \int_0^a \Phi(t, \lambda) dt = 1$$

就够了,但是我們不研究这种推广。

当 $\lambda \rightarrow \omega$ 时趋近于零。

为了简单起见,我们将满足这些条件的函数 Φ 叫做“正核”。

预备定理 如果 $\Phi(t, \lambda)$ 是正核, 而 $g(t)$ 是任意的绝对可积分函数, 并且极限 $g(+0)$ 存在, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow \omega} J(\lambda) = g(+0).$$

证 由 2° ,

$$g(+0) = \int_0^a g(+0) \Phi(t, \lambda) dt;$$

从等式(1)的两端减去这等式, 就得到:

$$J(\lambda) - g(+0) = \int_0^a [g(t) - g(+0)] \Phi(t, \lambda) dt.$$

已给任意的数 $\varepsilon > 0$, 现在我们选取 $\delta (0 < \delta < a)$, 使得当 $0 < t \leq \delta$ 时,

$$|g(t) - g(+0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

并且我们将上面的积分分解成为两个积分的和:

$$\int_0^a = \int_0^\delta + \int_\delta^a = J_1 + J_2.$$

对于其中第一个积分, 注意 1° 与 2° , 立刻得到一个与 λ 无关的估计值:

$$|J_1| \leq \int_0^\delta |g(t) - g(+0)| \Phi(t, \lambda) dt < \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\delta \Phi(t, \lambda) dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \int_\delta^a |g(t) - g(+0)| \Phi(t, \lambda) dt \leq \\ &\leq M(\delta, \lambda) \int_\delta^a |g(t) - g(+0)| dt. \end{aligned} \quad (2)$$

由 3° , $J_2 \rightarrow 0$, 因此对于充分接近于 ω 的值 λ , 就有 $|J_2| < \frac{\delta}{2}$, 而且同时有

$$|J(\lambda) - g(+0)| < \varepsilon,$$

这就是所需要证明的。

对于以上所讲的我們还要作补充如下。假定函数 g 除去与变数 t 有关外, 还与一变数 $x (0 \leq x \leq a)$ 有关:

$$g = g(t, x),$$

而且当 x 为常数时满足前面的条件。这时, 如果 1) $g(t, x)$ 对于一切 t 与 x 一致有界

$$|g(t, x)| \leq L$$

并且 2) $g(t, x)$ 关于 x 一致趋近于 $g(+0, x)$; 则当 $\lambda \rightarrow \omega$ 时, 积分

$$J(\lambda, x) = \int_0^a g(t, x) \Phi(t, \lambda) dt$$

关于 x 一致趋近于极限 $g(+0, x)$ 。

实际上, 根据 2), 我們可选取前面已考虑过的数 δ 与 x 无关。又因为根据 1),

$$|g(t, x) - g(+0, x)| \leq 2L,$$

所以能改变不等式(2)如下:

$$|J_2| \leq 2LaM(\delta, \lambda),$$

其中右端与 x 毫无关系。由此可見对于充分接近于 ω 的值 λ , 不等式

$|J_2| < \frac{\delta}{2}$ 同时关于一切值 x 成立, 因而不等式

$$|J(\lambda, x) - g(+0, x)| < \varepsilon$$

同时关于一切值 x 成立, 这就是所需要证明的。

724. 傅立叶级数的普安松-亚培尔求和法 設 $f(x)$ 又表示以 2π 为周期并且在任意的有限区間上绝对可积分的函数。考虑它的傅立叶级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx \quad (3)$$

所以最后得到这样的表示式:

$$f(r, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(u-x) + r^2} du. \quad (5)$$

这个值得注意的积分称为普安松(S. D. Poisson)积分, 它在分析学中許多問題上起着重要的作用。

事实上, 在“广义求和”的观念出現以前好久, 普安松已經研究过級数(4)以及从它导出的积分(5), 但是他的推理是不够严格的。許瓦尔茲(H. A. Schwarz)才建立普安松积分的严密理論。

定理 設函数 $f(x)$ 在所考虑的点 x 处有右极限与左极限 $f(x \pm 0)$ 。則

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1-0} f(r, x) &= \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(u-x) + r^2} du = \\ &= \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \end{aligned} \quad (6)$$

特別在連續点处, 这个极限就等于 $f(x)$ 。

如果函数 $f(x)$ 处处連續*, 則 $f(r, x)$ 关于 x 一致趋近于 $f(x)$ 。

证 与变换第里希莱积分一样[655], 对于普安松积分(5)作变换, 我們得到

$$f(r, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} dt. \quad (7)$$

为了要把上款中的預备定理应用到这一积分, 令

$$\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} = g(t),$$

并且取函数

$$\Phi(t, r) = \frac{1}{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} \quad (8)$$

* 請回忆我們假定函数 $f(x)$ 有周期 2π 。

作为核(“普安松核”)。在这里, r 起着参变数 λ 的作用, 它的变化的区域是区间 $[0, 1)$, 而 $\omega = 1$ 。我們要证明函数 Φ 滿足前款中对于正核所提出的一切条件。

首先 $\Phi(t, r) > 0$ [参考条件 1°]。实际上, 当 $r < 1$ 时, 分数(8)的分子显然是正的; 如果将分母写成下列形式

$$1 - 2r \cos t + r^2 = (1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{t}{2}, \quad (9)$$

則对于分母也容易作出同样的結論。其次, 如果在(7)中令 $f \equiv 1$, 則也有 $f(r, x) \equiv 1$, 并且我們得到

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} dt = 1,$$

这就是說条件 2° 得到滿足。最后, 当 $\delta \leq t \leq \pi$ 时(如果数 δ 是在 0 与 π 之間任意选取的), 就有 $\sin \frac{t}{2} \geq \sin \frac{\delta}{2}$, 因此[参考(9)]

$$1 - 2r \cos t + r^2 \geq 4r \sin^2 \frac{\delta}{2}.$$

于是

$$M(\delta, r) = \sup_{\delta \leq t \leq \pi} \Phi(t, r) \leq \frac{1}{\pi} \frac{1 - r^2}{4r \sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

当 $r \rightarrow 1$ 时, 显然 $M(\delta, r) \rightarrow 0$ (δ 是固定的): 这就是說条件 3° 也得到滿足。

在这种情形下, 根据已提到的預备定理, 我們有

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} f(r, x) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

这就是所需要证明的。

現在設函数 $f(x)$ 是处处連續的。則它必有界: $|f(x)| \leq K$, 而且同时

$$\left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \right| \leq K.$$

此外, 由于函数 $f(x)$ 一致連續, 当 $t \rightarrow +0$ 时, 表示式

$$\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}$$

关于 x 一致趋近于极限 $f(x)$ 。这样, 再根据前款所作的补充說明, 就证实了定理的最后的断語。

由此, 已证明的定理指出了: 如果函数 $f(x)$ 在点 x 处連續, 或充其量有第一种不連續, 則可用普安松-亚培尔法求傅立叶級数(3)在点 x 处的和, 而且根据不同的情况, 它的“广义和”是

$$f(x) \text{ 或 } \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

附注 如果事先只在区間 $[-\pi, \pi]$ 上給出了函数 $f(x)$, 則用通常的方式[661]推到周期函数时, 容易看出关于 $-\pi < x < \pi$, 一切都与前面相同, 而关于 $x = \pm\pi$,

$$\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}.$$

是普安松积分的极限或級数的“广义和”。

725. 关于圓的第里希萊問題的解 前款中已研究的普安松积分能够应用来解决所謂第里希萊問題的一种简单而重要的特殊情形。我們回想: 如果函数 $u = u(x, y)$ 与它的导数 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 在某一区域内連續, 并且满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (10)$$

(“拉普拉斯方程”), 則 $u(x, y)$ 称为在一个区域内的調和函数[577, 4]。考虑閉周綫(L)所包围的有限区域(D)。則对于这个区域(D)的第里希萊問題可以表述如下: 任意給出周綫(L)上的連續点函数需要找出在閉区域(D)上連續, 并且在它的內部調和的函数 $u = u(x, y)$, 使得这个函数在周綫上与已給函数相符*。当区域(D)是以原点为中心, 以1为半径的圓时, 我們要給出这一問題在这种情形的解。(显然任意圓的情形可以化为这种情形。)

設給出了这个圓周(L)上的某一連續点函数。如果用极角 θ 确定圓周上各点的位置(图145), 則这样就等于給出了一个連續函数 $f(\theta)$ (显然有周期 2π)。在圓(D)的内部也換用极

* 在第577款, 7)中, 已經证明了調和函数是由在周綫上的值所唯一确定的。

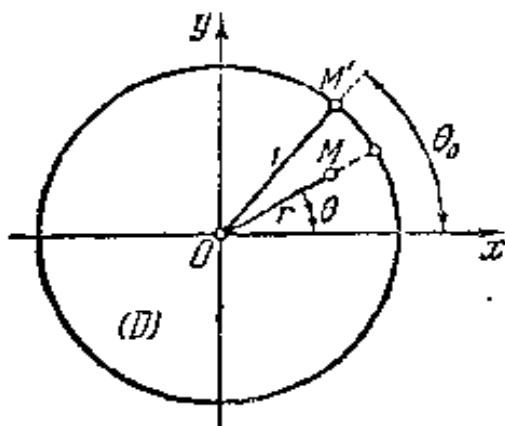


图 145.

坐标 r, θ 则较为方便, 而将方程(10)换成相应变换了的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (10^*)$$

[参考 212, 1)]; 因此, 我们要找出当 $r \leq 1$ 时的连续函数 $u = u(r, \theta)$, 使得它当 $r < 1$ 时满足方程 (10^*) , 而当 $r = 1$ 时与 $f(\theta)$ 符合。

按照导入的次序, 我们从方程 (10^*) 的最简单的解开始(不考虑常数解):

$$r^n \cos n\theta, \quad r^n \sin n\theta \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

用傅立叶的方法就能够将它们找出来[696]。不难直接证实这些函数满足方程 (10^*) 。用任意的因子 A_n, B_n 来乘它们, 并且加入常数项 A_0 后, 作出级数

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) r^n,$$

这级数在形式上*也满足方程 (10^*) 。最后, 考虑边界条件: $u(1, \theta) = f(\theta)$, 我们得到

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta = f(\theta),$$

从而, 与通常一样, 我们断定, A_0, A_n, B_n 是函数 $f(\theta)$ 的傅立叶系数:

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_n = a_n, \quad B_n = b_n.$$

结果我们得到所提出的问题的(暂时还是形式上的)解:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \quad (11)$$

容易看出这个级数就是函数 $f(\theta)$ 的普安松级数; 如果愿意的话, 可用普安松积分

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(u-\theta)+r^2} du \quad (11^*)$$

来代替它。还要证实所作出的函数实际上满足一切条件。

首先, 因为系数 a_n 与 b_n 全体有界, 所以不难看出: 如果限于考虑值 $r \leq r_0$ (其中 $r_0 < 1$, 但是可取作随意接近于 1), 则由(11)对 r 或对 θ 逐项微分(一次或两次)所得到的级数对 r 与 θ 都是一致收敛。在这种情况下, 它们的和就是函数 $u(r, \theta)$ 的逐级导数, 并且既然这个函数的级数的一切项分别满足变换了的拉普拉斯方程, 则这个函数本身在圆内, 亦即当 $r < 1$ 时, 也满足这个方程。

* 如果假定可以逐项微分。

函数 $u(r, \theta)$ 在圆内对于两变数全体 (r, θ) 是連續的; 这是因为根据第 404 款中的定理 I (容易将它推广到二元函数的情形), 级数 (11) 同时对于两个变数一致收敛 (当 $r \leq r_0 < 1$ 时), 现在证明: 当点 $M(r, \theta)$ 从圆的内部趋近于圆周上的点 $M'(1, \theta_0)$ 时, 函数 $u(r, \theta)$ 恰好趋近于 $f(\theta_0)$ 。实际上, 由于函数 $f(\theta)$ 的連續性, 对于任意取出的 $\varepsilon > 0$, 可以找到这样的 $\delta > 0$, 使得当 $|\theta - \theta_0| < \delta$ 时,

$$|f(\theta) - f(\theta_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面, 因为当 $r \rightarrow 1 - 0$ 时, $u(r, \theta)$ 关于 θ 一致趋近于 $f(\theta)$ [724], 所以可将数 δ 設作充分小, 使得当 $|r - 1| < \delta$ 时, 对于一切 θ

$$|u(r, \theta) - f(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此, 最后当 $|r - 1| < \delta$ 及 $|\theta - \theta_0| < \delta$ 时, 我們有

$$|u(r, \theta) - f(\theta_0)| < \varepsilon,$$

这样证明就完成了。

726. 傅立叶级数的齐查罗-費叶尔求和法 如所已知 [655], 可能用第里希萊积分表示傅立叶级数 (3) 的部分和 $s_n(x)$:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(u-x)}{2 \sin \frac{1}{2}(u-x)} du.$$

在这种情形下, 前面 n 个和式的算术平均可写成下列形式:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)(u-x)}{2 \sin \frac{1}{2}(u-x)} du$$

或者在化簡后 [参考 718, 2]:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left[\frac{\sin \frac{n}{2}(u-x)}{\sin \frac{1}{2}(u-x)} \right]^2 du.$$

这个积分称为費叶尔 (L. Fejer) 积分, 因为这位学者首先成功地将算术平均法应用来求傅立叶级数的广义和。下面的定理也是費叶尔所发现的 (参考許瓦尔茲定理):

定理 設函数在所考虑的点 x 处有右极限与左极限 $f(x \pm 0)$ 。則

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left[\frac{\sin \frac{n}{2}(u-x)}{\sin \frac{1}{2}(u-x)} \right]^2 du = \\ &= \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.\end{aligned}\quad (12)$$

特別在連續点处, 这个极限等于 $f(x)$ 。

如果函数 $f(x)$ 处处連續*, 則和式 $\sigma_n(x)$ 关于 x 一致趋近于 $f(x)$ 。

证 与第里希莱积分及普安松积分相似, 我們可将費叶尔积分表成下列形式:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \left(\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \right)^2 dt. \quad (13)$$

如果如 724 款一样, 令

$$\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} = g(t),$$

并且取函数

$$\Phi(t, n) = \frac{1}{n\pi} \left(\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \right)^2$$

作为核(“費叶尔核”), 則这种情形也适合于第 723 款的一般方法。

容易证实实际上这是(如在第 723 款中所定义的)正核(在这里自然数参数 n 代替了 λ ; $\omega = +\infty$)。事实上, 可以立刻看到

$$\Phi(t, n) \geq 0.$$

如果在(13)中取 $f \equiv 1$, 則同时 $s_n \equiv 1$, 而且也有 $\sigma_n \equiv 1$, 因此

$$\frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \right)^2 dt = 1, \quad (14)$$

* 参考第 639 页的底注。

这就是說費叶尔核滿足第 723 款的条件 2°。至于条件 3°, 則因容易得到估計值

$$M(\delta, n) = \sup_{\delta \leq t \leq \pi} \Phi(t, n) \leq \frac{1}{n\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}},$$

从而也可推出当 $n \rightarrow \infty$ 时, $M(\delta, n) \rightarrow 0$ 。

在这种情形下, 应用第 723 款的预备定理, 就得到极限关系式(12)。

最后, 如在許瓦尔茲定理的情形一样, 可证实定理最后的結論。

在这次, 由已經证明的定理可以看出: 如果函数 $f(x)$, 在点 x 处連續, 或充其量有第一种不連續, 則可用算术平均法求傅立叶級数(3)的和, 而且

$$f(x) \text{ 或 } \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

分別是它的“广义和”。

根据弗洛般尼烏斯定理[719], 从这个断語能够推得到第 724 款中关于普安松-亚培尔求和法的类似断語。

如果函数 $f(x)$ 只在区間 $[-\pi, \pi]$ 上被給出, 則对于它也能重述第 724 款末尾所作的附注。

727. 傅立叶級数广义求和法的若干应用 在这里, 我們所指的是要由費叶尔定理引导出若干推論(虽然为了同一目的, 通过略为复杂的推理, 对于許瓦尔茲定理也能够这样做)。首先两个推論表明一种奇异的情况, 既可根据广义求和法作出关于常义求和法的結論。

1° 如果傅立叶級数(3)在某一点 x 处收敛, 而函数在这点連續或有通常的不連續, 則級数的和必分別等于

$$f(x) \text{ 或 } \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

实际上, 根据費叶尔定理, 用算术平均法所求得的級数的“广义和”就是这样。由于这种方法的承襲性[718], 設若級数在通常的意义下有和, 則这个和必須与“广义和”一致。

2° 从费叶尔定理, 我们能够得到(关于有界变差的函数的傅立叶级数收敛性的)第里希莱-霞当定理作为推论[参看 660]。

如果 $f(x)$ 是在整个区间 $[-\pi, \pi]$ 上的有界变差的函数, 则在任一点 x 处, 函数有极限 $f(x \pm 0)$, 并且 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ 是傅立叶级数的“广义和”。另一方面, 已经知道 [681] 有界变差函数的傅立叶系数 a_n, b_n 的阶是 $O\left(\frac{1}{n}\right)$, 于是根据哈第定理 [720] 就可推得级数 (3) 在通常的意义下收敛, 而且收敛于同样的和式。

可是这还不能包含第里希莱-霞当定理。在第 660 款的叙述中, 这个定理具有所谓“局部”性质。在那里, 只需要函数在所考虑的点的任一邻域内有有界变差。但是我们知道 [657], 恰好是函数在这个邻域内的值决定了傅立叶级数在已给点处的性质以及它的和的大小。因此, 在实质上不作任何改变, 我们可改变函数在所提到的邻域以外的值得得到在整个区间 $[-\pi, \pi]$ 上的有界变差函数, 而上面所讲就可应用到这个函数上。

3° 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上连续, 而且还满足条件

$$f(-\pi) = f(\pi),$$

则能将它推广到整个数轴上成为处处连续的周期(以 2π 为周期)函数。在这种情形下, 费叶尔和的序列 $\{\sigma_n(x)\}$ 对于在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的一切 x 一致收敛于 $f(x)$ 。因为每个这样的和都是三角多项式, 所以用显而易见的方式就能得到关于连续周期函数的近似法的维尔斯特拉斯定理 [709]。

4° 从费叶尔定理能够立即断定三角函数系在连续函数类中是完全的 [参考 708]。事实上, 如果在区间 $[-\pi, \pi]$ 上连续的函数 $f(x)$ 与三角函数系中一切函数正交, 从而它的一切傅立叶系数都等于零, 则 $\sigma_n(x) = 0$ 。这时至少在开区间 $(-\pi, \pi)$ 内, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sigma_n(x) \rightarrow f(x)$; 因此, 在这开区间内, $f(x) = 0$, 而根据连续性, 在端点也是如此。

我们还加说明如下, 虽然它与费叶尔定理无关, 但与费叶尔和有关。

5° 如果函数 $f(x)$ 有界, 并且它在区间 $[-\pi, \pi]$ 上变化时包含在 m 与 M 之间, 则一切费叶尔和 $\sigma_n(x)$ 也包含在同样两界之间。

从积分 (13) 的估计值并考虑到 (14), 立刻推得:

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \right)^2 dt = m &\leq \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \left(\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \right)^2 dt \leq \\ &\leq M \cdot \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \right)^2 dt = M. \end{aligned}$$

关于傅立叶级数的部分和 $s_n(x)$, 类似的断言不能成立: 在这里表现出这个事实: “第里
博士家园 流星

希莱核”

$$\frac{1}{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}$$

要改变符号,而与“费叶尔核”不同。我們甚至于不可能保证所有这样的和式有共同的界。

然而,如果函数 $f(x)$ 的傅立叶系数 a_n, b_n 的阶是 $O\left(\frac{1}{n}\right)$, 則部分和 $s_n(x)$ 还是一致有界。这就是說,如果对于一切 $n=1, 2, 3, \dots$, 我們有

$$n|a_n| \leq A, \quad n|b_n| \leq B,$$

則可断定

$$m - (A+B) \leq s_n(x) \leq M + (A+B).$$

实际上,将第 720 款的恒等式(9)应用于現在的情形,就得到

$$s_n(x) = \sigma_{n+1}(x) + \frac{\sum_{k=1}^n k(a_k \cos kx + b_k \sin kx)}{n+1}.$$

但

$$|k(a_k \cos kx + b_k \sin kx)| \leq A+B,$$

同时根据已证明的結果,

$$m \leq \sigma_{n+1}(x) \leq M.$$

由此可推得所需要的断語。

譬如說,如果考虑展开式[664, 2)]

$$\frac{\pi-x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi), \quad (15)$$

則在这里 $m = -\frac{\pi}{2}$, $M = \frac{\pi}{2}$, $A=0$, $B=1$ 。因此可断言这个級数的部分和的绝对值一致以数 $\frac{\pi}{2}+1$ 为界[参考 676]。

由已证明的断語可作出更一般的結論: 有界变差函数的傅立叶級数的一切部分和一致有界[参考 712]。这是因为这种函数的傅立叶系数 a_n, b_n 的阶显然是 $O\left(\frac{1}{n}\right)$ [681]。

728. 傅立叶級数的逐項微分法 如果对函数 $f(x)$ 的傅立叶級数(3)逐項求微分,則一般說来,即使是在所考虑的点 x 处函数 $f(x)$ 有有限导数 $f'(x)$, 所得到的級数

$$\sum_{m=1}^{\infty} m(b_m \cos mx - a_m \sin mx) \quad (16)$$

是发散的。剛才所提到过的級数(15)可作为例子: 对它逐項微分就得

到处处发散的级数

$$\sum_{j=1}^{\infty} \cos mx.$$

然而, 法都(P. Fatou)发现了下面有趣的命题: 如果在点 x 处存在着有限的导数 $f'(x)$, 则级数(16)可用普安松-亚培尔法求和, 并且和式恰好为 $f'(x)$ 。

为了证明起见, 把普安松级数(4)对于 x 求微分:

$$\frac{\partial f(r, x)}{\partial x} = \sum_{m=1}^{\infty} r^m m (b_m \cos mx - a_m \sin mx); \quad (17)$$

由于所得到的级数关于 x 一致收敛, 在这里可以进行逐项微分法。如果把普安松积分(5)对于 x 求微分, 我们也可得到同样的结果:

$$\frac{\partial f(r, x)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{2r(1-r^2) \sin(u-x)}{[1-2r \cos(u-x) + r^2]^2} du,$$

而且在这种情形下, 根据第 472 款的定理 III*, 我们能在积分号下微分。上面的积分可变换为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(r, x)}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{2r(1-r^2) \sin t}{[1-2r \cos t + r^2]^2} dt = \\ &= r \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \sin t} \cdot \frac{2(1-r^2) \sin^2 t}{[1-2r \cos t + r^2]^2} dt. \end{aligned} \quad (18)$$

令

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \sin t};$$

如果将这表示式改写成下列形式:

$$g(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{f(x+t) - f(x)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x)}{-t} \right] \cdot \frac{t}{\sin t},$$

則可見

$$g(+0) = f'(x).$$

其次, 我們要证明函数

$$\Phi(t, r) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2(1-r^2)\sin^2 t}{[1-2r\cos t+r^2]^2}$$

是在第 723 款的意義下的正核。首先, 显然

$$\Phi(t, r) \geq 0.$$

在(18)中, 特別令 $f(x) = \sin x$ 。則

$$f(r, x) = r \sin x, \quad \frac{\partial f(r, x)}{\partial x} = r \cos x, \quad \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \sin t} = \cos x.$$

將各式代入(18), 消去 $r \cos x$ 后就得到:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{2(1-r^2)\sin^2 t}{[1-2r\cos t+r^2]^2} dt = 1.$$

最后,

$$M(\delta, r) = \sup_{\delta \leq t \leq \pi} \Phi(t, r) \leq \frac{1}{\pi} \frac{2(1-r^2)}{\left[4r \sin^2 \frac{\delta}{2}\right]^2},$$

因此显然当 $r \rightarrow 1$ 时, $M(\delta, r) \rightarrow 0$ 。

現在应用第 723 款的預备定理, 我們看到: 作为級数(17)的和的积分(18), 当 $r \rightarrow 1$ 时趋近于 $f'(x)$ 。而这就表明了級数(16)可用普安松-亚培尔法求得和式 $f'(x)$, 这就是所需要证明的。

附注 I. 已证明的定理能够推广到逐次微分法的情形: 如果在所考虑的点处有限的导数 $f^{(p)}(x)$ ($p > 1$) 存在, 則由(3)微分 p 次所得到的級数可用普安松-亚培尔法求得和式 $f^{(p)}(x)$ 。

II. 关于齐查罗求和法, 与法都定理类似的断語不成立。可是, 如果加强对导数的条件, 并假定它在所考虑的点处連續, 則普安松-亚培尔求和法也可用齐查罗求和法来代替。

§ 4. 函数的三角展开式的唯一性

729. 关于广义导数的輔助命題 为了使得在下面讲述标题上的

重要問題时沒有間断,我們先作一系列輔助的討論。

設在某一區間 $[a, b]$ 上給出函數 $F(x)$ 。取 a 与 b 之間的值 $x: a < x < b$; 則对于充分小的 $h > 0$, 差数 $\Delta_h F(x) = F(x+h) - F(x-h)$ 有意义。如果有限的极限

$$F^{(1)}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\Delta_h F(x)}{2h}$$

存在, 則称它为函数 $F(x)$ 在点 x 处的广义 (“对称”) 导数。只要当通常意义下的导数存在时, 广义导数 $F^{(1)}(x)$ 就必定存在, 并且与它相等; 这可以直接从下面的关系式看出: 当 $h \rightarrow +0$ 时,

$$\frac{\Delta_h F(x)}{2h} = \frac{1}{2} \left[\frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \frac{F(x-h) - F(x)}{-h} \right] \rightarrow F'(x).$$

然而在通常导数不存在的若干情形下, 广义导数还可能存在。函数

$$F(x) = x \sin \frac{1}{x} (x \neq 0), \quad F(0) = 0;$$

就可作为这样的例子; 我們已經知道 [101, 1°] 它在点 $x=0$ 处沒有导数; 而在这点它的广义导数等于零。

其次, 考虑二級差数

$$\begin{aligned} \Delta_h^2 F(x) &= \Delta_h \Delta_h F(x) = \Delta_h F(x+h) - \Delta_h F(x-h) = \\ &= [F(x+2h) - F(x)] - [F(x) - F(x-2h)] = \\ &= F(x+2h) - 2F(x) + F(x-2h). \end{aligned}$$

如果有限的极限

$$F^{(2)}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}$$

存在, 則称它为函数 $F(x)$ 在所考虑的点 x 处的广义 二級导数。在这里, 也可证明当通常的二級导数存在时, 广义二級导数也存在, 并且与它相等。实际上, 如果对于 h 的两个函数 $\Delta_h^2 F(x)$ 与 $4h^2$ 应用科西公式*:

$$\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2} = \frac{F'(x+2\theta h) - F'(x-2\theta h)}{4\theta h},$$

* 假定二級导数 $F''(x)$ 在点 x 处存在时, 已經包含了假定一級导数 $F'(x)$ 在这点的邻域內存在。

則由上面已讲的关于广义(一級)导数的結果,可以看出当 $h \rightarrow 0$ 时, 所得到的表示式趋近于 $F''(x)$ 。例如, 函数

$$F(x) = x^3 \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0), \quad F(0) = 0$$

[参考 101, 2°] 表明了逆断語不正确: 已知广义导数 $F^{[1]}(x)$ 存在时, 不能推出通常的导数 $F''(x)$ 存在。

下面的定理說明: 在若干情形下, 广义二級导数起着与通常的二級导数相同的作用:

許瓦尔茲定理 如果关于在区間 $[a, b]$ 上的連續函数 $F(x)$, 广义二級导数在这区間內存在, 并且等于零, 則 $F(x)$ 是綫性函数。(完全与假定通常导数 $F''(x) = 0$ 时一样¹⁾)

为了证明起見, 我們取任意的数 $s > 0$, 并且作出輔助函数

$$\varphi(x) = \pm \left\{ F(x) - F(a) - \frac{F(b) - F(a)}{b - a} (x - a) \right\} + s(x - a)(x - b),$$

而关于大括号前的两种符号, 我們的討論都是同样。这时, 在区間內就有

$$\varphi^{[1]}(x) = 2s, \quad (1)$$

因为函数 F 的广义二級导数等于零, 而二次函数的广义二級导数就是它的通常二級导数*。

函数 $\varphi(x)$ 在区間 $[a, b]$ 的端点上为零。我們將证明它在区間內不能取正值。实际上, 在相反的情形时, 作为連續函数, $\varphi(x)$ 应在某一內点 x_0 处达到它的最大(正)值。但这时我們有

$$\varphi(x_0 \pm 2h) \leq \varphi(x_0), \quad \Delta_h \varphi(x_0) \leq 0$$

并且, 最后,

$$\varphi^{[1]}(x_0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\Delta_h \varphi(x_0)}{4h^2} \leq 0,$$

与等式(1)矛盾!

* 显然: 如果两个函数 F 及 G 在所考虑的点处有导数 $F^{[1]}$ 及 $G^{[1]}$, 則它們的和或差也有分别等于 $F^{[1]} \pm G^{[1]}$ 的广义二級导数。

于是对于一切 x , $\varphi(x) \leq 0$, 亦即

$$\pm \left\{ F(x) - F(a) - \frac{F(b) - F(a)}{b-a}(x-a) \right\} \leq \varepsilon(x-a)(b-x) < \\ < \varepsilon(b-a)^2,$$

而且無論在括号前取怎样的符号(正号或負号)都是一样。因此我們也有

$$\left| F(x) - F(a) - \frac{F(b) - F(a)}{b-a}(x-a) \right| < \varepsilon(b-a)^2.$$

由于 ε 的任意性, 可知不等式的左端是零, 从而

$$F(x) = F(a) + \frac{F(b) - F(a)}{b-a}(x-a),$$

这就是所需要证明的。

有时除去在各别的“未知点”外, 条件 $F''(x) = 0$ 处处成立, 而在“未知点”处不假定这个条件成立。这时要应用:

广义許瓦尔茲定理 設对于区間 $[a, b]$ 上的連續函数 $F(x)$, 导数 $F''(x)$ 存在, 并且除去有限个“未知点”

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_m < b$$

外, 在区間內处处等于零。如果在每个“未知点”处, 即使削弱了的条件

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2 F(x)}{2h} = 0 \quad (2)$$

成立, 函数 $F(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上还是綫性的。

根据前一定理, 函数 $F(x)$ 在两个例外值之間一定是 x 的綫性函数, 于是(譬如說)在区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 上, 我們有

$$F(x) = cx + d,$$

而在邻接的区間 $[x_i, x_{i+1}]$ 上,

$$F(x) = c'x + d',$$

同时两个表示式在点 $x = x_i$ 处相符:

$$F(x_i) = cx_i + d = c'x_i + d'. \quad (3)$$

关于 $x=x_i$, 由条件(2)得

$$\lim_{h \rightarrow +0} \left\{ \frac{F(x_i+2h) - F(x_i)}{2h} - \frac{F(x_i-2h) - F(x_i)}{-2h} \right\} = 0.$$

但是在这里左端就是两直线 $y=cx+d$ 与 $y=c'x+d'$ 的斜率的差。于是 $c=c'$, 而这时由(3)也有 $d=d'$, 这就是說, 事实上, 两个直线段是由彼此延长而得。因为这里所說的可应用任意两个邻接的线段, 所以我們函数的图形在整个区间 $[a, b]$ 上是直线, 因而这个函数就是线性的。

730. 三角级数的黎曼求和法 黎曼所发展的三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (4)$$

求和法在以下起着重要的作用。这种方法完全不假定级数(4) 是任何函数的傅立叶级数, 并且可将它应用到完全任意的三角级数上, 不过要级数的系数全体有界:

$$|a_n|, |b_n| \leq L \quad (L = \text{常数}). \quad (5)$$

将级数(4)在形式上逐项积分两次, 我們得到级数

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}. \quad (6)$$

当条件(5)成立时, 这级数以收敛级数

$$L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

为强函数, 因此在 x 的任意的变化区间上一致收敛, 并且定出一个連續函数 $F(x)$ 。如果在已給的点 x 处存在着有限的极限

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{\Delta_h F(x)}{4h^2},$$

亦即存在着广义二級导数 $F^{[II]}(x)$, 則称它为级数(4)在黎曼意义下的“广义和”。

作为例子, 如果将这种方法应用到级数

$$\frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} \cos nx,$$

则在这里

$$F(x) = \frac{x^2}{4} - \sum_1^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

回想[(664, 9)]: 关于 $0 \leq x \leq 2\pi$, $\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}$ 是右端的级数的和, 就有

$$F(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}.$$

因此, 关于 $0 < x < 2\pi$, 显然 $F^{(1)}(x) = F''(x) = 0$, 而级数的“广义和”是零 [参看 716 与 718]。

容易证实

$$\Delta_h^2 \cos nx = -2 \cos nx (1 - \cos 2nh) = -4 \cos nx \sin^2 nh$$

及

$$\Delta_h^2 \sin nx = -4 \sin nx \sin^2 nh.$$

从而

$$\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2. \quad (7)$$

于是黎曼求和法就化成用形如 $\left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2$ 的因子乘级数(4)的各项, 并取 $h \rightarrow 0$ 时的极限。

在这种形式下, 黎曼方法也能够应用到完全任意的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

如果级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2$$

至少关于充分小的 h 收敛, 并且它的和 $\varphi(h)$ 当 $h \rightarrow 0$ 时趋近于极限 U , 则这就是原级数的“广义和”。

读者可看到黎曼方法属于第722款的一般方法内。在这种情形下,

h 起着参数 x 的作用($\omega=0$), 而因子

$$\gamma_n(h) = \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^{2*}$$

滿足在那里所列举的条件。关于第一个条件, 这是显然的:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \gamma_n(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 = 1.$$

至于第二个条件, 則考虑

$$\left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 - \left(\frac{\sin (n-1)h}{(n-1)h} \right)^2 = \int_{(n-1)h}^{nh} \left[\left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 \right]' dz$$

及

$$\left| \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 - \left(\frac{\sin (n-1)h}{(n-1)h} \right)^2 \right| \leq \int_{(n-1)h}^{nh} \left| \left[\left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 \right]' \right| dz,$$

我們就会得到

$$\begin{aligned} |\gamma_0(h)| + \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n(h) - \gamma_{n-1}(h)| &= \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 - \left(\frac{\sin (n-1)h}{(n-1)h} \right)^2 \right| \leq 1 + \int_0^{\infty} \left| \left[\left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 \right]' \right| dz. \end{aligned}$$

不难证实这个积分存在, 因为当 $z \rightarrow \infty$ 时,

$$\left[\left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 \right]' = 2 \sin z \left(\cos z - \frac{\sin z}{z} \right) \frac{1}{z^2} = O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

因此, 黎曼的广义求和法是承襲的。这个事实可以应用到三角级数, 而推出

黎曼第一定理 如果三角级数(4)在点 x 处收敛于和式 S , 則將它在形式上逐項积分两次所得到的函数 $F(x)$ 在该点处有等于 S 的广义二級导数

$$F^{(2)}(x) = S.$$

* $\gamma_0(h)$ 简单地了解为一。

我們注意: 对于傅立叶級数的情形, 表示式

$$\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}$$

容易变换为第 723 款中所研究过带有“正核”那种型式的积分。这样, 对黎曼求和法就可推出完全与許瓦尔茲定理[724]及費叶尔定理[726]相类似的定理, 对此我們不加研究; 对于我們, 黎曼方法所以重要, 由于它是研究一般形状的三角級数的强有力的工具*。在这方面必須有

黎曼第二定理 如果級数(4)的系数 a_n, b_n 趋近于零, 則无关于級数的收敛性 条件(2)成立:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2 F(x)}{2h} = 0.$$

对于任意固定的 x , 我們令

$$u_0 = \frac{a_0}{2}, \quad u_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

这时問題化为证明关系式

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \frac{\sin^2 nh}{n^2 h^2} \right\} h = 0. \quad (8)$$

由定理的假設, $u_n \rightarrow 0$, 这就是說对于任意給出的 $\varepsilon > 0$, 可找到这样的数 N , 使得当 $n \geq N$ 时, $|u_n| < \varepsilon$ 。現在我們將所考虑的表示式写成两个表示式的和的形状:

$$S_1 = \left\{ u_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \right\} \cdot h \quad \text{及} \quad S_2 = \sum_{n=N}^{\infty} \cdot h.$$

我們有

$$|S_2| < \varepsilon \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 h < \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 h.$$

* 黎曼本人完全沒有研究过級数的广义求和法。他发展了这种理論是为了解决它所提出的問題: 求出可展开为一般形状三角級数的函数的整个特征。在这里, 我們不可能叙述黎曼的这些研究。

容易证明 s 的乘数与 h 无关的数为界。例如, 我們已經看到

$$\frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nh}{n^2} = \frac{\pi - h}{2}$$

[457, 3)]。因此

$$|S_2| < \frac{\pi}{2} s.$$

至于表示式 S_1 , 則它显然随着 h 趋近于零, 因而当 h 充分小时, 它的绝对值比 s 小。由此最后得到断語(8)。

731. 关于收敛级数的系数的预备定理 下面所证明的命题在以后有用, 而且它也具有独立的意义。

康托尔(G. Cantor)预备定理 如果三角级数(4)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx$$

至少关于在某一区间 $(d) = [\alpha, \beta]$ 上的值 x 收敛, 則当 $m \rightarrow \infty$ 时, 级数的系数 a_m, b_m 必趋近于零。

我們將级数的公項表示成下列形式

$$a_m \cos mx + b_m \sin mx = \rho_m \sin m(x - \alpha_m),$$

其中 $\rho_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}$ 。需要证明 $\rho_m \rightarrow 0$ 。

假定不是这样; 則关于无穷多个值 m , 不等式

$$\rho_m \geq \delta \tag{9}$$

成立, 其中 δ 是某一个正的常数。

我們用归纳法作出一序列彼此套着的区间 $\{(d_n)\}$ 与一序列增加的值 $\{m_n\} (n=1, 2, 3, \dots)$, 使得

$$|\rho_{m_n} \sin m_n(x - \alpha_{m_n})| > \frac{\delta}{2}, \text{ 关于在 } (d_n) \text{ 上的 } x. \tag{10}$$

我們取得滿足不等式(9), 还滿足不等式

$$md > \pi^*$$

* 我們用 d 表示区间 $(d) = [\alpha, \beta]$ 的长。

的第一个数 m 作为 m_1 。当 x 在区间 (d) 上变化时, 函数 $\sin m_1(x - \alpha_{m_1})$ 至少取得值 ± 1 一次; 而这时根据連續性, 也可找到包含在 (d) 中的区间 (d_1) , 使得在其中一切点处, 这个函数的绝对值 $> \frac{1}{2}$, 并且由此注意条件 (9), 就得到

$$|\rho_{m_1} \sin m_1(x - \alpha_{m_1})| > \frac{\delta}{2}, \text{ 关于在 } (d_1) \text{ 上的 } x.$$

如果已经确定了 (d_{n-1}) 与 m_{n-1} , 则与刚才完全相仿, 可以确定数值 m_n 并且作出包含在 (d_{n-1}) 中的区间 (d_n) , 使得 (10) 成立。同时在这里也容易使得条件 $m_n > m_{n-1}$ 成立。

我们现在取在一切 (d_n) 中的点 x_0 (这样的点虽說只有一个, 但永远存在)。在这点处, 不等式 (10) 对于一切 n 成立, 而且由于不能滿足收敛性的必要条件, 級数 (4) 当 $x = x_0$ 时发散——即与假设矛盾。这样就证明了预备定理。

732. 三角展开式的唯一性 最后, 我们来讲本阶段所要研究的一个基本問題。如果函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上可展开成一个三角級数 (4), 則这个展开式是不是唯一的呢? 如我們已經提到 [652], 用欧勒傅立叶公式作出級数的系数表示式时, 在邏輯上沒有严密的根据, 那么現在的問題就更有理由了。下面的定理对这問題作肯定的答复。

海涅(Heine)-康托尔定理 如果两个三角級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (4)$$

与

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx \quad (11)$$

在区间 $[-\pi, \pi]$ 的一切点处 (即使可能除去有限个“未知点” $x_1, x_2, \dots, x_k$ 外) 收敛于同一和式 $f(x)$, 則这两个級数恒等, 也就是說

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha_n, & b_n &= \beta_n, \\ (n=0, 1, 2, \dots) & & (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

將級數(4)与(11)逐項相減,則要证明的定理化成了关于零的三角展开式的唯一性的定理。

如果三角級數(4)在区間 $[-\pi, \pi]$ 上(可能除去有限个“未知点”外)收敛于零,則它的一切系数必須是零:

$$a_m = 0, \quad b_m = 0.$$

我們来证明这一断語。

根据前节的預备定理,系数 a_m 与 b_m 趋近于零;由此特別推得它們全体有界。

考虑根据假定为連續的黎曼函数[参考(6)]。由黎曼第一定理[730],除去“未知点”外,它的广义二級导数 $F^{(2)}(x)$ 处处等于零。而根据黎曼第二定理[730]*,甚至于在“未知点”处,削弱了的条件(2)成立。于是应用广义許瓦尔茲定理[729],就能断定函数 $F(x)$ 是綫性的;

$$\frac{a_0 x^2}{2} - \sum_1^{\infty} \frac{a_m \cos mx + b_m \sin mx}{m^2} = cx + d.$$

重要的是要強調:这个等式确乎在整个实数軸上成立,因为关于区間 $[-\pi, \pi]$ 已讲过的,关于任意有限区間也正确。将求得的等式換写成下列形式:

$$\frac{a_0 x^2}{4} - cx = d + \sum_1^{\infty} \frac{a_m \cos mx + b_m \sin mx}{m^2},$$

由右端函数的周期性,立刻可断定 $a_0 = c = 0$ 。这样就得到零的展开式如下:

$$0 = d + \sum_1^{\infty} \frac{a_m \cos mx + b_m \sin mx}{m^2},$$

但这是一个一致收敛的級数!在这种情形下[652],它的系数一定可以用欧勒-傅立叶公式表示出来,于是我們得到所需要的結論: $a_m = b_m =$

* 在这里应用它,就是因为系数 a_m 与 b_m 趋近于零!

$=0$ 。

附注 我們也可用下面的方式来避免引用康托尔预备定理。

設 x 是任意一个异于“未知点”的点，因此对于这个值 x ，級数(4)收敛，而它的公项当然趋近于零：

$$a_m \cos mx + b_m \sin mx \rightarrow 0. \quad (12)$$

在級数(4)中，用数值 $x + \delta$ 与 $x - \delta$ 代替 x ，并且逐项相加，就得到展开式

$$a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \cos m\delta;$$

对于一切值 δ ，只可能有有限个例外(如果问题是关于 δ 的任一有限变化区间)，这个展开式收敛于零。但是关于这个带变数 δ 的三角級数，我們已經知道它的系数趋近于零，而且对于它(完全不引用康托尔的预备定理!)可以应用上面所叙述的推理，因此 $a_0 = 0$ ，并且

$$a_m \cos mx + b_m \sin mx = 0. \quad (13)$$

($m=1, 2, 3, \dots$)

这些等式不仅关于异于“未知点”的点 x 成立，而且由于余弦与正弦函数的連續性，它們处处成立。对 x 微分，我們还得到等式

$$b_m \cos mx - a_m \sin mx = 0; \quad (14)$$

最后，从(13)与(14)推得 $a_m = b_m = 0$ 。

733. 关于傅立叶級数的最后的定理 总之，如果在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的函数 $f(x)$ 可能有三角級数展开式，則只有一种展开的方法。那么这个唯一的方法究竟是怎样？所得級数是否一定就是函数 $f(x)$ 的傅立叶級数*？

我們已經知道有些不能展开成傅立叶級数的函数——即使連續——[677]，但是直到这里还没有解决这个问题：这种函数是否可以

* 当然，我們要假定函数 $f(x)$ 绝对可积分，因为說到傅立叶級数，在这里永远就是指(如同上面一样)绝对可积分函数的傅立叶級数。

展开成一种三角級数, 其系数异于傅立叶系数。

另一方面, 我們容易作出处处收敛 (因此唯一确定一函数) 但同时显然不是傅立叶級数的三角級数, 那么所有上述問題就更加自然了。例如, 級数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n}$$

就是这样。这个級数在不含形如 $2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 的点的任一閉区間上甚至一致收敛 [403], 因而确定一連續函数; 而在形如 $2k\pi$ 的点处, 它也显然收敛于零。但同时这个級数一般不是傅立叶級数, 因为在这甲, 第 706 款末尾 [参考在那里的附注] 所推出的傅立叶級数的必要条件不成立: 因为級数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ 发散! [358, 6)。]

在本款的定理与下款的推广中, 我們提出的問題得到了最后的解答。

我們先讲莱彼格 (H. Lebesgue) 所作的說明:

預备定理 如果在区間 $[a, b]$ 上的連續函数 $F(x)$ 在这个区間內处处有广义二級导数 $F''(x)$ 包含在两个界 m 与 M 之間:

$$m \leq F''(x) \leq M,$$

則任意的形如 $\frac{\Delta_h^2 F(x_0)}{4h^2}$ 的比值也包含在同样的两个界之間, 当然在这里要假定区間 $[x_0 - 2h, x_0 + 2h]$ 完全在 $[a, b]$ 上。

我們考虑函数

$$\varphi(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{\Delta_{2h} f(x_0)}{4h} + \frac{(x - x_0)^2}{2} \frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{4h^2},$$

它是一个整二次多項式。直接可证实: 在三点 $x_0 - 2h, x_0, x_0 + 2h$, 它与 $f(x)$ 取相同的值, 因此在这三点, 差数

$$\lambda(x) = f(x) - \varphi(x)$$

是零。函数 $\lambda(x)$ 在区间 $[x_0 - 2h, x_0 + 2h]$ 上连续, 并且在它的内部有广义二級导数:

$$\lambda^{(2)}(x) = f^{(2)}(x) - \frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{4h^2}$$

(多项式 φ 的广义二級导数就等于通常的二級导数)。 $\lambda(x)$ 在区间 $[x_0 - 2h, x_0 + 2h]$ 内的两点 x_1 与 x_2 处达到最大值与最小值*。容易证明: 在这两点处我們分別有 $\lambda^{(2)}(x_1) \leq 0$, $\lambda^{(2)}(x_2) \geq 0$ [参考第 651 頁上的推理], 从而

$$f^{(2)}(x_1) \leq \frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{4h^2} \leq f^{(2)}(x_2),$$

这就证明了上述断語。

最后, 我們現在可证明下面的著名的定理:

杜·布阿列蒙 (P. du Bois Reymond) 定理 如果区间 $[-\pi, \pi]$ 上的有界可积分 (在原义下) 函数 $f(x)$ 可以在这个区间上展开成三角級数:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (15)$$

則这級数必須是它的傅立叶級数。

首先, 从級数的收斂性可推得系数 a_n, b_n 有界 [第 731 款预备定理]。引用黎曼函数 $F(x)$, 我們得到表示式 $\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}$ 的三角級数展开式 (7):

$$\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2;$$

这个展开式 (当 h 为常数时) 关于 x 一致收斂, 因为它是以形如 $L \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$

的級数为强函数。在这种情形下 [652], 級数的系数必須是它的和的傅

* 即令这两值中有一个是零, 函数也在区间内的一点 x_0 处达到它。

立叶系数:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2} dx, \\ a_n \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2} dx, \\ b_n \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2} dx \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$(n=1, 2, 3, \dots).$$

我們注意: 如果將函数 $f(x)$ 周期开拓到整个实数軸上, 則可設展开式 (15) 在区間 $[-\pi, \pi]$ 外也成立。因此, 根据黎曼第一定理 [730], 关于一切值 x , 我們有

$$F^{(n)}(x) = f(x).$$

由于函数 $f(x)$ 有界

$$|f(x)| \leq K,$$

根据前面的预备定理, 关于一切值 x 与 h , 同时也有

$$\left| \frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2} \right| \leq K. \quad (17)$$

現在我們在等式 (16) 中取得当 $h \rightarrow 0$ 时的极限, 而且根据阿尔裁拉定理 [488], 在这些等式的左端可在积分号下取极限。于是我們得到

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$(n=1, 2, 3, \dots),$$

这就是所需要证明的。

734. 推广 現在我們不假定函数 $f(x)$ 有界, 而且甚至于假設展

开式(15)在有限个点处不成立。在这些削弱了的条件下, 下面的定理成立:

广义杜·布阿列蒙定理 如果在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的绝对可积分函数 $f(x)$ 在这区间上, 只除去有限个点处外, 可展开成三角级数(15), 则这个级数必须是 $f(x)$ 的傅立叶级数*。

我们首先将函数 $f(x)$ 周期开拓到整个实数轴上**。但考虑函数

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$$

来代替 $f(x)$ 比较方便。在任意的有限区间上(可能除去有限个点), 没有常数项的展开式成立:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

我们要证明: 第一,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = 0;$$

其次, 关于 $n=1, 2, 3, \dots$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx; \quad (19)$$

由此就能得到所需要的关系式(18)。

在这里, 由于系数有界[根据第 731 款的预备定理], 所以我们也能引用黎曼函数

$$\Phi(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}$$

(在这次, 它是周期函数, 并且有周期 2π)。

* 这个推广是法雷-布散(Oh. J. de la Vallée Poussin)得到的。

** 如果函数 $f(x)$ 不满足条件: $f(-\pi) = f(\pi)$, 则为了使得这个条件成立, 预先必须改变函数在区间 $[-\pi, \pi]$ 的一个端点的值, 譬如说, 就可改变在展开式(15)不成立处的值。

我們取区間 $[\alpha, \beta]$, 它既不含上面所提到的例外点, 也不含函数 $\varphi(x)$ 的奇异点; 显然, 对于某一个充分小的 δ , 区間 $[\alpha - \delta, \beta + \delta]$ 也是如此。由于函数 φ 有界, 如同上面一样, 我們能断定: 当 $\alpha \leq x \leq \beta, h \leq \delta$ 时, 表示式 $\frac{\Delta_h^2 \Phi(x)}{4h^2}$ 有界。而且

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2 \Phi(x)}{4h^2} = \varphi(x).$$

根据阿尔裁拉定理[488], 对于 $[\alpha, \beta]$ 上任意的 y , 我們有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\alpha}^y \frac{\Delta_h^2 \Phi(x)}{4h^2} dx = \int_{\alpha}^y \varphi(x) dx.$$

如果令

$$\Phi_1(y) = \int_{\alpha}^y \varphi(t) dt,$$

則前一关系式能表示为下列形式:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta_h^2 \Phi_1(y)}{4h^2} - \frac{\Delta_h^2 \Phi_1(\alpha)}{4h^2} \right\} = \int_{\alpha}^y \varphi(t) dt.$$

因为当 $\alpha \leq y \leq \beta, h \leq \delta$ 时, 在大括号中的表示式有界, 所以再应用阿尔裁拉定理, 就得到

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\alpha}^x \{ \dots \} dy = \int_{\alpha}^x dy \int_{\alpha}^y \varphi(t) dt \quad (\alpha \leq x \leq \beta).$$

其次, 令

$$\Phi_2(x) = \int_{\alpha}^x \Phi_1(y) dy,$$

我們能够將所得到的关系式写成:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta_h^2 \Phi_2(x)}{4h^2} - \frac{\Delta_h^2 \Phi_2(\alpha)}{4h^2} - (x - \alpha) \frac{\Delta_h^2 \Phi_1(\alpha)}{4h^2} \right\} = \int_{\alpha}^x dy \int_{\alpha}^y \varphi(t) dt.$$

但是显然 $\Phi_2(x)$ 有通常的二级导数 $\Phi(x)$, 因此

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2 \Phi_2(x)}{4h^2} = \Phi(x), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2 \Phi_2(\alpha)}{4h^2} = \Phi(\alpha).$$

如果用 γ 表示(显然存在的)极限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2 \Phi_1(\alpha)}{4h^2},$$

则最后得到

$$\int_{\alpha}^x dy \int_{\alpha}^y \varphi(t) dt = \Phi(x) - \Phi(\alpha) - \gamma(x - \alpha).$$

现在容易看到逐次积分

$$\int_0^x dy \int_0^y \varphi(t) dt$$

(当 $-\pi \leq x \leq \pi$ 时) 与前面的逐次积分相差一个线性函数。因此函数

$$\Psi(x) = \Phi(x) - \int_0^x dy \int_0^y \varphi(t) dt \quad (20)$$

在每个形如 $[\alpha, \beta]$ 的区间上是线性的。这就是说, 在每个既不是函数 φ 的奇异点, 又不是例外点[在这种点, 展开式(15)不成立]的点 x 处, 就有

$$\Psi^{(n)}(x) = 0.$$

另一方面, 无例外地在一切点 x 处, (2)型的条件成立: 表示式

$$\frac{\Delta_h^2 \Psi(x)}{2h} = \frac{\Delta_h^2 \Phi(x)}{2h} - \frac{1}{2h} \int_x^{x+2h} dy \int_0^y \varphi(t) dt + \frac{1}{-2h} \int_x^{x-2h} dy \int_0^y \varphi(t) dt$$

当 $h \rightarrow 0$ 时趋近于零。实际上, 从黎曼第二定理[并根据第 731 款的预备定理]可推得右端的第一项趋近于零, 又根据关于对积分的变上限求导数的定理[293, 12°], 可知另外两项的和也是这样。

在这种情形下, 根据广义许瓦尔兹定理[729], 在任意的有限区间

上,从而在一切一般的值 x 处,我們有:

$$\Psi(x) = cx + d. \quad (21)$$

現在設

$$\varphi(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx;$$

将它逐項积分两次[706],就得到

$$\int_0^x dy \int_0^y \varphi(t) dt = \frac{\alpha_0 x^2}{4} - \sum_1^{\infty} \frac{\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx}{n^2}. \quad (22)$$

比較(20), (21)及(22),我們得到展开式

$$\frac{\alpha_0 x^2}{4} + cx + d = \sum_1^{\infty} \frac{(\alpha_n - a_n) \cos nx + (\beta_n - b_n) \sin nx}{n^2},$$

它无例外地关于一切实值 x 成立。

因为右端是 x 的連續周期函数,而且也就是有界函数,所以必有 $c=0$,并且也有

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = 0.$$

現在可以看到:級数

$$-d + \sum_1^{\infty} \frac{(\alpha_n - a_n) \cos nx + (\beta_n - b_n) \sin nx}{n^2}$$

处处收斂于零,并且是一致收斂的。于是推得[652或732]它的一切系数都是零,因而条件(19)成立:

$$a_n = \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx,$$

这样证明就完成了。

由此可見: 对于以上所讲述的函数的三角展开式, 我們奠定了它的整个理論基础, 而且表明了特別注意到傅立叶級数是有理由的。

俄中名詞对照表

А

Абель (Abel) 亚培尔
Абели-Пуассона метод обобщённого суммирования 亚培尔-普安松广义求和法
Абсолютная сходимость рядов Фурье 傅立叶级数的绝对收敛性
Аппроксимация функции в среднем 函数的平均近似法
—— равномерная 函数的一致近似法
Арцела (Arzelà) 阿尔裁拉

Б

Бернштейн 伯恩斯坦
Бесселевы функции 贝塞尔函数
Бессель (Bessel) 贝塞尔

В

Валле-Пуассон (Ch. J. de la Vallée Poussin) 法雷-布散
Вейерштрасс (Weierstrass) 维尔斯特拉斯
Виртингер (W. Wirtinger) 魏尔亭格尔

Г

Гамма-функция Γ 函数
Гармоники 调和素
Гармоническая функция в круге 在圆内的调和函数
Гармонические колебания 调和振动
Гармонический анализ 调和分析
—— практический, схема на 12 ординат 实用调和分析, 12 个纵坐标的方法
——, схема на 24 ординат 实用调和

分析, 24 个纵坐标的方法

Гейле-Кантора теорема 海涅-康托尔定理
Гиббс (J. W. Gibbs) 吉卜斯
Главное значение несобственного интеграла 广义积分的主值
Гурвиц (A. Hurwitz) 胡尔维慈

Д

Двойной интеграл Фурье 傅立叶二重积分
Дини признаки 狄尼判别法
Дирхле-Жордана признаки 第里希莱-霞当判别法
—— задача для круга 关于圆的第里希莱问题
—— интеграл 第里希莱积分
—— лемма 第里希莱预备定理
—— разрывный множитель 第里希莱的不连续乘数
—— условие 第里希莱条件

Дифференциальное уравнение колебания струны 弦振动的微分方程

—— теплопроводности 导热微分方程

Дифференцирование ряда Фурье, почленное 傅立叶级数逐项微分法

Дю Буа-Реймонд (P. du Bois-Reymond) 杜·布阿列蒙

Ж

Жордана-Дирхле признаки 霞当-第里希莱判别法

З

Замкнутая ортогональная система функ-

ций 閉合正交函数系

Замкнутости уравнение 閉合性方程

Замкнутость тригонометрической системы 三角函数系的閉合性

И

Изопериметрическая задача 等周問題

Интегральное уравнение 积分方程

Интегральный косинус 积分余弦

— логарифм 积分对数

— синус 积分正弦

Интегрирование рядов Фурье, почленное 傅立叶級数的逐项积分法

К

Кантор (G. Cantor) 康托尔

Кантора-Гейне (Heine) теорема 康托尔-海涅定理

Кеплера (Kopler) уравнение 开普勒方程

Коммоторов 柯尔莫果洛夫

Косинус-преобразование Фурье 傅立叶余弦变换

—— для функции двух переменных 二元函数的傅立叶余弦变换

Котвинген, разложение на простые дроби 余切的简单分式展开式

Коши 科西

Кратные интегралы Фурье 多重傅立叶积分
— ряды Фурье 多重傅立叶級数

Крылов 克雷洛夫

Л

Лагранж (Lagrange) 拉格朗日

Лаплас (Laplace) 拉普拉斯

Лебег (H. Lebesgue) 萊彼格

Лежандра (Legendre) полиномы 勒戎德多項式

Лейбниц (Leibnitz) 萊布尼茲

Липшиц (Lipschitz) 李普西茨

Липшица признака 李普西茨判別法

Ляпунов 李雅普諾夫

М

Махнев 馬立叶夫

Н

Начальные условия 初值条件

Нечётная функция 奇函数

Нормальная ортогональная система функций 規格正交函数系

О

Ограниченного изменения функции, ограниченность частичных сумм ряда Фурье 有界变差函数的傅立叶級数的部分和的有界性

——, порядок коэффициентов Фурье 有界变差函数的傅立叶系数的阶

Ортогональная система функций 直交函数系

Ортогональные функции 正交函数

—— с весом 加权正交函数

Особенностей выделение как метод улучшения сходимости 分离奇异性质作为改善收敛性的方法

Особенности рядов Фурье 傅立叶級数的奇异性质

Остаток ряда Фурье, оценка 傅立叶級数的余部的估值

П

Парсеваль (M. A. Parseval) 巴尔舍伐

Периодическая функция 周期函数

——, интеграл по периоду 周期函数, 对于周期的积分

Перманентность метода обобщенного

суммирование 广义求和法的持續性
 Полнота тригонометрической системы 三角函数系的完全性
 Положительное ядро 正核
 Предельные условия 极限条件
 Приложения формулы Фурье 傅立叶公式的应用
 — рядов Фурье 傅立叶級数的应用
 Производная обобщённая, первая и вторая 一級与二級广义导数
 Пуассон (Poisson) 普安松
 Пуассона-Абеля метод обобщённого суммирования 普安松-亚培尔的广义求和法
 Ручности 波谷

Р

Равномерная сходимость рядов Фурье 傅立叶級数的一致收敛性
 Расходящийся ряд суммирование 发散的級数的求和法
 Регулярная точка 正規点
 Риман (Riemann) 黎曼
 Римана метод суммирования рядов 黎曼的級数求和法
 Рунге (C. Runge) 隆格

С

Синус-преобразование Фурье 傅立叶正弦变换
 — для функции двух переменных 二元函数的傅立叶正弦变换
 Синус, разложение обратной величины на простые дроби 正弦的倒数的简单分式展开式
 Сопряжённые функции первого и второго рода 第一及第二种共軛函数
 Сопряжённый тригонометрический ряд 共軛三角級数

Среднее (квадратическое) отклонение 平均(平方)偏差
 Средних арифметических метод 算术平均法
 Стеклов 斯捷克洛夫
 Степенных рядов метод 幂級数法
 Струны колебание 弦振动
 Суммирование рядов обобщённое 級数的广义求和法
 —, метод Пуассона-Абеля 級数的广义求和法, 普安松-亚培尔法
 —, метод Римана 級数的广义求和法, 黎曼法
 —, метод Чезаро 級数的广义求和法, 齐查罗法
 —, общая схема 級数的广义求和法, 一般的方法
 — тригонометрических рядов в конечном виде 求三角級数的有限形和法
 — обобщённое, метод Пуассона Абеля 三角級数的广义求和法, 普安松-亚培尔法
 —, метод Римана 三角級数的广义求和法, 黎曼法
 —, метод Чезаро-Фейера 三角級数的广义求和法, 齐查罗-费叶尔法
 Сходимость интеграла Фурье, признак Дини 傅立叶积分的收敛性, 狄尼判別法
 —, признак Дирихле-Жорлана 傅立叶积分的收敛性, 第里希萊-霞当判別法
 — рядов Фурье абсолютная 傅立叶級数的绝对收敛性
 —, неравномерная 傅立叶級数的非一致收敛性
 —, признак Дини 傅立叶級数的收敛性, 狄尼判別法
 —, признак Дирихле 傅立叶級数的收敛性, 第里希萊判別法

- , признак Дирихле-Жордана 傅立叶级数的收敛性, 第里希莱-霞当判别法
- , признак Липшица 傅立叶级数的收敛性, 李霞西茨判别法
- равномерная 傅立叶级数的一致收敛性
- , признак Дини 傅立叶级数的一致收敛性, 狄尼判别法
- , Дирихле-Жордана 傅立叶级数的一致收敛性, 第里希莱-霞当判别法
- , признак Липшица 傅立叶级数的一致收敛性, 李霞西茨判别法

Т

- Таубера (А. Tauber) теорема 陶伯尔定理
- Тепла распространение в круглой пластине 在圆盘上的热传导
- острие бесконечном 在无穷长杆上的热传导
- конечном 在有限长杆上的热传导
- полубесконечном 在半无穷长杆上的热传导
- Теплопроводности уравнение 导热方程
- Тригонометрическая система функций, замкнутость 三角函数系, 闭合性
- , полнота 三角函数系, 完全性
- Тригонометрический полином 三角多项式
- ряд 三角级数
- , лемма о коэффициентах 三角级数, 关于系数的预备定理
- , не являющийся рядом Фурье 非傅立叶级数的三角级数
- сопряжённый 共轭三角级数
- Тригонометрическое интерполирование 三角插值法
- Тета-функция, функциональное уравнение θ 函数的函数方程

У

- Узлы 波节
- Улучшение сходимости рядов Фурье 傅立叶级数的收敛性的改善
- Умножение рядов, применение обобщённого суммирования 级数乘法, 广义求和法的应用
- Фурье 傅立叶级数乘法

Ф

- Фату (Р. Fatou) теорема 法都定理
- Фейер (L. Fejér) 费叶尔
- Фробениус (G. Frobenius) 弗洛殷尼乌斯
- Фурье (Fourier) 傅立叶
- интеграл 傅立叶积分
- коэффициенты 傅立叶系数
- обобщённые 广义傅立叶系数
- , порядок малости 傅立叶系数, 无穷小阶
- , экстремальное свойство 傅立叶系数, 极端性质
- метод 傅立叶方法
- преобразование 傅立叶变换
- для функции двух переменных 二元函数的傅立叶变换
- ряд 傅立叶级数
- двойной 二重傅立叶级数
- , комплексная форма 傅立叶级数, 复数形式
- обобщённый 广义傅立叶级数
- формула, различные виды 傅立叶公式, 各种形式
- для функции двух переменных 二元函数的傅立叶公式

Х

- Харди-Ландау (Hardy-Landau) теорема

哈第-藍海定理

Ч

Частичная сумма ряда Фурье, ограниченность 傅立叶級数的部分和的有界性
——, оценка 傅立叶級数的部分和的估值

——сопряжённого ряда, оценка 共軛級数的部分和的估值

Чезаро метод обобщённого суммирования 齐查罗广义求和法

Чётная функция 偶函数

Ш

Шварц (H. A. Schwarz) 許瓦尔茲

Э

Эйлер (Euler) 尤拉

Эйлера метод суммирования 尤拉求和法

——Фурье формулы 尤拉-傅立叶公式

Эйлера постоянная 尤拉常数

Эквивалентная нулю функция 与零等价的函数

Экстремальное свойство отрезков ряда Фурье 傅立叶級数的部分和的极端性质

Ю

Юнг (W. H. Young) 楊格

Я

Ядро положительное 正核

—Дирхле 第里希萊核

—Пуассона 普安松核

—Фейера 費叶尔核